Facoltà di Scienze M. F. e N. - Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 1995/96

Guida e Schede delle Esercitazioni di Laboratorio del Corso di Esperimentazioni di Fisica I

Premessa

◦ Partecipazione alle Attività di Laboratorio

L'attività di laboratorio si differenzia sostanzialmente dalle altre attività didattiche cui lo studente universitario è abituato a partecipare e che, normalmente, non richiedono che lo stesso abbia un ruolo attivo.
In un laboratorio le cose vanno diversamente: ci sono compiti da svolgere, in un tempo limitato, e questi compiti devono essere svolti da un gruppo di studenti.
L'opportunità di far eseguire le esperienze di laboratorio in gruppo non dipende da valutazioni di comodo per chi organizza la didattica dei corsi che prevedono esercitazioni di laboratorio, ma discende da una precisa volontà di stimolare le capacità degli studenti di integrare le proprie attività con quelle di altri per la realizzazione di un progetto comune.
In ogni attività la cui realizzazione coinvolge la collaborazione di più persone non è tollerabile che qualcuno abbia solo il ruolo di spettatore del lavoro degli altri, così come non è tollerabile che, per eccesso di protagonismo, qualcuno emargini gli altri dalle attività che vanno gestite in comune.
È pertanto indispensabile, affinchè la partecipazione alle attività di laboratorio sia fruttuosa, che i gruppi accedano al laboratorio preparati al lavoro che devono fare, sia per quanto riguarda la preparazione individuale, sia per quanto riguarda l'organizzazione del lavoro comune.
Si raccomanda in particolare di individuare chiaramente, prima di iniziare le misure, le diverse operazioni da compiersi, di pianificare la loro successione temporale e di progettare la ripartizione fra i diversi componenti del gruppo dei compiti di misura, di registrazione, di calcolo e di controllo, prediponendo la turnazione dei diversi compiti nelle varie fasi dell'esperienza.

◦ Uso delle Guide e delle Schede

Nel tentativo di incoraggiare e facilitare la preparazione delle attività da svolgere in laboratorio, le guide che illustrano le singole esperienze sono state scritte in modo dettagliato per fornire un supporto documentale all'illustrazione delle esperienze fatta dal Docente in aula e sono state corredate dalle schede nelle quali devono essere raccolti i risultati delle misure e dell'analisi dei dati.
Le schede definiscono l'ordine con cui è opportuno svolgere le diverse operazioni per completare l'esperienza. La puntuale corrispondenza fra i paragrafi e sottoparagrafi delle guide e delle schede consente, in laboratorio, la facile individuazione delle spiegazioni delle singole operazioni, e, prima di accedere al laboratorio, l'individuazione del tipo di risultati che si devono ottenere nelle diverse fasi in cui è articolata ogni esperienza.
Una sufficiente preparazione dell'esperienza presuppone solo la lettura e la comprensione della parte delle guide scritta in corpo normale. Le guide contengono anche note o esercizi (il cui testo è scritto in un corpo minore, con una minore lunghezza di riga, e delimitato da linee orizzontali) che **NON** ci si aspetta siano comprensibili o risolvibili dallo studente medio, quando lo stesso accede al laboratorio per svolgere l'esperienza.
La lettura di questa parte delle guide, può, e per alcuni deve, essere inizialmente omessa ed essere rimandata alla fine del corso, quando tutti gli elementi necessari per la loro comprensione saranno stati presentati o nelle lezioni in aula del corso o nelle lezioni del corso di Fisica Generale I.

○ Uso delle Risorse di Calcolo del Laboratorio

Il ruolo che ha assunto nella società moderna la disponibilità di risorse di calcolo, che solo pochi decenni fa erano inimmaginabili, non poteva essere ignorato in un corso di laboratorio del Corso di Laurea in Fisica.
In considerazione di ciò, ogni tavolo di laboratorio è corredato di un Personal Computer che potete utilizzare secondo le vostre esigenze e le vostre capacità.
Sui Personal Computer a vostra disposizione è installato il linguaggio di programmazione *Microsoft QuickBasic* che potete utilizzare per evitare calcoli noiosi e ripetitivi.
Sui Personal Computer è inoltre installato il programma **ANA_DAT** che potete utilizzare per l'analisi dei dati che acquisirete nel corso delle esperienze. **ANA_DAT** è stato progettato e realizzato per risolvere la maggior parte dei problemi di analisi dei dati che incontrerete.
Tenete comunque ben presente che la disponibilità di risorse di calcolo, calcolatori e programmi, non deve essere considerata una implicita autorizzazione ad evitare l'uso di tecniche manuali di calcolo e di analisi di dati. Il Corso di Laurea in Fisica è un Corso di Laurea Scientifico, non è un Corso di Laurea Tecnico, e l'esistenza di tecniche moderne per la risoluzione dei problemi non deve indurvi ad ignorare le tecniche tradizionali, la cui padronanza ha determinato, e continua a determinare, lo sviluppo della conoscenza.
ANA_DAT visualizza direttamente grafici e adatta automaticamente le funzioni ai dati limitandosi a richiedere all'utente competenze elementari. Per condurre a termine il progetto di formazione in cui vi siete impegnati iscrivendovi ad un Corso di Laurea Scientifico, non potete limitarvi ad utilizzare un moderno strumento di calcolo e di analisi, ma dovete imparare a produrlo, ed è impossibile concepire una attività produttiva, che abbia un qualche valore in una società evoluta, che non affondi le sue radici nel substrato culturale formato dalla conoscenza delle tecnologie tradizionali del passato.
In parole più povere dovrete imparare anche ad usare un foglio di carta millimetrata, e magari anche a costruirvelo, e ad adattare, ad occhio, una curva semplice, come una retta, ad un insieme di valori di grandezze misurate e rappresentati da punti su un foglio di carta. Non dovete, inoltre, dimenticare le tecniche del calcolo elementare, basate sull'uso di carta e matita o, ancor meglio, sull'uso della vostra mente. Non c'è nulla di più triste che vedere un aspirante Fisico che, per moltiplicare due numeri di una cifra, estrae una calcolatrice.

Il Titolare del Corso

Prof. Antonio D'Innocenzo

I Collaboratori del Corso

Prof. Raimondo Anni: Titolare di Teoria delle Reazioni Nucleari

Dott. Paolo Bernardini: Prof. Uff. di Preparazioni di Esperienze Didattiche

Prof. Francesco Strafella: Titolare di Astrofisica

Densità di un Corpo di Forma Regolare

○ Scopo dell'Esperienza

Ci si propone di ottenere la densità media di un corpo solido, di forma apparentemente regolare, dalla determinazione del suo volume e dalla sua massa.

○ Strumentazione a Disposizione

Si ha a disposizione la seguente strumentazione:

- **Riga millimetrata**, per una grossolana misura delle dimensioni del corpo
- **Calibro a cursore ventesimale**, per una miglior determinazione delle dimensioni
- **Calibro Palmer**, per una misura ancora più precisa delle stesse.
- **Bilancia analitica**, per la determinazione della massa del campione.
- **Bilancia elettronica di precisione**, per la verifica, da effettuarsi con l'ausilio del Tecnico di Laboratorio, della correttezza della determinazione della massa del campione.

La bilancia analitica è corredata: di una massiera con campioni di massa tarati, degli usuali organi di controllo e regolazione della verticalità del supporto del giogo (livella a bolla d'aria e due piedi del basamento regolabili) e di masse di regolazione della sensibilità della bilancia e della posizione del centro di oscillazione.
È inoltre a disposizione il campione la cui densità deve essere determinata.

○ Volume del Campione

• Operazioni Preliminari
Verificate l'azzeramento del calibro a cursore e del calibro Palmer e determinate l'intervallo di funzionamento e gli errori di sensibilità degli strumenti a vostra disposizione per le misure delle lunghezze.
Stabilite la formula appropriata per la determinazione del volume del corpo in funzione delle sue dimensioni lineari e ottenete l'espressione del corrispondente errore.
• Dimensioni e Volume del Campione
Procedete alla determinazione delle diverse dimensioni lineari che intervengono nella formula che esprime il volume del corpo utilizzando per ogni dimensione, successivamente, gli strumenti di misura nell'ordine dell'errore di sensibilità decrescente.
Determinate il volume e stimate il corrispondente errore utilizzando le misure ottenute usando lo stesso strumento di misura. Se una delle lunghezze risultasse al di fuori dell'intervallo di funzionamento di uno degli strumenti, utilizzate per quella lunghezza la migliore delle stime ottenute utilizzando uno degli altri strumenti.

○ Massa del Campione

• Operazioni Preliminari
Verificate l'orizzontalità della bilancia con la livella a bolla d'aria. La livella a bolla d'aria è visibile togliendo (con delicatezza) il coperchio metallico che chiude il contenitore della bilancia analitica. Se necessario agite sulle viti regolabili del basamento per ripristinare l'orizzontalità.
Determinate la sensibilità della bilancia a piatti scarichi. Per farlo:

- sbloccate lentamente la bilancia ed individuate il centro di oscillazione c_0 a piatti scarichi con il *metodo delle oscillazioni* [1],
- servendovi del cavalierino di Berzelius, caricate quindi uno dei due bracci della bilancia con una piccola massa Δm,
- ottenuta una situazione in cui l'indice oscilla ancora entro i limiti della scala graduata, determinate il nuovo centro di oscillazione $c_{\Delta m}$, sempre con il metodo delle oscillazioni.

La sensibilità sarà allora data dal rapporto tra il numero di divisioni che separa i due centri di oscillazione determinati ed il sovraccarico Δm.

• Massa del Campione con il Metodo della Doppia Pesata

a) Equilibrio del Campione Posto sul Piattello di Sinistra

Ponete il campione sul piattello di sinistra della bilancia ed equilibrate la bilancia. Per farlo usate i campioni tarati della massiera e, se necessario, ricorrete al cavalierino di Berzelius.

> **ATTENZIONE**
> Tutte le operazioni di *carico* e *scarico* dei piatti della bilancia **devono** essere effettuate *dopo aver bloccato i piatti* per evitare il danneggiamento delle parti meccaniche più delicate (coltelli e giogo).
> Si *raccomanda* di agire lentamente sulla manopola per sbloccare il giogo.

Determinato il centro di oscillazione all'equilibrio, determinate la sensibilità della bilancia in queste condizioni di carico e la massa di equilibrio del campione posto sul piattello di sinistra.

b) Equilibrio del Campione Posto sul Piattello di Destra

Spostate il campione sul piattello di destra e determinate nuovamente la massa di equilibrio.

Misurate le masse di equilibrio del campione posto su entrambi i piattelli, determinate la massa del campione effettuando la media aritmetica delle due masse di equilibrio e stimate l'errore della vostra misura di massa.

Esercizi

- **Il metodo della doppia pesata**

  Se indichiamo con M_{cS} ed M_{cD} i valori della masse campione che equilibrano la massa incognita M_x rispettivamente sul piattello di sinistra e di destra, abbiamo per le condizioni di equilibrio:

$$M_S\, \overline{SS}' \;=\; M_G\, \overline{GG}' + M_D\, \overline{DD}' \qquad (piatti\ \ scarichi) \qquad (1)$$

[1]Nelle bilancie analitiche, una volta equilibrati i piatti l'ago della bilancia oscilla intorno ad una posizione, *il centro di oscillazione* che indica il punto di equilibrio. Per "leggere" la posizione di equilibrio senza aspettare che l'ago si fermi per effetto degli attriti in gioco (si comporta in effetti come un pendolo smorzato) si usa leggere gli estremi delle oscillazioni in modo tale da avere un numero totale di letture dispari. Per esempio: fissato un verso positivo rispetto allo zero della scala graduata, faremo 3 letture per il limite sinistro dell'oscillazione e 2 per il destro. A questo punto la media delle 2 letture di destra ci darà la posizione *virtuale* dell'indice al momento della media delle 3 letture di sinistra. Questa procedura tiene infatti conto dello smorzamento dell'oscillazione e perciò potremo ricavare il centro di oscillazione mediando tra questi due valori medi. Se abbiamo fatto le letture s_1, s_2, e s_3 di 3 massime elongazioni a sinistra e le due letture d_1, e d_2 a destra, allora il centro di oscillazione sarà data da:

$$c = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) + \frac{1}{2}(d_1 + d_2)\right]$$

dove avremo considerato le letture con il proprio segno.

$$(M_S + M_x)\,\overline{SS}' = M_G\,\overline{GG}' + (M_D + M_{cD})\,\overline{DD}'\ (campioni\ \ a\ \ destra) \quad (2)$$
$$(M_S + M_{cS})\,\overline{SS}' = M_G\,\overline{GG}' + (M_D + M_x)\,\overline{DD}'\ (campioni\ \ a\ \ sinistra) \quad (3)$$

dove:
M_S, M_D ed M_G sono rispettivamente le masse dei piattelli di sinistra, di destra e del giogo,
$\overline{SS}', \overline{DD}'$ e $\overline{GG}'$ sono i bracci delle forze applicate rispettivamente al piattello di sinistra, di destra ed al centro di massa del giogo.
Sottraendo l'eq. (1) dalle eq.i (2) e (3) e ricavando M_x si ottiene:

$$M_x = \sqrt{M_{cS}M_{cD}}$$

- **Media aritmetica e media geometrica**
  Dati due numeri x_1 e x_2 che differiscono fra di loro di una piccola quantità $2\Delta x$ (nel senso che $\frac{2\Delta x}{x_i} \ll 1$, con $i = 1$ o 2,) stimate la differenza fra la media geometrica e la media aritmetica. Utilizzando i valori delle masse di equilibio che avete ottenuto, discutete la legittimità di stimare la massa del corpo effettuando la media aritmetica delle due masse invece che la loro media geometrica.

• **Massa del Campione con il Metodo della Tara**
a) Equilibrio della Tara
Disponete su uno dei piattelli della bilancia una tara di massa superiore alla massa del campione e, procedendo come prima, equilibrate la massa della tara. Determinate la sensibilità della bilancia nelle nuove condizioni di carico.
b) Equilibrio della Tara con il Campione sull'Altro Piattello
Disponete il campione sul piattello opposto a quello contenente la tara, equilibrate di nuovo la bilancia e ricavate per differenza la massa del campione.

• **Massa del Campione con la Bilancia Elettronica di Precisione**
Ricorrendo all'aiuto del Tecnico di Laboratorio determinate la massa del campione con la bilancia elettronica di precisione.

◦ Densità del Campione

Utilizzando la formula che lega la densità media di un corpo alla sua massa ed al suo volume, determinate la densità del corpo ed il corrispondente errore utilizzando la miglior stima del volume del corpo e le diverse determinazioni della sua massa.
Esprimete i risultati nel sistema **cgs** che, in questo caso, è il sistema di unità di misura che ci dà un risultato numerico più vicino alle sensazioni che proviamo nella vita quotidiana (solitamente maneggiamo oggetti di volume più vicino al cm^3 che al m^3 e di massa più vicina a qualche g piuttosto che a qualche migliaio di Kg). A fianco del risultato espresso nel sistema **cgs** esprimete il risultato anche nel **Sistema Internazionale** che, come sapete, è il sistema adottato internazionalmente dalla comunità scientifica e tassativamente imposto dalle leggi dello Stato (L. 122 del 14/4/78 e D.P.R. 802 del 12/8/82).

Note

- **Come pesare**
  La miglior strategia per determinare la posizione di un punto all'interno di un intervallo consiste nel dividere a metà l'intervallo e nel considerare come nuovo intervallo per la successiva suddivisione la metà dell'intervallo originario al cui interno risulta contenuto il punto. Le masse dei campioni tarati della massiera sono scelte in modo tale da rappresentare un buon compromesso fra la convenienza della esatta bisezione e l'opportunità di rispettare la base 10 del sistema di numerazione che utilizziamo.

Supponiamo, per esempio, di voler determinare la massa di un corpo di circa $37\,g$. Inizieremo la misura utilizzando il campione tarato di $100\,g$ e constateremo che la massa del campione è compresa fra 0 e $100\,g$. Utilizzando il campione di $50\,g$ bisechiamo l'intervallo dei possibili valori della massa incognita e riduciamo all'intervallo $0-50\,g$ l'intervallo di variabilità della massa incognita. A questo punto la strategia della bisezione suggerirebbe la presenza di un campione di massa di $25\,g$ e successivamente di $12.5\,g$ e così via, con una comparsa sempre più massiccia di decimali. Per evitare l'inconveniente i costruttori delle massiere forniscono una massa di $20\,g$, in luogo di una di $25\,g$, in modo tale da violare di poco la regola della esatta bisezione e di ottenere alla successiva bisezione una massa giusto inferiore di un ordine di grandezza della più grande massa della scala (fra 10 e $100\,g$) considerata.

Continuando la nostra misura utilizzeremo pertanto il campione di $20\,g$ e constateremo che la massa incognita è compresa nell'intervallo $20-50\,g$. Mancando un campione da $15\,g$ dovremo accontentarci di sezionare questo intervallo utilizzando il campione da $10\,g$ ottenendo il nuovo intervallo $30-50$ che bisecato con il secondo campione da $10\,g$ fornisce l'intervallo $30-40\,g$, la cui ampiezza risulta diminuita di un ordine di grandezza rispetto all'ampiezza dell'intervallo originario $0-100\,g$. Continuando il procedimento con gli elementi della massiere di massa pari ad un decimo delle masse dei campioni precedentemente utilizzati riduciamo di un ulteriore fattore 10 l'intervallo di variabilità, e così via.

- **Perchè bisecare**

Dato un intervallo di ampiezza L supponiamo di dividerlo in due parti di ampiezza pL e $(1-p)L$. Il punto cercato risulta individuato con un errore massimo $\Delta_1 = p\frac{L}{2}$, se cade all'interno del primo intervallo, e $\Delta_2 = (1-p)\frac{L}{2}$, se cade all'interno del secondo. Essendo eguali a p e $1-p$ le probabilità che il punto cada entro ciascuno dei due intervalli, in media, l'errore massimo con cui il processo di divisione individua il punto cercato sarà:

$$\Delta = p^2\frac{L}{2} + (1-p)^2\frac{L}{2}.$$

È immediato dimostrare che Δ è minimo per $p=\frac{1}{2}$ e risulta pari, ovviamente, a $\frac{L}{4}$.

- **Densità di alcune sostanze**

Solidi	$g\,cm^{-3}$	Liquidi	$g\,cm^{-3}$	Gas	$g\,dm^{-3}$
Alluminio	2.70	Acetone	0.796	Anidr. carb.	1.976
Arsenico	5.72	Acido cloridrico	1.185	Aria	1.293
Argento	10.50	Acido solforico	1.850	Argon	1.784
Ferro	7.86	Alcool etilico	0.791	Azoto	1.251
Nichel	8.80	Alcool metilico	0.810	Cloro	3.17
Ottone	8.39	Anilina	1.039	Elio	0.1787
Oro	19.30	Benzina	0.700	Fluoro	1.697
Piombo	11.34	Benzolo	0.894	Idrogeno	0.0899
Platino	21.40	Bromo	2.928	Kripton	3.74
Plutonio	19.80	Gallio	5.91	Metano	0.716
Rame	8.93	Cloroformio	1.501	Neon	0.901
Silicio	2.33	Glicerina	1.260	Ossigeno	1.429
Stagno	7.28	Mercurio	13.595	Radon	9.91
Tungsteno	19.3	Metano $(-164°)$	0.415	Xenon	5.89
Uranio	18.80	Olio d'oliva	0.920		
Zinco	7.10	Petrolio	0.840		

Le densità dei gas si riferiscono alla temperatura di 0 $°C$ ed alla pressione di $760\,mm\,Hg$.

Viscosità di un Fluido con il Metodo di Stokes

◦ Scopo dell'Esperienza

Scopo dell'esperienza è misurare la viscosità di un fluido, la glicerina, utilizzando il metodo di Stokes.
Il metodo di Stokes si basa sulla determinazione della velocità con cui si muove un corpo sferico, lasciato cadere in un fluido, quando viene raggiunto l'equilibrio fra la forza peso, la spinta idrostatica e la resistenza opposta dal fluido al moto del corpo.
Secondo la legge di Stokes la resistenza opposta da un fluido di viscosità η al moto, con velocità v, di una sfera di diametro d è data da

$$F = 3\pi d\eta v \tag{1}$$

Nota
La resistenza opposta da un fluido al moto di un corpo è regolata dalle complicate equazioni dell'idrodinamica e la semplice espressione (1) vale solo se ci si limita a considerare un corpo sferico in moto nel fluido con una *piccola velocità*. Quanto piccola debba essere la velocità è specificato dalla relazione:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta} \ll 2000, \tag{2}$$

ove ρ, v e d indicano, rispettivamente, la densità del fluido, la velocità del corpo ed una sua dimensione trasversale.
La grandezza adimensionale $\mathcal{R}$ viene denominata *numero di Reynolds* e controlla la transizione dal regime di moto laminare del fluido a quello turbolento.

L'equazione del moto di una sfera, di diametro d e massa m, lasciata cadere verticalmente in un fluido è:

$$ma = (m - m')g - 3\pi d\eta v, \tag{3}$$

ove m' e g indicano, rispettivamente, la massa del fluido spostato dalla sfera e l'accelerazione di gravità, e a e v indicano le componenti dell'accelerazione e della velocità lungo la direzione dell'accelerazione di gravità.
Se la sfera viene rilasciata da ferma alla superficie del fluido la massima velocità, che chiameremo *velocità critica* o *limite* e indicheremo con v_c, che la stessa può raggiungere sarà quella in corrispondenza alla quale a si annulla, ovvero:

$$v_c = \frac{(m - m')g}{3\pi d\eta} \tag{4}$$

Indicando con ρ_f la densità del fluido e con ρ_s la densità della sfera, dalla relazione precedente si ottiene l'espressione:

$$\eta = \frac{(\rho_s - \rho_f)g}{18}\frac{d^2}{v_c}, \tag{5}$$

che è alla base del metodo di Stokes per la determinazione della viscosità di un fluido. L'espressione precedente consente infatti di ricavare η dalla conoscenza delle grandezze d, ρ_s, ρ_f, g e v_c.
L'accelerazione di gravità viene supposta nota con un valore stimato:

$$g = (979 \pm 1)cm\, s^{-2},$$

si suppone inoltre nota la densità dell'acciaio, con cui sono fabbricate le sfere, con un valore stimato di:

$$\rho_s = (7.82 \pm 0.06)g\, cm^{-3}.$$

◦ Strumentazione a Disposizione

Si ha a disposizione la seguente strumentazione:

- **Termometro**, per la misurazione delle temperature dei fluidi.
- **Bilancia di MohrWestphal**, per la determinazione della densità del fluido.
- **Riga millimetrata**, per la determinazione degli spazi percorsi dalle sfere.
- **Calibro Palmer**, per la determinazione del diametro delle sfere.
- **Cronometro digitale**, per la misurazione dei tempi impiegati dalle sfere per percorrere gli spazi prefissati.

Sono inoltre a disposizione contenitori in vetro contenenti acqua distillata e glicerina, due confezioni di sfere di diametro diverso ed una livella a bolla d'aria.

◦ Operazioni Preliminari

• Predisposizione della Bilancia

Per la corretta utilizzazione della bilancia idrostatica assicuratevi che il giogo risulti orizzontale nella sua posizione di equilibrio in aria. Per far ciò, disponete verticalmente il supporto della bilancia controllando, mediante la livella a bolla d'aria, l'orizzontalità della parte dritta del braccio della bilancia e agendo, se necessario, sulle viti calanti del basamento.

Azzerate successivamente la bilancia, con l'immersore sospeso all'apposito gancio, in aria. L'operazione si effettua spostando la massa di compensazione sino all'allineamento dell'indice del giogo con l'indice fissato alla parte incurvata del braccio della bilancia.

• Taratura della Bilancia in Acqua Distillata

Le bilance idrostatiche a disposizione in laboratorio erano inizialmente tarate a $20\,°C$, nel senso che la bilancia equilibrata, come precedentemente descritto, in aria risultava equilibrata con l'immersore in acqua distillata a $20\,°C$ e con il cavaliere di massa maggiore sulla decima tacca. A causa del loro lungo uso non è consentito assumere che le bilance siano correttamente tarate ed è pertanto necessario procedere alla determinazione del fattore K per cui moltiplicare la lettura strumentale [1] l_f per ottenere la densità ρ_f del fluido:

$$\rho_f = K l_f, \tag{6}$$

Ricordando che in una bilancia idrostatica le letture strumentali l_f e l_a, all'equilibrio in due fluidi f e a, sono legate alle densità ρ_f e ρ_a dalla relazione:

$$\frac{\rho_f}{\rho_a} = \frac{l_f}{l_a}, \tag{7}$$

il fattore K può essere determinato equilibrando la bilancia in un fluido a, nel nostro caso acqua distillata, di densità nota ρ_a alla temperatura T del laboratorio[2], ed utilizzando la relazione

$$K = \frac{\rho_a}{l_a}. \tag{8}$$

Per ottenere una stima dell'errore di lettura strumentale, dopo aver equilibrato la bilancia con l'immersore in acqua distillata alla temperatura del laboratorio, si utilizzi il cavaliere

---

[1] Ricordiamo che la lettura strumentale della bilancia idrostatica in cui l'equilibrio viene raggiunto ponendo il cavaliere di massa maggiore sulla i-ma tacca, quello di massa intermedia sulla j-ma e quello di massa minore sulla k-ma è:

$$l = \frac{i}{10} + \frac{j}{100} + \frac{k}{1000}$$

[2] Se la bilancia fosse tarata e T fosse pari a $20\,°C$ otterremmo, ovviamente, $l_a = 1$ e K risulterebbe pari alla densità dell'acqua distillata a quella temperatura ($K = 0.998230\,g\,cm^{-3}$).

di massa minore e si determini la minima variazione di posizione dello stesso che produce una alterazione apprezzabile della condizione di equilibrio.

• **Verifica dei Rapporti fra le Masse dei Cavalieri**
Si cerchi di verificare sperimentalmente che la massa del cavaliere più piccolo è pari a 1/10 della massa del cavaliere intermedio e che questa e pari a 1/10 della massa del cavaliere più grande.

○ Densità del Fluido

Dopo aver accuratamente asciugato l'immersore immergete lo stesso nella glicerina, riequilibrate la bilancia idrostatica, e stimate l'errore della nuova lettura strumentale. Annotate la temperatura della glicerina e usate la formula (6) per calcolare la densità della stessa e per stimarne l'errore.

○ Determinazione della Velocità Critica

• **Rilevazione dei Tempi**
Predisponete due traguardi sul recipiente contenente la glicerina e con la riga millimetrata misuratene la distanza s_A. Abbiate cura di disporre il primo traguardo a circa $5\,cm$ dalla superficie del liquido ed il secondo ad una distanza circa uguale dal fondo del recipiente. Prelevate una decina di sfere da uno dei due contenitori, e per ognuna di esse misurate il diametro ed il tempo impiegato a percorrere il tratto s_A, dopo averle rilasciate da ferme alla superficie della glicerina. Scartate, ovviamente, le sfere il cui diametro dovesse risultare molto diverso dalle altre: qualche studente burlone potrebbe aver mescolato le sfere di contenitori diversi, e non tenete conto delle misure dei tempi che, prima di leggerne il risultato, ritenete siano viziate da un vostro errore nell'avviare o arrestare il cronometro.
Ripetete la procedura con un'altra serie di sfere prelevate dal secondo contenitore.
Poichè la velocità critica è il valore asintotico della velocità, è opportuno verificare che la velocità media misurata nel tratto s_A può essere considerata eguale, entro gli errori di misura, alla velocità critica. Per far ciò abbassate il traguardo superiore in modo da definire un nuovo tratto s_B, pari a circa la metà di s_A, e ripetete le misure precedenti.

Esercizio
Indicato con s lo spazio percorso e posto $k = 3\pi d\eta$, la (3) può essere riscritta nella forma:

$$m\frac{dv}{ds}v = (m - m')g - kv, \tag{9}$$

che può essere facilmente integrata. Il legame fra v ed s, assumendo $v = 0$ per $s = 0$, risulta dato da:

$$v + v_c \log(1 - \frac{v}{v_c}) = -\frac{k}{m}s, \tag{10}$$

che dimostra che, per ogni spazio finito, la velocità risulta minore di v_c e che v_c è il limite di v per s tendente all'infinito.

Compete, pertanto, all'accortezza dello sperimentatore utilizzare per la stima della velocità limite un intervallo spaziale sufficientemente lontano dalla superfice del fluido da far sì che la velocità media che viene misurata differisca dalla velocità limite per meno di una certa frazione dell'errore con cui la velocità stessa viene misurata.

Dalla (10) si ricava immediatamente che posto $v = v_c(1 - e^{-x})$ il minimo spazio che il corpo deve percorrere perchè la sua velocità differisca dalla v_c meno di $e^{-x}v_c$ è dato da

$$s(x) = v_c\frac{m}{k}(x - 1 + e^{-x}), \tag{11}$$

che per $x \gg 1$ può essere approssimata con:

$$s(x) \simeq v_c\frac{m}{k}(x - 1). \tag{12}$$

Date una stima degli errori associati ai diametri d_1 e d_2 delle sfere dei due contenitori e degli errori associati ai tratti s_A e s_B. Calcolate i *valori medi* $t_{i\alpha}$, con $i = 1, 2$ e $\alpha = A, B$, dei tempi impiegati dalle sfere di diametro d_i per percorrere i tratti di lunghezza s_α e stimatene l'errore.

- **Determinazione delle Velocità**

Calcolate le velocità $v_{i\alpha}$ con cui le sfere di diametro d_i hanno percorso i tratti di lunghezza s_α con la formula:

$$v_{i\alpha} = \frac{s_\alpha}{t_{i\alpha}} \tag{13}$$

e calcolate, usando le formule per la propagazione degli errori, i corrispondenti errori massimi ed in quadratura[3].

- **Verifica della Consistenza dei Risultati**

Se al traguardo superiore, nella sua posizione più elevata, è già stata raggiunta una velocità che si discosta dalla velocità critica molto meno dell'errore con cui le velocità sono state determinate deve risultare:

$$v_{1A} \simeq v_{1B} \qquad \text{e} \qquad v_{2A} \simeq v_{2B}, \tag{14}$$

ove con il simbolo $\simeq$, in questo caso, indichiamo l'equaglianza entro gli errori.
È possibile verificare facilmente in modo quantitativo la consistenza dei risultati utilizzando il programma **ANA_DAT** creando dei File del tipo:

```
indice della misura
valore misurato
2
1  x1  dx1
2  x2  dx2
```

in cui al posto di `x1` e `x2` si inseriranno i valori delle due grandezza di cui si vuole verificare la compatibilità e al posto di `dx1` e `dx2` i corrispondenti scarti quadratici medi. Adattando ai dati una funzione costante si ottiene la miglior stima della grandezza ed il corrispondente scarto quadratico medio. **ANA_DAT** fornisce anche il livello di confidenza percentuale che dà una indicazione quantitativa della attendibilità dell'ipotesi che i valori ottenuti si siano discostati dal valore della grandezza che volevamo misurare per effetto di fluttuazioni casuali verificatesi nel processo di misura.
Usando **ANA_DAT** determinate le migliori stime per le velocità limite v_i, con $i = 1, 2$, gli errori, ed i livelli di confidenza.
Un valore del livello di confidenza inferiore a qualche per cento ci indurrebbe a dubitare fortemente della bontà dell'ipotesi che lo scostamento fra la velocità critica v_i che volevamo misurare e le velocità misurate $v_{i\alpha}$, con $\alpha = A, B$, sia trascurabile.

Esercizi

- Giustificare alla luce del principio di massima verosimiglianza l'uso proposto di **ANA_DAT** per verificare la consistenza delle misure, e specificate quali condizioni, tacitamente assunte, legittimano tale uso. Discutere le limitazioni della validità di tali assunzioni.

[3] Se per una grandezza x disponete solo della stima σ_x per il suo scarto quadratico medio, nella formula per la propagazione dell'errore massimo assumete come errore massimo di x:

$$\Delta x = 3\sigma_x,$$

e, viceversa, se per una grandezza y disponete solo della stima Δ_y per il suo errore massimo, nella formula per la propagazione dell'errore in quadratura assumete come scarto quadratico medio di y:

$$\sigma_y = \frac{\Delta y}{\sqrt{3}}$$

.

- Il valore calcolato da **ANA_DAT** per la costante cosa rappresenta ?

Una ulteriore verifica della consistenza dei risultati, che prescinde dagli errori nella misura della lunghezza dei tratti percorsi, può essere effettuata verificando la validità della relazione:

$$\tau_A = \frac{t_{2A}}{t_{1A}} \simeq \tau_B = \frac{t_{2B}}{t_{1B}}, \tag{15}$$

che si ottiene dividendo fra di loro, membro a membro, le due relazioni precedenti.
Per effettuare la verifica calcolate i valori di τ_A e di τ_B, gli scarti quadratici medi σ_{τ_A} e σ_{τ_B} (utilizzando la formula per la propagazione degli errori in quadratura) ed infine il valore della grandezza:

$$x = \frac{\tau_A - \tau_B}{\sqrt{\sigma^2_{\tau_A} + \sigma^2_{\tau_B}}}. \tag{16}$$

Usando l'opzione `Calcolatrice` di **ANA_DAT** calcolate il valore della funzione[4] $1-A(x)$, il numero ottenuto dà una valutazione quantitativa della ragionevolezza dell'ipotesi che i valori ottenuti per τ_A e τ_B si siano discostati fra di loro solo per effetto di fluttuazioni casuali verificatesi nel processo di misura.
Un valore del numero ottenuto inferiore a qualche centesimo ci indurrebbe a dubitare fortemente della bontà di questa ipotesi.

Esercizi

- Giustificate alla luce della teoria dei test di ipotesi la procedura suggerita e specificate quali condizioni, tacitamente assunte, legittimano tale uso. Discutere le limitazioni della validità di queste implicite assunzioni.
- Il valore ottenuto per $1 - A(x)$ a che livello di significatività, per l'accettazione dell'ipotesi nulla (che le due medie siano eguali) corrisponde?

○ Determinazione della Viscosità

• Verifica della Consistenza dei Risultati

a) Verifica della legge di Stokes

Se è risultata ragionevole l'ipotesi che le velocità misurate rappresentino una accurata determinazione delle velocità critiche per le sfere dei due diametri diversi rimane ancora da verificare che i valori ottenuti per le velocità critiche dipendono dal diametro delle sfere così come prevede la legge di Stokes. Si osservi infatti che, assunta valida la legge di Stokes e supposto di aver utilizzato sfere della stessa densità, il valore della viscosità dipende dalle sfere utilizzate solo tramite il fattore:

$$f = \frac{d^2}{v}. \tag{17}$$

Nel nostro caso dovrà pertanto risultare

$$f_1 = \frac{d_1^2}{v_1} \simeq f_2 = \frac{d_2^2}{v_2} \tag{18}$$

La validità di questa relazione può essere verificata usando **ANA_DAT** allo stesso modo in cui è stato utilizzato per verificare la costanza delle velocità. Se il livello di confidenza che si ottiene è ragionevole le determinazioni delle grandezze f_i possono essere considerate fra di loro consistenti ed in accordo con la legge di Stokes. Inoltre, i valori ottenuti per le

[4]La funzione $A(x)$ di **ANA_DAT** calcola la probabilità che una variabile casuale normalmente distribuita, a media 0 e varianza 1, risulti compresa fra $-x$ e x.

v_i possono essere considerati determinazioni corrette, entro gli errori sperimentali, delle velocità critiche delle sfere utilizzate.
b) Effetto delle pareti
Se le misure dei tempi sono state effettuate in modo sufficientemente accurato, può succedere che siano evidenziate significative differenze fra i valori di f_1 e f_2.
Il fatto è che la formula di Stokes, nella forma in cui è stata data, vale solamente per il moto di una sfera in un fluido illimitato, e solo allora il legame fra la velocità critica e le altre grandezze è correttamente espresso dalla (4).
L'effetto delle pareti fa sì che la velocità critica, misurata utilizzando un contenitore limitato, risulti minore del valore previsto della (4). Indicata con v_c' la velocità critica per il moto di una sfera di diametro d lungo l'asse di un cilindro di diametro D contenente un fluido, la velocità critica v_c per il fluido illimitato e legata alla v_c' dalla relazione:

$$v_c = (1 + \frac{9}{4}\frac{d}{D})v_c', \tag{19}$$

valida a meno di termini di ordine superiore al primo in $\frac{d}{D}$.
Esiste pertanto un fattore correttivo, dipendente dai diametri, da inserire nella prova di consistenza precedente.
La procedura precedente va pertanto ripetuta definendo:

$$f = \frac{d^2}{(1 + \frac{9}{4}\frac{d}{D})v}, \tag{20}$$

e verificando la consistenza di:

$$f_1 = \frac{d_1^2}{(1 + \frac{9}{4}\frac{d_1}{D})v_1} \simeq f_2 = \frac{d_2^2}{(1 + \frac{9}{4}\frac{d_2}{D})v_2}. \tag{21}$$

Il valore della costante f che meglio si adatta alle determinazioni sperimentali di f_1 ed f_2 fornisce la miglior stima del rapporto $\frac{d^2}{v_c}$ da utilizzare nella stima della viscosità.

• **Valore della Viscosità della Glicerina**
Riscritta la formula (5) nella forma:

$$\eta = \frac{(\rho_s - \rho_f)g}{18} f, \tag{22}$$

determinate il valore di η e, utilizzando le formule per la propagazione degli errori, il corrispondente errore massimo e in quadratura.

Esercizi

- Nota la viscosità della glicerina determinare per le sfere di entrambi i diametri la minima distanza del traguardo superiore dalla superficie del fluido in corrispondenza alla quale la velocità differisce dalla velocità critica per meno di un decimo dell'errore con cui la stessa è stata determinata.
- Determinate il valore del numero di Reynolds per le sfere di entrambi i diametri.

Analisi del Moto di un Corpo Sottoposto a Forze Costanti

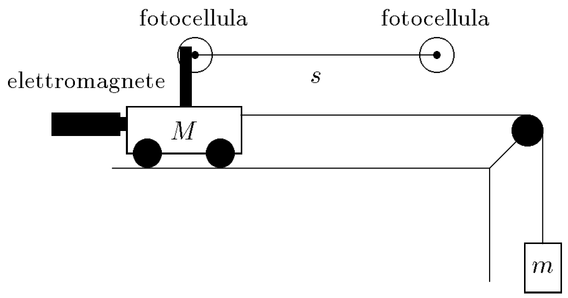
◦ Scopo dell'Esperienza

Si intende studiare la cinematica e la dinamica di un corpo, un carrello in movimento su una rotaia, trascinato da alcuni pesi in caduta vincolata. Prima di svolgere l'esperienza è opportuno che lo studente si riguardi velocemente la dinamica del punto materiale, in particolare nel caso di forze (e quindi accelerazioni) costanti.

◦ Strumentazione a Disposizione

Sono a disposizione i seguenti strumenti di misura:

- **Cronometro digitale** comandato da due *fotocellule*, per la misura dei tempi.
- **Riga millimetrata**, per la misura degli spazi (evitate di utilizzare per la misura degli spazi il nastro millimetrato incollato al supporto della rotaia, *non è affidabile*).
- **Bilancia elettronica**, per la misura della massa del carrello e della corretta taratura delle masse appese utilizzate.



L'apparato sperimentale, grossolanamente schematizzato in figura, è composto da un supporto che regge: la rotaia, sulla quale si muove il carrello, e la carrucola nella cui gola viene fatto passare il filo che applica la forza di trazione al carrello. È a disposizione una *livella a bolla d'aria* per verificare, e se necessario ripristinare, l'orizzontalità della rotaia. L'apparato è inoltre dotato di un *elettromagnete* con interruttore, che comanda lo sganciamento del carrello. Sono a disposizione alcune masse per applicare al carrello forze diverse.

◦ Legge Oraria del Moto

• Operazioni Preliminari

Si verifichi per mezzo della livella l'orizzontalità della rotaia. Si posizioni la prima fotocellula proprio a ridosso del carrello bloccato dall'elettromagnete: la fotocella deve essere prima avvicinata al carrello fino a che non si attiva il cronometro, quindi deve essere riportata indietro di pochissimo (quanto meno si può, avendo cura di controllare che il cronometro, una volta arrestato oscurando la seconda fotocellula, non riparta). La prima fotocellula non verrà quindi più mossa durante tutta l'esperienza.
Si colleghi il carrello al filo e si faccia passare il filo nella gola della carrucola. All'altra estremità del filo si trova un gancio a cui verranno collegate le masse tarate. Si misuri infine la massa M del carrello.

• Misura del Tempo al Variare dello Spazio

La misura vera e propria consiste nella determinazione del tempo che il carrello impiega a percorrere distanze prefissate. Scelta una prima massa da inserire nel gancio, si posizioni la seconda fotocella alla minima distanza prescelta e si misuri per mezzo del cronometro digitale il tempo di percorrenza. Si ripeta la misura più volte (almeno 10) e si determini lo

scarto quadratico medio dei tempi misurati e lo scarto quadratico medio della media dei tempi. Si ripeta l'intera procedura per la massima distanza prescelta e per una distanza intermedia. Si stimi, grossolanamente, la dipendenza dello scarto quadratico medio dei tempi dallo spazio percorso e si assuma valida la stima per le altre distanze prescelte.
Per le altre distanze ci si limiti ad effettuare non meno di 3 e non più di 5 misure di tempi e si assuma come miglior stima del tempo di percorrenza la media delle misure ottenute. Si attribuisca a tale media uno scarto quadratico medio pari al valore dello scarto quadratico medio, che la precedentemente grossolana stima prevede per la distanza considerata, diviso per la radice quadrata del numero delle misura effettuate.
Si abbia cura di scegliere le distanze equispaziate ed in maniera tale da avere un numero sufficiente di punti per eseguire poi le interpolazioni[1].
Ripetete l'intero procedimento variando la massa appesa con incrementi della massa regolari, almeno di $20\,g$ in $20\,g$ o meglio, se il tempo a vostra disposizione ve lo consente, di $10\,g$ in $10\,g$.
Ricordatevi di misurare con la bilancia elettronica a vostra disposizione la massa di tutte le masse che appenderete. Le masse erano inizialmente tarate, ma a causa del loro lungo uso non è lecito assumere che lo siano ancora.

Esercizio

In un paio di casi, si considerino le stime delle varianze dei tempi corrispondenti al minimo ed al massimo spazio percorso. Si sottoponga al test statistico appropriato l'ipotesi che le varianze ottenute siano varianze campionarie ottenute da due popolazioni normalmente distribuite e aventi la medesima varianza.

- **Determinazione della Legge Oraria**

Utilizzando **ANA_DAT**, per tutte le masse appese considerate, si verifichi che i punti sperimentali ottenuti sono in accordo con la dipendenza dello spazio dal tempo che, secondo la cinematica, risulta propria di moto uniformemente accelerato e si determini il valore dell'accelerazione. Verificare che per ottenere un ragionevole accordo è necessario assumere un valore non nullo per la velocità iniziale. Si annotino i valori ottenuti per le accelerazioni, le velocità iniziali, i corrispondenti errori ed i livelli di confidenza.

Esercizi

- **Una velocità iniziale anomala**

  Dall'analisi dei dati della dipendenza dello spazio dal tempo si deduce che il moto in esame è uniformemente accelerato. Nell'ipotesi che il moto sia tale anche prima della prima fotocella e che l'accelerazione a sia sempre la stessa, è facile risalire alla distanza s_0 che il carrello, partendo da fermo, deve percorrere per raggiungere la velocità v_0; risulta infatti:

  $$s_0 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

  Verificate che i valori di s_0 così calcolati, attribuendo a v_0 i valori delle velocità iniziali ottenuti, non sono compatibili con una vostra ragionevole stima dello spazio che il carrello deve compiere per attivare la prima fotocellula.

---

[1] Tenete presente che adatterete ai vostri dati una funzione dipendente da due parametri e che pertanto un numero di 5 punti sperimentali deve essere considerato il numero minimo di punti per una ragionevole verifica dell'accordo fra la funzione ed i dati. Se avete scelto come distanza minima e massima le distanze di $10\,cm$ e $90\,cm$, e come distanza intermedia una distanza di $50\,cm$, effettuate le altre misure in modo che le vostre distanze siano almeno spaziate di $20\,cm$, o meglio, compatibilmente con il tempo a vostra disposizione, di $10\,cm$

- **Variazione della tensione del filo**

  Calcolate la variazione che subisce la tensione del filo all'apertura dell'interruttore che comanda l'elettromagnete.

  Si può invocare, a spiegazione del risultato inatteso per la velocità iniziale del carrello, l'estensibilità della funicella, che quindi agisce come una sorta di elastico, al momento dell'apertura dell'interruttore?

∘ Dipendenza dell'Accelerazione dalla Massa Appesa

• Un Modello Ingenuo

Un semplice modello, apparentemente appropriato a descrivere il sistema, lo otteniamo: assimilando il carrello ad un punto materiale di massa M, libero di muoversi senza attrito lungo un asse orrizontale,
trascurando l'attrito agente sul perno della carrucola ed il momento di inerzia della stessa, considerando il filo privo di massa, perfettamente flessibile ed inestensibile,
e trascurando la resistenza opposta al moto dall'aria.
Se il modello fosse adeguato, sospendendo all'estremità del tratto verticale del filo una massa m, il sistema dovrebbe muoversi di moto uniformemente accelerato con accelerazione data da:

$$a = \frac{m}{M + m}\, g, \tag{1}$$

dove $g = 979\ cm/s^2$ indica l'accelerazione di gravità.
Si confrontino i valori dell'accelerazione calcolati usando questa formula, ed i corrispondenti errori, con quelli ottenuti sperimentalmente,

---

Programma

Per il calcolo dei valori di a e del corrispondente errore Δa può risultare comodo scriversi un programmino, usando un linguaggio qualsiasi. Segue un esempio in *Microsoft QuickBasic*.

```
'Grandezze che NON variano
CarMas = 98.5: dCarMas = .1: dAppMas = .1: g = 979: dg = 1
DO
  INPUT ; "Massa Appesa ", AppMas
  IF AppMas = 0 THEN STOP
  TotMas = AppMas + CarMas
  a = AppMas / TotMas * g
  Da = AppMas / TotMas * dg
  Da = Da + CarMas / TotMas ^ 2 * g * dAppMas
  Da = Da + AppMas / TotMas ^ 2 * g * dCarMas
  PRINT USING "& #####.### & #####.###"; ",  a ="; a; ",  Da ="; Da
LOOP
END
```

• Effetto degli Attriti

Nel tentativo di ottenere un accordo fra il nostro ingenuo modello e i risultati sperimentali è possibile inserire nell'equazione del moto del carrello un termine d'attrito, costante, per simulare gli effetti degli attriti che frenano la rotazione sia delle ruote del carrello che della carrucola. Posta eguale, in modulo, a $m_0 g$ la forza d'attrito agente sul sistema è immediato ottenere per l'accelerazione la nuova previsione:

$$a = \frac{m - m_0}{M + m}\, g. \tag{2}$$

Adattando ai dati una funzione di questo tipo si verifichi che è possibile migliorare sensibilmente l'accordo fra i punti sperimentali e le previsioni del modello. Si ottengano i valori di m_0, del suo errore e del livello di confidenza corrispondenti al miglior accordo possibile.

• **Effetto dei Momenti di Inerzia**
Se si fosse tenuto conto, oltre che degli attriti, anche dei momenti di inerzia delle ruote del carrello e della carrucola in luogo della (2) si sarebbe ottenuto:

$$a = \frac{m - m_0}{M + M' + m}\, g, \tag{3}$$

con

$$M' = 2\frac{\mathcal{I}_r}{R_r^2} + \frac{\mathcal{I}_c}{R_c^2}, \tag{4}$$

ove $\mathcal{I}_r$ e $\mathcal{I}_c$ indicano, rispettivamente, i momenti d'inerzia della ruota del carrello e della carrucola, e R_r e R_c i corrispondenti raggi.
Poichè la presenza di un termine aggiuntivo a denominatore potrebbe aver falsato la stima nel termine m_0 che tenta di descrivere l'effetto degli attriti, è opportuno procedere ad una stima del contributo del termine M'.
Se assimiliamo la ruota ad un disco omogeneo il suo momento d'inerzia è dato da $\mathcal{I}_r = \frac{1}{2}M_r R_r^2$. Stimando il momento di inerzia della carrucola con la formula[2] $\mathcal{I}_c = \frac{3}{4}M_c R_c^2$, il termine aggiuntivo M' si riduce a:

$$M' = M_r + \frac{3}{4}M_c, \tag{5}$$

e per la sua determinazione è sufficiente misurare la massa M_r delle ruote e M_c della carrucola.[3]
Calcolate il valore di M' e adattate la formula (3) ai dati sperimentali attribuendo a M' il valore calcolato e lasciando variare m_0.

Esercizi

- **Effetto molla**

  Indicate con m e M la massa appesa e quella del carrello, e con k la costante di elasticità del filo, si dimostri che la massima velocità che il carrello può acquisire, in conseguenza della variazione di tensione subita dal filo al rilascio del carrello, è data da:

  $$v = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\sqrt{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}\sqrt{\frac{M}{k}}g,$$

  ove $\alpha = \frac{m}{M}$. Si studi l'andamento di v in funzione di α e si verifichi se le velocità iniziali osservate sono, almeno qualitativamente, in accordo con il risultato ottenuto.

- **Attrito della carrucola**

  Il momento della forze d'attrito che tende a frenare la rotazione di una ruota o di una carrucola dipende dal modulo della forza esercitata sul perno.

  Supposto che, in prima approssimazione, tale dipendenza sia lineare, come dovrebbe essere modificata la (3) per tener conto di questo effetto?

  Esistono indicazioni nei risultati che avete ottenuto che suggeriscono l'importanza di questo effetto?

---

[2] La formula suggerita colloca il momento di inerzia della carrucola a metà strada fra il momento d'inerzia di un disco e quello di un anello

[3] Fatevi, eventualmente, aiutare dal Tecnico di Laboratorio per estrarre una ruota del carrello e la carrucola dalle loro sedi

Periodo di Oscillazione e Forza di Richiamo di un Pendolo Semplice

◦ Scopo dell'Esperienza

Dato un sistema composto da una sfera metallica appesa tramite un filo ad un telaio, l'esperienza si propone di studiare la dipendenza del suo periodo di oscillazione dalla lunghezza del filo e la dipendenza della forza di richiamo dall'angolo che misura l'ampiezza del suo scostamento dalla verticale.

• Dipendenza del Periodo dalla Lunghezza

In base alla legge che nel gergo proprio della fisica classica va sotto il nome di *legge dell'isocronismo delle piccole oscillazioni* [1], e nei limiti in cui il sistema è assimilabile ad un pendolo semplice, ci si attende che la dipendenza del periodo di oscillazione T dalla lunghezza l del pendolo sia data da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1}$$

ove con g si è indicata l'accelerazione di gravità. Se il modello del pendolo semplice, che compie oscillazioni di piccola ampiezza, è adeguato a descrivere il sistema, T^2 deve risultare proporzionale a l:

$$T^2 = kl, \tag{2}$$

e la determinazione sperimentale della costante di proporzionalità k consente di ricavare, utilizzando la relazione:

$$g = \frac{4\pi^2}{k}, \tag{3}$$

una stima dell'accelerazione di gravità.
La dicitura *piccole oscillazioni*, presa di per sé, non significa nulla ed in realtà il periodo di oscillazione di un pendolo semplice dipende da l, da g e dall'ampiezza θ_0 dell'oscillazione secondo la relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}f(\theta_0), \tag{4}$$

ove $f(\theta_0)$ è una funzione riconducibile ad una funzione trascendente non elementare denominata *Integrale Ellittico Completo di I Specie.*
La trattazione esatta del pendolo semplice, a condizione che si usi sempre la medesima ampiezza di oscillazione θ_0, non fa venir meno la dipendenza lineare di T^2 da l, ma si limita a modificare la dipendenza di g dal coefficiente k di proporzionalità fra T^2 e l che diviene:

$$g = \frac{4\pi^2}{k}f^2(\theta_0) \simeq \frac{4\pi^2}{k}(1 + \frac{1}{8}\theta_0^2), \tag{5}$$

ove per ottenere l'ultima espressione si è approssimata $f(\theta_0)$ con i primi due termini del suo sviluppo in serie di potenze nell'intorno di $\theta_0 = 0$:

$$f(\theta_0) \simeq 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2.$$

L'esperienza si propone di verificare la linearità della dipendenza di T^2 da l e di ottenere usando la (3), o se è il caso [2] la (5), una stima di g.

[1] La tradizione vuole che questa legge sia stata scoperta da Galilei misurando, con il battito del polso, le oscillazioni di lampade nel Duomo di Pisa.

[2] L'uso della (1) in luogo della (4) o della (3) in luogo della (5) è legittimo solo se gli errori che si commettono nel misurare le altre grandezze che compaiono nelle formule sono sufficientemente grandi da mascherare l'errore che si commette approssimando la funzione $f(\theta_0)$ con 1.

Note

- **Periodo di Oscillazione di un Pendolo**

Posto $\omega^2 = \frac{g}{l}$, l'equazione del moto di un pendolo semplice è del tipo:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta. \tag{6}$$

Dalla (6) è immediato riconoscere che la quantità:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos\theta \tag{7}$$

è una costante del moto immediatamente identificabile con l'energia, a meno di un fattore moltiplicativo. Ponendo la costante eguale a $\omega^2\mathcal{C}$ dalla (7) si ricava:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{2}\omega\sqrt{\cos\theta + \mathcal{C}}. \tag{8}$$

Poichè la velocità deve essere un numero reale, il moto è possibile solo se risulta:

$$\cos\theta + \mathcal{C} \geq 0, \tag{9}$$

e di conseguenza le condizioni iniziali che determinano il valore di $\mathcal{C}$ devono essere tali da far sì che $\mathcal{C} \geq -1$. Se $\mathcal{C} = -1$ il pendolo può solo stare fermo con $\theta = 0$, se $\mathcal{C} > 1$ il moto angolare del sistema è illimitato, mentre se $\mathcal{C} < 1$ il moto angolare è limitato, dovendo sempre risultare $|\theta| \leq \theta_0$ con $\cos\theta_0 = -\mathcal{C}$. Se supponiamo $\mathcal{C} < 1$ e scegliamo come origine dei tempi l'istante in cui il pendolo è disposto lungo la verticale, $\theta(0) = 0$, con una velocità $\dot{\theta}(0) > 0$, il pendolo si muove aumentando dapprima θ, e diminuendo $\dot{\theta}$, sino a raggiungere, in un istante di tempo $\frac{T}{4}$, θ_0 con una velocità nulla. Raggiunto θ_0, l'angolo θ inizia a diminuire sino a raggiungere nuovamente la posizione verticale, con un valore di $\dot{\theta}$ eguale a $-\dot{\theta}(0)$, per ripetere il moto precedentemente descritto in modo speculare rispetto alla verticale, e così via, indefinitamente. Il moto risulta essere periodico di periodo T, risultando T eguale all'intervallo di tempo, trascorso il quale il moto si ripete eguale a sé stesso.

La dipendenza di T da θ_0 può essere immediatamente ottenuta dalla (8) riscritta nella forma differenziale:

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2}\omega\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}, \tag{10}$$

che integrata fra gli istanti di tempo $t = 0$ e $t = \frac{T}{4}$ nei quali risulta, rispettivamente, $\theta(0) = 0$ e $\theta(\frac{T}{4}) = \theta_0$ fornisce il risultato:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, d\theta, \tag{11}$$

che esprime la corretta dipendenza del periodo T dall'ampiezza di oscillazione θ_0.

Posto $\phi = \frac{\theta}{2}$, e conseguentemente $\phi_0 = \frac{\theta_0}{2}$, la (11) diviene:

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\phi_0 - \sin^2\phi}}\, d\phi. \tag{12}$$

Approssimando, nell'integrale, $\sin\phi$ e $\sin\phi_0$, rispettivamente, con ϕ e ϕ_0 è immediato ottenere:

$$T \simeq \frac{4}{\omega}\int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{\phi_0^2 - \phi^2}}\, d\phi = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{13}$$

che esprime, per piccole oscillazioni, l'indipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione.

Effettuando nella (12) la sostituzione $t = \frac{\sin\phi}{\sin\phi_0}$ si ottiene, esattamente:

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \left[(1-t^2)(1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}t^2)\right]^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{\omega}K(\sin^2\frac{\theta_0}{2}), \tag{14}$$

ove con $K(x)$ si è indicata la funzione trascendente non elementare, denominata *Integrale Ellittico Completo di I Specie*, definita dall'integrale:

$$K(x) = \int_0^1 [(1-t^2)(1-xt^2)]^{-\frac{1}{2}} dt. \tag{15}$$

La funzione $K(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, avente raggio di convergenza eguale a 1, nell'intorno di $x = 0$, e lo sviluppo in serie è dato da:

$$K(x) = \frac{\pi}{2}[1 + (\frac{1}{2})^2 x + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 x^2 + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 x^3 + \ldots].$$

La relazione che lega la funzione $f(\theta_0)$, introdotta nella (4), alla funzione K è:

$$f(\theta_0) = \frac{2}{\pi} K(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}).$$

- **Pendolo Semplice o Pendolo Fisico ?**

  Considerate le dimensioni della sfera appesa al filo ci si può domandare se sia legittimo trattare il sistema come un pendolo semplice piuttosto che come un *pendolo fisico*. Ricordiamo che con la dicitura *pendolo fisico* si indica un corpo rigido di massa M, libero ruotare attorno ad un asse orizzontale, posto ad una distanza l dal suo centro di massa, che per effetto della forza peso oscilla attorno alla posizione di equilibrio stabile in cui il centro di massa si trova in un piano verticale passante per l'asse di rotazione. Indicato con $\mathcal{I}$ il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione il periodo di oscillazione di un pendolo fisico è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{M g\, l}} f(\theta_0). \tag{16}$$

  Trascurando la massa del filo e ricordando che il momento d'inerzia di una sfera di raggio R e di massa M, posta a distanza l dal suo centro, è dato da:

$$\mathcal{I} = Ml^2 + \frac{2}{5} MR^2, \tag{17}$$

  nel nostro caso, si ottiene per T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2})} f(\theta_0). \tag{18}$$

  In base a questa relazione ci si può attendere che misure di sufficiente precisione possano evidenziare la non linearità della dipendenza di T^2 da l.

• Dipendenza della Forza di Richiamo dall'Angolo

Per un pendolo semplice di massa M, indicato con θ l'angolo di scostamento dalla verticale, è immediato ricavare la dipendenza da θ della forza di richiamo, ovvero della componente della forza peso lungo la direzione perpendicolare al filo, il cui modulo F è dato da:

$$F = Mg \sin\theta. \tag{19}$$

L'analisi dei dati sperimentali sulla dipendenza di F da θ prescinderà dalla conoscenza della (19) e sarà effettuata in modo tale da ricavare indicazioni che fortemente ci indurranno ad ipotizzare la validità della formula che, in realtà, è ben nota [3] .

[3] Il mestiere del fisico sarebbe troppo facile, e forse poco divertente, se fosse possibile ridurlo alla verifica di leggi già note.

Ci si limiterà, infatti, a supporre solamente che F sia una funzione incognita $F(\theta)$ dell'angolo θ sufficientemente onesta da poter essere sviluppata in serie di potenze di θ nell'intorno di $\theta = 0$:

$$F(\theta) = f_0 + f_1\theta + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4 + \ldots \tag{20}$$

L'ovvio fatto che F è nulla per $\theta = 0$ impone che il termine f_0 sia nullo, e la relazione precedente si riduce a:

$$F(\theta) = f_1\theta + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4 + \ldots \tag{21}$$

Adattando ai dati le funzioni che si ottengono dalla (21) troncandola a termini di ordine via via crescente si otterrano informazioni sui coefficienti dello sviluppo in serie che suggeriscono la validità della (19) il cui sviluppo in serie nell'intorno di $\theta = 0$ è dato da:

$$F(\theta) = Mg(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots). \tag{22}$$

○ Strumentazione a Disposizione

Si hanno a disposizione i seguenti strumenti di misura:

- **Cronometro digitale**, per la determinazione dei periodi di oscillazione.
- **Calibro ventesimale**, per la misura del diametro della sfera.
- **Metro a nastro**, per la misura della lunghezza del filo.
- **Massiera con campioni di massa**, per la determinazione della forza di richiamo.
- **Bilancia digitale**, per la misura delle masse che è necessario, o opportuno, determinare nel corso dell'esperienza.

È inoltre a disposizione un telaio metallico, al quale può essere sospeso il pendolo mediante un sistema di bloccaggio del filo, dotato di un'asta che permette di misurare tramite un indice fissato alla sua estremità superiore le ampiezze angolari su un goniometro. All'altra estremità dell'asta è montato un supporto che regge una carrucola.
La sfera che viene utilizzata per realizzare il pendolo è dotata di due fori filettati disposti sulla superficie della sfera lungo due raggi fra di loro perpendicolari. Ad un foro va fissata una estremità del filo la cui altra estremità viene fissata al telaio per realizzare il pendolo, all'altro va fissato, nella seconda parte dell'esperienza, una estremità del filo che, passato sulla carrucola, regge all'altra estremità il cestello in cui possono essere depositate le masse tarate per misurare, equilibrandola, la forza di richiamo.

○ Dipendenza del Periodo dalla Lunghezza

• Operazioni Preliminari

Misurate con il calibro il diametro della sfera e fissate un filo ad uno dei due fori predisposti sulla sfera. Posizionate l'asta in modo tale che possa servirvi da riferimento per rilasciare il pendolo sempre con il medesimo scostamento angolare di circa 5°, e sospendete il pendolo al telaio in modo tale che abbia una lunghezza di circa 50 cm.
Misurate la lunghezza l del pendolo e date una stima del suo errore Δl. Mettete in oscillazione il pendolo e misurate il tempo τ che impiega [4] a compiere una decina di

[4] Per misurare il tempo impiegato dal pendolo a compiere un certo numero di oscillazioni, evitate di usare l'inversione del moto del pendolo come evento la cui osservazione determina l'avvio e, successivamente, l'arresto del cronometro. Nel punto di inversione del moto il pendolo ha velocità nulla e risulta difficile apprezzare con precisione l'istante di tempo in cui l'inversione del moto si verifica. Usate per avviare ed arrestare il cronometro l'attraversamento della posizione di equilibrio!

oscillazioni, ripetete la misura di τ quattro o cinque volte e stimate lo scarto quadratico medio σ_τ dei tempi misurati. Usando la (2) ottenete una prima, grossolana, stima della costante k.

Per verificare la legge (2) pianificate la misura dei periodi di oscillazione del pendolo in corrispondenza ad N (almeno una decina) lunghezze equispaziate l'_n, con $n = 1, 2, \ldots, N$, sino ad una lunghezza massima $l'_N = L$ di almeno 100 cm.

Utilizzando il valore di Δl, stimato per il pendolo di lunghezza di circa 50 cm, ed i valori di N e di L pianificati, determinate il valore della costante α che soddisfa la relazione:

$$\sqrt{\frac{3(1+\alpha^2)}{N}}\frac{\Delta l}{L} = 0.001 \tag{23}$$

Con il valore di α così determinato, ed usando le stime ottenute per σ_τ e k, calcolate il numero di oscillazioni:

$$\mathcal{N}_n = \frac{2\sigma_\tau}{\alpha \Delta l}\sqrt{\frac{l'_n}{k}}, \tag{24}$$

di cui misurerete la durata temporale τ'_n per una lunghezza del pendolo l'_n.

Operando in questo modo potrete determinare il quadrato del periodo T'_n di oscillazione di un pendolo di lunghezza l'_n con un errore $\sigma_{T'^2_n}$ che soddisfa alla relazione:

$$\frac{\sigma_{T'^2_n}}{T'^2_n} = 2\frac{\sigma_{\tau'_n}}{\tau'_n} = \alpha\frac{\Delta l}{l'_n} \tag{25}$$

Nota

- **Quante Oscillazioni Usare per Determinare il Periodo**

  L'esperienza si propone di verificare, per valori di x minori di un certo valore X, la validità di una legge del tipo:

  $$y = ax,$$

  con un insieme di N misure. L'opportunità di effettuare una scansione omogenea dell'intervallo considerato della variabile x suggerisce l'uso di una griglia di valori equispaziati:

  $$x_n = n\Delta x, \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{X}{N} \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

  in corrispondenza ai quali effettuare le determinazioni di y_n. Ogni misura di x_n e di y_n permette di ottenere la stima:

  $$a_n = \frac{y_n}{x_n}$$

  per la presunta costante di proporzionalità fra x e y, e, indicati con σ_{x_n} e σ_{y_n} gli scarti quadratici medi di x_n e y_n, la stime:

  $$\sigma_{a_n} = a_n\sqrt{\frac{\sigma^2_{x_n}}{x^2_n} + \frac{\sigma^2_{y_n}}{y^2_n}}$$

  del corrispondente scarto quadratico medio.

  Considerando ogni a_n normalmente distribuita, con varianza $\sigma^2_{a_n}$, attorno ad un valore incognito a, la miglior stima, secondo il principio di massima verosimiglianza, di a ottenibile dalle a_n è data dalla media pesata:

  $$a = \frac{\sum_{n=1}^N w_n a_n}{\sum_{n=1}^N w_n}, \qquad \text{con} \qquad w_n = \frac{1}{\sigma^2_{a_n}},$$

  e la stima dello scarto quadratico medio di a e data da:

  $$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N w_n}}.$$

Nel nostro caso, supposto che le y_n rappresentino le misure di T_n^2 e le x_n quelle di l_n, gli errori delle x_n sono fissati, ed eguali tra di loro, dallo strumento e dalla procedura che utilizziamo per misurare le lunghezze, mentre gli errori delle y_n possono essere tenuti sotto controllo.

Se supponiamo infatti di essere capaci di misurare i tempi τ, impiegati dal pendolo per compiere $\mathcal{N}$ oscillazioni con uno scarto quadratico medio σ_τ risulta:

$$\sigma_T = \frac{\sigma_\tau}{\mathcal{N}},$$

e di conseguenza, ignorando le complicazioni connesse allo smorzamento del moto del pendolo, potremmo diminuire a piacere σ_T aumentando $\mathcal{N}$.

Utilizzando la precedente espressione di σ_a e dei pesi w_n, e ponendo $a_n \simeq a$ e $\sigma_{x_n} = \sigma_x$, si ottiene

$$\frac{\sigma_a}{a} \simeq \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\frac{\sigma_x^2}{x_n^2} + \frac{\sigma_{y_n}^2}{y_n^2}} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Posto

$$\frac{\sigma_{y_n}}{y_n} = \alpha_n \frac{\sigma_x}{x_n},$$

e $x_n = n\Delta x$, l'equazione precedente può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\sigma_a}{a} \simeq \frac{\sigma_x}{\Delta x} I^{-\frac{1}{2}}$$

con

$$I = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{1 + \alpha_n^2}.$$

Scegliendo come strategia di misura quella consistente nell'operare in modo tale che risulti $\alpha_n = \text{Costante} = \alpha$, e ricordando che $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \simeq \frac{N^3}{3}$, si può ottenere facilmente:

$$\frac{\sigma_a}{a} \simeq \sqrt{\frac{3\,(1+\alpha^2)}{N}} \frac{\sigma_x}{X}.$$

Può essere interessante osservare nella formula finale la comparsa dell'usuale fattore statistico $\sqrt{N}$ nel denominatore del secondo membro, che esprime la riduzione dell'errore statistico dovuta all'aver effettuato N misure, e la comparsa del fattore di penalizzazione $\sqrt{3}$ a numeratore, dovuto al fatto che le misure sono state distribuite omogeneamente nell'intervallo di variabilità della x invece di concentrarle all'estremo superiore, come sarebbe stato più conveniente se non avessimo voluto verificare la legge di proporzionalità nell'intero intervallo.

Può anche essere interessante domandarsi se non risultino maggiormente convenienti strategie di misura alternative a quella proposta, fondate ad esempio sul dedicare, nel caso del pendolo, lo stesso tempo ad ogni misura o sul misurare per tutte le lunghezze lo stesso numero di oscillazioni.

• Misura delle Lunghezze e dei Tempi

Predisponete il pendolo in modo tale che abbia una lunghezza prossima a l'_n, senza sforzarvi di renderla proprio eguale, misuratene la lunghezza l_n e determinate il periodo T_n utilizzando per ogni lunghezza il numero $\mathcal{N}_n$ di oscillazioni precedendemente calcolato. Calcolate i valori di T_n^2 e stimatene gli errori.

• Analisi dei Risultati delle Misure

Nel piano (l, T^2) le N coppie di punti (l_n, T_n^2) dovrebbero distribuirsi lungo la retta la cui equazione è data dalla (2). Utilizzando **ANA_DAT**, determinate il valore del coefficiente angolare k della retta, passante per l'origine, che meglio si adatta ai punti sperimentali, l'errore associato ed il corrispondente livello di confidenza.

Stampate il grafico delle differenze fra i valori misurati ed i valori calcolati, e calcolate la vostra stima dell'accelerazione di gravità utilizzando la (3) o, se è il caso, la (5) ed il corrispondente errore che dovrebbe risultare di circa una parte su mille.

◦ Dipendenza della Forza di Richiamo dall'Angolo

• Operazioni Preliminari

Misurate la massa del pendolo, del cestello in cui porrete gli elementi della massiera, e della carrucola.
Fissate una estremità del filo alla sfera e l'altra al cestello, fate passare il filo sulla carrucola e ponete nel cestello una massa di circa $20\,g$. Ruotate l'asta sino ad allineare il suo asse al filo del pendolo nella posizione di equilibrio e modificate, se necessario, l'assetto del supporto e/o della carrucola per fare in modo che la direzione della forza esercitata dal filo cui è appeso il cestello sia perpendicolare alla direzione del filo del pendolo.
Rimuovete la massa posta nel cestello e posizionate l'asta secondo la verticale.

• Misura della Forza di Richiamo

Equilibrate, utilizzando le masse tarate, il pendolo ad N angoli θ_n, con $n = 1, 2, \ldots, N$, equispaziati. Fate in modo che l'angolo massimo sia di circa $60°$ e fate la misura per almeno una decina di angoli.
Per ogni θ_n determinate la minima e la massima massa, che chiameremo rispettivamente m_{1n} e m_{2n}, che appese al filo sono compatibili con l'equilibrio del pendolo all'angolo fissato. Per farlo tenete presente che la massa m_{1n} è la più piccola massa in corrispondenza alla quale il pendolo, rilasciato delicatamente da fermo all'angolo θ_n, non tende ad avvicinarsi alla verticale, mentre m_{2n} è la più grande massa in corrispondenza alla quale il pendolo, nelle stesse condizioni, non tende ad allontanarsi dalla verticale.
Cercate di dare una stima dell'incertezza Δm_{in}, con $i = 1, 2$, delle masse, minima e massima, compatibili con l'equilibrio del pendolo.
Calcolate il valore della massa m_n, che con la sua forza peso $m_n g$ equilibra all'angolo θ_n la forza di richiamo F_n, con la formula:

$$m_n = \sqrt{m_{1n} m_{2n}},$$

e stimate l'incertezza di m_n.
Osserverete che all'aumentare dell'angolo la differenza fra i valori di m_{2n} e m_{1n} aumenta. La causa di ciò è da ricercarsi nel momento delle forze d'attrito che impedisce la rotazione della carrucola anche in presenza di differenze fra i momenti delle forze esercitate dal filo cui è appeso il pendolo e da quello cui è appeso il cestello. Il massimo momento esercitabile dalle forze d'attrito dipende, in prima approssimazione, linearmente dalla risultante delle forze applicate al perno della carrucola che, nel nostro caso, aumenta all'aumentare dell'angolo.

Nota

- **Attrito della Carrucola:**

  Supponiamo che il massimo momento T_a delle forze d'attrito che impediscono la rotazione della carrucola sia proporzionale al modulo P della risultante delle forze applicate alla carrucola:

  $$T_a = \alpha P.$$

  Indicati con μg il peso della carrucola e con $m_i g$ e F, rispettivamente, i moduli delle forze applicate alla carrucola dal filo cui è appeso il cestello e dal filo cui è legato il pendolo, in equilibrio all'angolo θ, risulta:

  $$P_i = \sqrt{(m_i + \mu)^2 g^2 + F^2 + 2(m_i + \mu) g F \sin\theta}.$$

Indicato con ρ il raggio della carrucola, se risulta:

$$|F - m_i g|\rho < \alpha P_i$$

il sistema, rilasciato da fermo, rimane in equilibrio.
Il minimo, m_1, ed il massimo, m_2, valore di m_i compatibili con l'equilibrio del sistema ad un angolo θ saranno dati da:

$$R - m_1 = \beta\sqrt{(m_1+\mu)^2 + R^2 + 2(m_1+\mu)R\sin\theta}$$

$$R - m_2 = -\beta\sqrt{(m_2+\mu)^2 + R^2 + 2(m_2+\mu)R\sin\theta},$$

ove si è posto $R = \frac{F}{g}$ e $\beta = \frac{\alpha}{\rho}$. Si osservi che R è eguale alla massa $m = m_1 = m_2$ che, in assenza di attrito, con il suo peso equilibra la forza di richiamo del pendolo all'angolo θ. Dalle due equazioni precedenti è immediato ricondurre, eliminando β, la determinazione di R alla soluzione di un'equazione di terzo grado. Ponendo $\mu = 0$, ovvero trascurando la massa della carrucola, l'equazione si riduce a:

$$R^3 - m_1 m_2 R = 0,$$

che ammette, come unica soluzione del sistema originario, la soluzione:

$$R = \sqrt{m_1 m_2}.$$

Per una piccola massa della carrucola, senza ricorrere alla soluzione esatta dell'equazione di terzo grado, è possibile ottenere l'espressione approssimata della soluzione cercata:

$$R \simeq \sqrt{m_1 m_2}\left[1 + \mu\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}} - \frac{1}{\sqrt{m_2}}\right)^2 \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right],$$

che permette una eventuale correzione della precedente, più grossolana, stima di R.

• Analisi dei Risultati delle Misure

Piuttosto che considerare la dipendenza della forza di richiamo dall'angolo conviene studiare la dipendenza della massa di equilibrio dall'angolo (risulta trivialmente proporzionale alla forza), per farlo create un *File Dati* contenente i valori degli angoli θ_n, espressi in radianti, delle masse m_n e dei rispettivi errori, ed un *File Funzioni* contenente la definizione della funzione:

$$y = p_1 x(1 + p_2 x + p_3 x^2 + p_4 x^3). \tag{26}$$

Adattate la funzione ai dati prima lasciando variare solo p_1 e tenendo fissi, ed eguali a 0, i parametri p_i restanti, poi lasciando variare anche p_2, e così via.
Annotate i valori ottenuti per i parametri, per gli errori, ed i corrispondenti livelli di confidenza.
Analizzate i risultati ottenuti per individuare eventuali parametri irrilevanti, nel senso che il loro valore, tenuto conto della stima del loro errore, è compatibile con 0 e la loro variabilità non contribuisce in modo significativo al valore del livello di confidenza. Se verificate l'esistenza di parametri irrilevanti ripetete l'adattamento della funzione ai dati mantenendo questi parametri fissi, ed uguali a 0.
Confrontate i valori che avete ottenuto per i parametri con i valori attesi sulla base della (22).
Adattate ai dati anche una funzione del tipo:

$$y = A\sin x, \tag{27}$$

e stampate un grafico che illustri l'accordo fra i dati e questa funzione e fra i dati e la funzione che avete ottenuto considerando parametri variabili diversi da zero nella (26) solo quelli che contribuiscano significativamente all'accordo fra i dati e la (26) stessa.

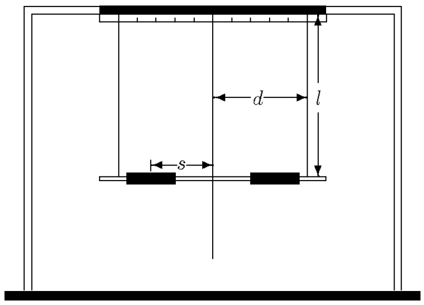
Misura di Momenti d'Inerzia
e
Verifica del Teorema di Steiner

○ Scopo dell'Esperienza

Si vuole determinare, utilizzando una sospensione bifilare, il momento d'inerzia di una sbarretta sottile e di un sistema composto dalla sbarretta stessa lungo la quale sono montati, simmetricamente rispetto al suo centro, due corpi cilindrici eguali. Variando la distanza del centro dei cilindri dal centro della sbarretta si vuole verificare sperimentalmente la validità del teorema di Steiner.

○ Strumentazione a Disposizione

L'apparato sperimentale, grossolanamente schematizzato nella figura, è composto da un telaio al quale può essere sospesa, mediante una sospensione bifilare, una sbarretta.
Sul telaio è montato un sistema che permette la regolazione della lunghezza dei fili ed una riga millimetrata che consente di misurarne la distanza. L'estremità libera dei fili termina con due anellini nei quali infilare la sbarretta sulla quale sono praticate delle incisioni, alla distanza di $1\,cm$ l'una dall'altra, per consentire un preciso posizionamento degli anellini stessi. Sono inoltre a disposizione due cilindri cavi di diametro interno circa eguale al diametro della sbarretta e dotati di viti che consentono il posizionamento del loro centro sulle incisioni di fede della sbarretta.

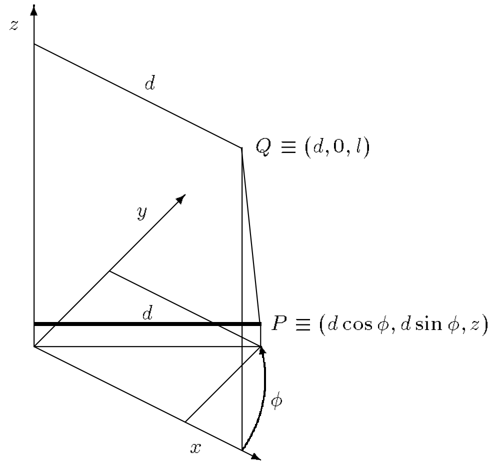


Per la determinazione delle diverse grandezze da misurare nel corso dell'esperienza avete a disposizione la seguente strumetazione:

- **Riga millimetrata**, per la misura della lunghezza dei fili, della loro distanza e della lunghezza della sbarretta.
- **Calibro ventesimale**, per la determinazione del diametro della sbarretta e delle dimensioni dei cilindri.
- **Bilancia elettronica**, per la misure delle masse.
- **Cronometro digitale**, per la misura dei periodi di oscillazione.

○ Misura del Momento d'Inerzia con una Sospensione Bifilare

Sospendendo, mediante due fili, due punti di un corpo rigido sottile a due punti fissi si ottiene un sistema a tre gradi di libertà, le cui equazioni del moto, in assenza di ulteriori condizioni, risultano piuttosto complicate.
Se ci si limita a considerare un assetto del sistema del tipo di quello illustrato nella figura precedente, simmetrico rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa del corpo, la simmetria del sistema consente, per particolari condizioni iniziali, di trattarlo come un sistema ad un solo grado di libertà. Se il corpo, inizialmente in equilibrio, viene ruotato di un angolo ϕ_0, avendo cura di non modificare la posizione nel piano orizzontale del suo centro di massa, le forze agenti sul sistema risultano simmetriche nel piano orizzontale. Rilasciando il sistema da fermo, questa simmetria delle forze fa sí che il centro di massa non possa acquistare che una componente verticale della velocità, mantenendo nulle le altre componenti, e la posizione del sistema risulta univocamente determinata dalla posizione verticale del centro di massa o dall'angolo formato dalla direzione del corpo con la direzione che lo stesso aveva all'equilibrio.



In questo caso, indicando con z la posizione del centro di massa lungo un asse verticale, orientato verso l'alto e con l'origine posta nella sua posizione di equilibrio, e con ϕ l'angolo di rotazione dell'asse del corpo rispetto all'asse in posizione di equilibrio, l'energia del corpo è data da:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\phi}^2 + Mgz, \qquad (1)$$

ove si sono indicati con M, $\mathcal{I}$ e g, rispettivamente, la massa del corpo, il suo momento d'inerzia e l'accelerazione di gravità.
La condizione che il filo sia inestensibile impone la validità della relazione:

$$(l-z)^2 + 2d^2(1-\cos\phi) = l^2, \qquad (2)$$

che consente di eliminare nella (1) una delle due variabili a vantaggio dell'altra e di ottenere, per derivazione rispetto al tempo[1], l'equazione del moto nella variabile residua. L'equazione che in questo modo si ottiene non è affatto semplice e risulta conveniente limitarsi a considerare il caso di piccole oscillazioni. Sotto queste condizioni non è difficile ricavare che la dipendenza del periodo di oscillazione dalle altre grandezze è data da:

$$T = \frac{2\pi}{d}\sqrt{\frac{l\mathcal{I}}{Mg}} = \frac{2\pi\mathcal{R}}{d}\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (3)$$

ove si è posto eguale a $\mathcal{R}$ il *raggio giratore* del corpo definito da $\mathcal{I} = M\mathcal{R}^2$.

Nota
Trascurando nella (2) il termine z^2 rispetto al termine $2lz$ e approssimando $\cos\phi$ con $1-\frac{\phi^2}{2}$, dalla (2) si ottiene la relazione:

$$z \simeq \frac{d^2}{2l}\phi^2,$$

che derivata rispetto al tempo fornisce:

$$\dot{z} \simeq \frac{d^2}{l}\phi\dot{\phi}.$$

Sostituendo le espressioni di z e $\dot{z}$ così ottenute nella (1), trascurando il termine del quart'ordine in ϕ, corrispondente all'energia cinetica del centro di massa, e derivando rispetto al tempo si ottiene l'equazione del moto:

$$\ddot{\phi} \simeq -\frac{g}{l}\frac{d^2}{\mathcal{R}^2}\phi,$$

dalla quale è immediato ottenere per il periodo di oscillazione l'espressione (3).
Come nel caso del pendolo semplice, in realtà, il periodo di oscillazione dipende dall'ampiezza dell'oscillazione. Questa dipendenza non risulta essere esprimibile tramite funzioni trascendenti note, ma può essere facilmente ricavata usando le tecniche del calcolo numerico o stimata in modo approssimato con tecniche analitiche. Un'espressione approssimata, valida a meno di termini dell'ordine di ϕ_0^4 è data da:

$$T \simeq \frac{2\pi\mathcal{R}}{d}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\frac{d^2}{l^2}\left(\frac{l^2}{d^2} + \frac{4d^2}{\mathcal{R}^2} - 3\right)\phi_0^2\right].$$

---

[1] L'energia del sistema è una costante del moto perchè la forza peso è conservativa e le forze esercitate dai fili non compiono lavoro.

∘ Momento d'Inerzia della Sbarretta

Fissate i fili al telaio in modo tale che abbiano una lunghezza di circa 60 cm e siano ad una distanza, l'uno dall'altro, eguale alla distanza delle incisioni più esterne della sbarretta. Sospesa la sbarretta, verificate che i fili siano paralleli ed abbiano la stessa lunghezza.
Servendovi degli strumenti a vostra disposizione misurate le dimensioni della sbarretta, determinate la distanza $2d$ fra i fili e la loro lunghezza l, misurata dall'asse della sbarretta al punto in cui sono fissati al telaio.
Ruotate la sbarretta di un angolo di circa $5°$, avendo cura di non variare la posizione orizzontale del centro di massa, rilasciatela e misurate il tempo che impiega a compiere una decina di oscillazioni. In questo modo otterrete una prima stima del periodo di oscillazione del sistema.
Utilizzando questa stima del periodo di oscillazione, supponendo di essere capaci di misurare intervalli di tempo con uno scarto quadratico medio di $0.05\,s$, e di voler effettuare una decina di misure, determinate il numero di oscillazioni di cui misurerete la durata per ottenere un errore relativo sul valor medio T_s del periodo circa eguale ad una parte su mille.

Nota
L'ipotesi delle piccole oscillazioni introduce un errore sistematico relativo nella determinazione del periodo di oscillazione dell'ordine di $\frac{1}{16}\frac{d^2}{l^2}(\frac{l^2}{d^2}+\frac{4d^2}{\mathcal{R}^2}-3)\phi_0^2$. Con i valori che si utilizzano per le diverse grandezze questo errore risulta essere dell'ordine di una parte su mille e risulta pertanto inutile determinare sperimentalmente il periodo con errore relativo inferiore a questo valore.

Tenete presente che il periodo di oscillazione è espresso dalla (3) solo se la sbarretta è stata rilasciata, da ferma, in modo tale che il centro di massa del sistema abbia la stessa posizione orizzontale che ha nella posizione di equilibrio.
Non essendo il sistema dotato di un dispositivo meccanico che assicuri la validità di questa condizione e dovendosi operare manualmente, può succedere che la prescritta condizione non risulti verificata causando oscillazioni irregolari della sbarretta. L'irregolarità delle oscillazioni è causata dal trasferimento di energia dal modo di oscillazione che vogliamo realizzare ai modi di oscillazione legati agli altri due gradi di libertà necessari per descrivere il sistema nel caso generale. Per evitare che le misure del periodo di oscillazione risultino falsate, non esitate a scartare le misure ottenute nelle situazioni in cui, a vostro giudizio, si sono manifestate delle anomalie nel moto di oscillazione della sbarretta.
Completata la serie delle misure, determinate il valor medio del periodo e stimatene l'errore. Utilizzando la (3) determinate il raggio giratore $\mathcal{R}_s$ e confrontatelo con il suo valore ottenuto teoricamente assimilando la sbarretta ad un cilindro omogeneo.
Ricordiamo, per comodità, che il momento d'inerzia di una sbarra cilindrica omogena, rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare all'asse di simmetria, è dato da:

$$\mathcal{I}_s = M_s(\frac{L_s^2}{12}+\frac{D_s^2}{16}), \tag{4}$$

ove si sono indicati con M_s, L_s, D_s, rispettivamente, la massa, la lunghezza ed il diametro della sbarra.

∘ Verifica del Teorema di Steiner

Misurate la massa M_s della sbarretta, la massa $2M_c$ dei due cilindri cavi, la massa M_t totale della sbarretta e dei cilindri, e le dimensioni dei cilindri.
Infilate la sbarretta nei due cilindri e posizionateli simmetricamente rispetto al centro della sbarretta. Variando la distanza fra i cilindri cavi determinate, con la stessa procedura utilizzata precedentemente, il periodo di oscillazione del sistema.

Indicato con $\mathcal{R}_t$ il raggio giratore del sistema, con i centri di massa dei cilindri cavi posti a distanza s dall'asse di rotazione, e con $\mathcal{R}_c$ il raggio giratore di ciascun cilindro, rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare all'asse del cilindro, per il teorema di Steiner deve risultare:

$$M_t\mathcal{R}_t^2 = M_s\mathcal{R}_s^2 + 2M_c\mathcal{R}_c^2 + 2M_cs^2. \tag{5}$$

Indicato con T_t il periodo di oscillazione del sistema e posto

$$k = \frac{d^2}{4\pi^2}\frac{g}{l}, \tag{6}$$

usando la (3), la (5) può essere riscritta nella forma:

$$T_t^2 = a + bs^2, \tag{7}$$

ove si è posto:

$$a = \frac{M_s\mathcal{R}_s^2 + 2M_c\mathcal{R}_c^2}{M_tk} \tag{8}$$

e

$$b = \frac{2M_c}{M_tk}. \tag{9}$$

Adattate ai risultati delle vostre misure della dipendenza di T_t^2 da s^2 una retta, ricavate i valori dei parametri a e b e dei corrispondenti errori.
Ricavando dalla (9) $2M_c$ si ottiene:

$$2M_c = bkM_t \tag{10}$$

che, per la validità del teorema di Steiner, deve risultare in accordo con il valore determinato sperimentalmente per la stessa grandezza.
Ponendo inoltre nella (8) $\mathcal{R}_s^2 = kT_s^2$, e risolvendola rispetto a $\mathcal{R}_c$ si ottiene:

$$\mathcal{R}_c = \sqrt{\frac{k}{2M_c}(aM_t - M_sT_s^2)} \tag{11}$$

che consente di ricavare il raggio giratore del cilindro cavo.
Utilizzando la (11) determinate il valore di $\mathcal{R}_c$, stimandone l'errore, e confrontatelo con il valore ottenuto teoricamente assimilando il cilindro cavo ad un tubo cilindrico omogeneo.
Ricordiamo, per comodità, che il momento d'inerzia di un tubo cilindrico omogeneo, rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare all'asse di simmetria, è dato da:

$$\mathcal{I}_c = M_c(\frac{L_c^2}{12} + \frac{D_c^2}{16} + \frac{d_c^2}{16}), \tag{12}$$

ove si sono indicati con M_c, L_c, D_c e d_c, rispettivamente, la massa, la lunghezza ed i diametri esterno e interno del tubo.

Analisi del Moto di un Sistema Ruotante

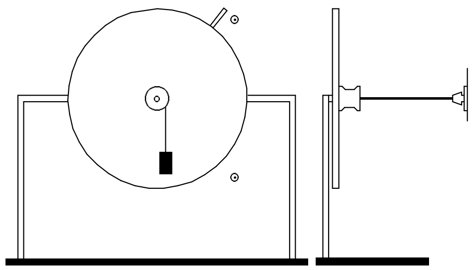
◦ Scopo dell'Esperienza

Ci si propone di studiare il comportamento di un corpo, libero di ruotare intorno ad un asse, sotto l'azione del momento di forze applicate.
L'esperienza si articola in tre fasi:

- Determinazione del momento d'inerzia del corpo utilizzando il metodo delle oscillazioni torsionali.
- Studio del moto del sistema in presenza del solo momento delle forze dissipative.
- Studio del moto del sistema in presenza di momenti di forze applicate variabili.

◦ Strumentazione a Disposizione

L'apparato sperimentale, grossolanamente schematizzato nella figura seguente, è composto da una ruota di bicicletta sostenuta da un telaio metallico e libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale. Sull'asse della ruota sono montati una puleggia ed un mandrino e sul suo cerchione, per aumentarne il momento di inerzia, è avvolto un tubo di piombo. Al telaio metallico sono fissate due fotocellule ad uguale distanza dall'asse di rotazione ed in modo tale da definire un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con l'asse. Le fotocellule sono azionate da una lamina metallica fissata al tubo di piombo e sono collegate mediante un'opportuna interfaccia alla porta giochi di un Personal Computer che, sotto il controllo di un programma, funge da sistema di acquisizione dei tempi con una precisione di circa 0.0001 s.



Un secondo mandrino è fissato al muro del laboratorio alla stessa altezza dell'asse della ruota.
Sono inoltre a disposizione una sbarretta di ottone per la determinazione del momento di inerzia con il metodo delle oscillazioni torsionali e delle masse che, infilate nella barra di un apposito supporto, possono essere utilizzate per applicare mediante un filo momenti di forze alla ruota.
Per la determinazione delle diverse grandezze da misurare nel corso dell'esperienza è a disposizione la seguente strumentazione:

- **Riga millimetrata e calibro Palmer**, per la misura della lunghezza e del diametro della sbarra sottoposta a torsione.
- **Calibro ventesimale**, per la determinazione del diametro della puleggia.
- **Bilancia elettronica** per la misure delle masse.
- **Programma PT**, della *VERNIER Software*, che viene utilizzato, con modalità diverse, per determinare gli intervalli di tempo fra successivi oscuramenti delle fotocellule.

◦ Momento d'Inerzia con il Metodo delle Oscillazioni Torsionali

In prima approssimazione, se alle due estremità piane di una sbarra cilindrica, omogenea e isotropa, si applicano sistemi di forze generanti momenti con componenti lungo l'asse della sbarra di modulo eguale a τ e di verso opposto, la sbarra risulta in equilibrio con le due estremità ruotate, l'una rispetto all'altra, di un angolo θ che soddisfa alla relazione:

$$\tau = k\theta. \tag{1}$$

Per una sbarra cilindrica, di diametro d e lunghezza l, la costante di proporzionalità k è data da:

$$k = \mu\frac{\pi}{32}\frac{d^4}{l}, \tag{2}$$

ove μ indica il modulo di elasticità tangenziale, o modulo di rigidità, del materiale di cui è composta la sbarra.
L'equazione del moto di rotazione di un corpo rigido fissato ad una estremità di una sbarra cilindrica, avente l'altra estremità fissa, attorno all'asse della sbarra è data, nei limiti di validità della (1), da:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -k\theta, \tag{3}$$

ove con $\mathcal{I}$ si è indicato il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.
Di conseguenza il moto del corpo rigido risulta essere un moto armonico di periodo dato dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{I}}{k}}, \tag{4}$$

che, noto k, consente di ricavare il momento d'inerzia $\mathcal{I}$ dalla determinazione sperimentale di T.
Si osservi che, in base alla (4), il periodo di oscillazione risulta indipendente dall'ampiezza della stessa. L'eventuale osservazione di una dipendenza del periodo di oscillazione dall'ampiezza fornisce pertanto una indicazione della non validità della (1) per deformazioni di quell'ampiezza e impedisce l'uso dei corrispondenti periodi nella (4) per la determinazione del momento d'inerzia.

- **Operazioni Preliminari**

Fissate la sbarretta ai due mandrini e determinate la lunghezza della sbarretta con la riga millimetrata ed il suo diametro con il calibro Palmer. Usate l'accortezza di centrare la lamina metallica sulla fotocellula che utilizzerete in questa fase dell'esperienza.
Calcolate il valore della costante k utilizzando la (2) e stimatene l'errore. Per il modulo di rigidità trasversale dell'ottone usate il valore $\mu = 3.53\,10^{10}\ N\,m^{-2}$.

- **Determinazione del Momento d'Inerzia**

Lanciate il programma PT e selezionate l'opzione `Miscellaneous Timing Mode` e la modalità `Pendulum Timer`, ruotate la ruota di circa un quarto di giro, rilasciatela e avviate la misura del periodo di oscillazione in modo tale che il primo oscuramento della fotocellula avvenga mentre la ruota si muove in senso orario. Arrestate la rilevazione dei tempi prima che l'oscillazione si sia completamente smorzata e registrate su un `File`[1] i risultati delle misure.
Ripetete la misura almeno altre due volte[2] nelle stesse condizioni.
Poichè i risultati che otterrete per i periodi di oscillazione conterranno indicazioni sulla dipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione, evitate di considerare il valor medio di tutti i valori ottenuti come miglior stima del periodo di oscillazione da utilizzare

[1]Tutti i `File` contenenti risultati di misure **DEVONO** essere salvati esclusivamente nella vostra `Directory` di lavoro sul disco fisso del Personal Computer che state utilizzando o su un vostro dischetto personale.

[2]Usate l'accortezza di specificare i nomi dei `File` in cui registrate i dati delle diverse misure in modo tale che la loro denominazione sia indicativa del loro contenuto. Denominateli, ad esempio: `PER_?.PT`, dove `PER` indica che contengono misure di *periodi*, `PT` indica che i dati sono stati acquisiti usando il programma PT e, al posto di `?` sostituirete `1, 2, ...`, o `A, B, ...`, per ricordare che si tratta della *prima, seconda, ...* misura.

per determinare il momento d'inerzia della ruota. Aiutandovi con dei grafici cercate di individuare, per ogni misura, l'oscillazione oltre la quale le variazioni dei periodi misurati non manifestano carattere di sistematicità, e utilizzate solo i valori misurati del periodo delle oscillazioni successive.
Assumete come miglior stima T del periodo di oscillazione il valore medio dei valori utilizzati e calcolate il loro scarto quadratico medio campionario.
Usando il valore ottenuto per la costante k e la formula:

$$\mathcal{I} = k\frac{T^2}{4\pi^2} \tag{5}$$

determinate il momento d'inerzia della ruota e stimatene l'errore.
Se volete utilizzare **ANA_DAT** per visualizzare i grafici delle misure dei periodi, tenete presente che è a vostra disposizione, in forma eseguibile, il programma `P_PT2ANA.EXE` per la conversione dei `File` generati da PT in *File Dati* di **ANA_DAT**. Per utilizzarlo immettete il comando:

`P_PT2ANA` *NomeFile*

scrivendo al posto di *NomeFile* il nome del `File` in formato PT che volete convertire. Se il `File` da convertire ha estensione `PT` non è necessario specificarla. Ad esempio, il comando:

`P_PT2ANA PER_B`

legge il `File` contenente i dati delle misure dei periodi registrati in `PER_B.PT` e crea il corrispondente *File Dati* `PER_B.DAT`.

◦ Moto in Presenza delle Sole Forze Dissipative

Dato un corpo rigido, libero di ruotare attorno ad un asse, indicati con $\mathcal{I}$ il suo momento d'inerzia rispetto all'asse e con $\mathcal{N}$ la componente del momento delle forze applicate lungo l'asse stesso, l'equazione del moto che governa la rotazione del corpo è data da:

$$\mathcal{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{N}, \tag{6}$$

che può essere riscritta nella forma:

$$\mathcal{I}\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\mathcal{I}\frac{d\omega^2}{d\theta} = \mathcal{N}, \tag{7}$$

dalla quale è immediato ottenere:

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = \mathcal{K}, \tag{8}$$

ove si è posto $\mathcal{K} = \frac{2\mathcal{N}}{\mathcal{I}}$.
Di conseguenza, se il momento risultante delle forze applicate alla ruota fosse nullo, la ruota, posta in rotazione ad un certo istante di tempo t_0 con una velocità angolare ω_0, dovrebbe continuare a muoversi sempre con la stessa velocità angolare. In realtà la ruota, per effetto di forze dissipative, che generano un momento che chiameremo $-\mathcal{N}_a$, prima o poi si arresta. Scopo di questa parte dell'esperienza è ricavare informazioni su $\mathcal{N}_a$.
Il dispositivo sperimentale misura il tempo t_i impiegato dalla ruota a descrivere un angolo di $\frac{\pi}{2}$ nell'i–esimo giro e consente di determinare facilmente la velocità angolare media $\overline{\omega}_i$ nell'intervallo di tempo t_i usando la formula:

$$\overline{\omega}_i = \frac{\pi}{2t_i}. \tag{9}$$

Risulta pertanto conveniente studiare le caratteristiche del moto analizzando la dipendenza di ω^2 da θ, utilizzando l'equazione del moto scritta nella forma (8) ove indicheremo con $-\mathcal{K}_a$ il valore di $\mathcal{K}$ corrispondente a $-\mathcal{N}_a$.

Ponendo $\mathcal{K}_a = \mathcal{K}_0$, con $\mathcal{K}_0$ costante, l'integrazione della (8) è immediata e si ottienne il risultato:

$$\omega^2 = -\mathcal{K}_0(\theta - \theta_0) + \omega_0^2, \tag{10}$$

che prevede una dipendenza lineare di ω^2 da θ per un momento costante delle forze dissipative.
L'integrazione della (8) risulta abbastanza facile anche per una dipendenza di $\mathcal{K}_a$ da ω^2 del tipo:

$$\mathcal{K}_a = \mathcal{K}_0 + a\omega^2, \tag{11}$$

con $\mathcal{K}_0$ e a costanti, e in questo caso si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{(\mathcal{K}_0 + a\omega_0^2)e^{-a(\theta-\theta_0)} - \mathcal{K}_0}{a}. \tag{12}$$

È immediato verificare che la (12) tende alla (10) nel limite in cui a tende a zero[3].

Nota

Il nostro interesse nei confronti della (11) è basato sul fatto che ci aspettiamo che il momento delle forze dissipative agenti sulla ruota sia originato dalla resistenza opposta dal mozzo e dalla resistenza opposta dall'aria.

In prima approssimazione appare sensato supporre che la resistenza opposta dal mozzo dia origine ad un contributo al momento delle forze dissipative dipendente dal peso della ruota, e di un eventuale carico, ma non dipendente dalla sua velocità angolare.

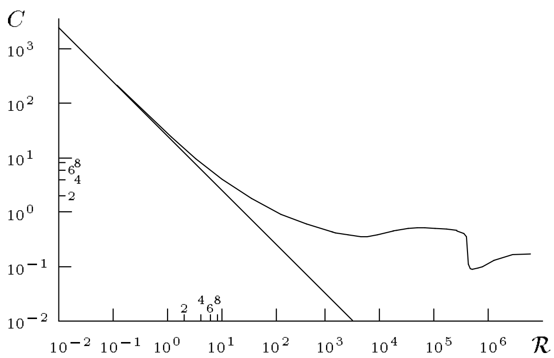
Per quanto riguarda il momento generato dalla resistenza opposta al moto dall'aria, questo sarà il momento risultante di tutte le forze esercitate dal fluido sugli elementi della ruota.

La resistenza F opposta da un fluido di densità ρ, al moto con velocità v di un corpo avente un'area S vista lungo la direzione delle velocità, è convenzionalmente espressa dalla:

$$F = CS\frac{\rho v^2}{2}, \tag{13}$$

ove C è una funzione, adimensionale, del numero di Reynolds $\mathcal{R}$ dipendente dalla forma del corpo considerato. Ricordiamo che il numero Reynolds è definito come $\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta}$ ove d indica una dimensione di riferimento del corpo e η la viscosità del fluido.

La dipendenza di C da $\mathcal{R}$ può essere determinata sperimentalmente e nella figura seguente è grossolanamente rappresentato il risultato che si ottiene per un corpo sferico.



La retta rappresenta la dipendenza di C da $\mathcal{R}$ prevista dalla legge di Stokes, $C = \frac{24}{\mathcal{R}}$, e per $\mathcal{R} < 1$ risulta in buon accordo con il risultato sperimentale. Al crescere di $\mathcal{R}$ il coefficiente C inizia a decrescere più lentamente sino a raggiungere un minimo, a $\mathcal{R} \approx 5 \cdot 10^3$, seguito da una lieve crescita e da una regione in cui si mantiene quasi costante sino ad un valore critico di $\mathcal{R}$ circa eguale a $2 \cdot 10^5$. Per valori di $\mathcal{R}$ immediatamente superiori il coefficiente C manifesta una brusca descrescita seguita da una lenta risalita. La brusca decrescita di C è dovuta al restringimento della sezione della scia dietro la sfera che si manifesta in corrispondenza del valore critico di $\mathcal{R}$. Puó essere interessante osservare che, nella regione dei numeri di Reynolds che vanno da circa 10^2 sino a circa 10^5, i valori di C manifestano variazioni estremamente contenute.

[3] Si ricordi che lo sviluppo in serie di potenze di e^{-x} è dato da: $e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! + \ldots$

L'analogia esistente fra forze, masse e velocità, nella dinamica delle traslazioni, e, rispettivamente, momenti di forze, momenti d'inerzia e velocità angolari, nella dinamica delle rotazioni, può indurci a scrivere formalmente una relazione analoga alla (13) del tipo:

$$\mathcal{K} = a\omega^2, \tag{14}$$

lasciando alla grandezza a il compito di descrivere, in modo medio, l'effetto di tutte le forze che generano momenti che si oppongono al moto in aria della ruota.
Così come il coefficiente C dipende da v ci si può attendere che a dipenda da ω. Trattare a come una costante è una pura ipotesi di comodo, la cui ragionevolezza andrà controllata verificando l'accordo fra i risultati sperimentali e le loro previsioni ottenute supponendo valida l'ipotesi.

• Operazioni Preliminari

Infilate nella barra del supporto tutte le masse a vostra disposizione e agganciate il supporto ad una estremità del filo. Passate il filo sulla puleggia, tendetelo in modo tale che le masse siano appena sospese da terra e avvolgetelo sulla puleggia, senza fissare alla stessa l'altra sua estremità. Usate l'accortezza di avvolgere strettamente le prime spire l'una sull'altra, per fare in modo che il filo si stacchi dalla puleggia solo quando le masse sono giunte in prossimità della terra.
Bloccate la ruota per impedire lo svolgimento del filo, selezionate l'opzione `Pulse Timing Mode` e la modalità `Pulse 1-2` del programma PT, e verificate, oscurando manualmente le due fotocellule, che l'avvio e l'arresto della misura del tempo corrisponda ad una rotazione della ruota di $\frac{\pi}{2}$.

• Dipendenza di ω^2 da θ

Sbloccate la ruota e avviate la misura dei tempi solo quando il filo si è staccato dalla puleggia. In questo modo registrerete solo dati relativi ad una situazione dinamica in cui la ruota si muove in presenza del solo momento delle forze dissipative. Lasciate che il programma PT continui l'acquisizione dei tempi sino all'arresto della ruota. Se la lamina metallica si dovesse arrestare fra le due fotocellule, oscurate manualmente la seconda fotocellula ed eliminate l'ultima misura. Salvate i dati misurati in un `File` nella vostra `Directory` sul disco fisso o su un vostro dischetto personale e ripetete la misura almeno una volta[4].
Non preoccupatevi di trascrivere i dati o di stamparli, otterrete qualcosa come 200 valori di tempi, ed un semplice elenco di 200 numeri ha un contenuto illustrativo dei risultati assolutamente nullo.

• Analisi dei Risultati

Per convertire i `File` generati da PT nel formato dei *File Dati* di **ANA_DAT** avete a disposizione, in forma eseguibile, il programma `R_PT2ANA.EXE` che potete utilizzare nello stesso modo con cui viene utilizzato `P_PT2ANA`.
Il programma `R_PT2ANA` utilizzando i dati contenuti nei `File` prodotti da PT genererà per ogni `File` specificato due *File Dati*:

- Il primo, avente lo stesso nome del `File` specificato, contenente i dati relativi alla dipendenza di ω^2 da θ.
- Il secondo, avente lo stesso nome del `File` specificato con l'aggiunta della lettera `A`, contenente i valori di $\frac{d\omega^2}{d\theta}$ in funzione di ω.

[4] Ricordatevi di assegnare un nome ed una estensione appropriati ai `File` contenenti i dati, una ragionevole denominazione potrebbe essere: `R?_000.PT`, ove la `R` vi ricorderà che si tratta di dati relativi alla *rotazione* della ruota, il numero `000` che i dati si riferiscono ad una massa appesa alla puleggia nulla, e l'estensione `PT` che i dati sono stati acquisiti usando PT. Al posto di `?` potreste sostituire `1, 2,...`, o `A, B,...`, per distinguere le diverse misure.

Per comodità, nel seguito indicheremo i due `File`, rispettivamente, con le denominazioni `NOME.DAT` e `NOMEA.DAT`.
Visualizzando un grafico dei dati contenuti in `NOME.DAT`, osserverete che i punti appaiono distribuiti, nel piano (θ, ω^2), lungo una linea la cui pendenza decresce in valore assoluto all'aumentare di θ. Poichè il modulo della pendenza della curva che rappresenta la dipendenza di ω^2 da θ risulta eguale a $\mathcal{K}_a$, ciò fornisce un'indicazione della diminuzione del momento delle forze dissipative all'aumentare del numero di giri, o meglio, al diminuire della velocità angolare.

a) Analisi della Dipendenza di $\frac{d\omega^2}{d\theta}$ da ω

Il grafico dei dati contenuti `NOMEA.DAT`, che rappresenta i dati nel piano $(\omega, \frac{d\omega^2}{d\theta})$, evidenzia la dipendenza di $-\mathcal{K}_a$ da ω.
Per analizzare questi dati tenete presente che il programma di conversione attribuisce ai valori calcolati un errore ottenuto considerando solo l'errore della rilevazione strumentale dei tempi, posto arbitrariamente eguale a $0.0002\,s$. Di conseguenza le stime degli errori non possono essere considerate attendibili e l'analisi dei dati dovrà anche fornire una ragionevole stima degli errori da attribuire agli stessi.
Per farlo adattate ai dati contenuti in `NOMEA.DAT` una funzione del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Se doveste constatare che l'accordo fra funzione e dati non è egualmente ragionevole per tutti i punti, avendo il processo di minimizzazione del χ^2 favorito l'accordo con pochi punti a scapito dell'accordo con gli altri, stimate, a occhio, le fluttuazioni dei punti rispetto ad una curva continua che in media, a vostro giudizio, approssima i punti misurati. Usando l'opzione `Trasformazione Dati` di **ANA_DAT** create un nuovo *File Dati* di nome `NOMEAO.DAT` eguale a `NOMEA.DAT` a parte l'errore della variabile dipendente che porrete eguale alla vostra stima fatta a occhio.
Usando `NOMEAO.DAT`, e ripetendo l'adattamento precedente, constaterete che ora è egualmente ragionevole, o irragionevole, per tutti i punti. Annotate il valore di χ^2/μ ottenuto, e usando l'opzione `Trasformazione Dati` di **ANA_DAT**, create un nuovo *File Dati* di nome `NOMEAF.DAT` eguale a `NOMEAO.DAT` a parte l'errore della variabile dipendente che porrete eguale al valore precedente moltiplicato per la radice quadrata del valore di χ^2/μ annotato.
Usando `NOMEAF.DAT`, e ripetendo l'adattamento, otterrete ora un valore di χ^2/μ eguale a 1, un valore di circa il 50% per il livello di confidenza, e delle stime per gli errori dei parametri a, b, e c che supporremo ragionevoli. Poichè dovreste ottenere un valore di b compatibile con 0 ripetete l'adattamento ponendo $b = 0$ ed impedendogli di variare.
Ripetete l'analisi utilizzando i risultati della seconda serie di misure.

b) Analisi della Dipendenza di ω^2 da θ

L'analisi precedente dovrebbe aver confermato la ragionevolezza della (11) per la dipendenza di $\mathcal{K}_a$ da ω e, di conseguenza, la dipendenza di ω^2 da θ dovrebbe essere espressa dalla (12) con i valori di $\mathcal{K}_0$ e di a eguali, rispettivamente, ai valori assoluti dei parametri c e a precedentemente determinati.
La definizione della funzione (12) è contenuta nel *File Funzioni* `RUOTA.FCN` che potete copiare nella vostra `Directory` di lavoro dalla `Directory \RUOTA` del disco fisso. Usando questa funzione analizzate i dati tenendo presente che anche in questo caso gli errori attribuiti dal programma di conversione `R_PT2ANA` non sono attendibili. Usate pertanto la stessa procedura seguita precedentemente per ricavare informazioni sugli errori, sui valori dei parametri e dei corrispondenti errori.

◦ Moto in Presenza di Forze Applicate

Se sulla ruota agiscono, oltre alle forze dissipative, delle forze che generano un momento che chiameremo $\mathcal{N}_m$ costante rispetto all'asse di rotazione, posto $\mathcal{K}_m = \frac{2\mathcal{N}_m}{\mathcal{I}}$, la (12) diviene:

$$\omega^2 = \frac{(\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_m + a\omega_0^2)e^{-a(\theta-\theta_0)} - (\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_m)}{a}. \tag{15}$$

Indicando con R il raggio della puleggia e con g l'accelerazione di gravità, un momento di forze, praticamente costante ed uguale a mgR, può essere applicato alla ruota dal filo appendendo una massa m alla sua estremità.

Nota

In realtà, anche trascurando la massa del filo, appendendo al filo una massa m il momento della forza applicata alla ruota non è mgR. È facile dimostrare che l'esatta equazione del moto della ruota è:

$$(\mathcal{I} + mR^2)\frac{d\omega}{dt} = mgR - \mathcal{N}_a, \tag{16}$$

e che il momento $\mathcal{N}_m$ della forza applicata alla ruota dal filo è dato da:

$$\mathcal{N}_m = \frac{mgR\mathcal{I} + mR^2\mathcal{N}_a}{\mathcal{I} + mR^2}. \tag{17}$$

Nel nostro caso $mR^2 \ll \mathcal{I}$ e ponendo $\mathcal{N}_m = mgR$ commettiamo un errore che non risulta apprezzabile.

In questa fase dell'esperienza ci si propone di studiare il moto della ruota appendendo masse diverse, da circa 60 g a circa 300 g al filo. Lo studio del moto consentirà di ricavare il valore della costante $\mathcal{K}_m$ per ogni massa m appesa, e, poichè risulta

$$\mathcal{K}_m = \frac{2mgR}{\mathcal{I}}, \tag{18}$$

di ottenere una stima, indipendente da quella precedente, del momento di inerzia della ruota.

Lo studio del moto della ruota sia durante la fase di discesa della massa appesa che durante la successiva fase di risalita consentirà inoltre di apprezzare l'effetto delle forze dissipative. La massa appesa si arresterà, al termine della fase di risalita, ad una quota inferiore alla quota da cui era partita.

Si tenga presente che la dipendenza di ω^2 da θ durante la fase di risalita è ancora data dalla (15), a meno di un cambiamento di segno del termine $\mathcal{K}_m$.

Se con ω_0^2 e con θ_0 indichiamo rispettivamente il quadrato della velocità angolare e l'angolo all'istante di tempo in cui il filo si è completamente svolto, l'espressione:

$$\omega^2 = \frac{(\mathcal{K}' + a\omega_0^2)e^{-a(\theta-\theta_0)} - \mathcal{K}'}{a}, \tag{19}$$

con $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_m\,\mathrm{sign}(\theta - \theta_0)$, descrive la dipendenza di ω^2 da θ sia durante la discesa della massa appesa che durante la sua risalita.

Facendo tendere a a zero la (19) si riduce a:

$$\omega^2 = -[\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_m\,\mathrm{sign}(\theta - \theta_0)](\theta - \theta_0) + \omega_0^2, \tag{20}$$

che evidenzia che i punti sperimentali dovrebbero distribuirsi nel piano (θ, ω^2) circa lungo due segmenti di retta aventi, in valore assoluto, il primo una pendenza lievemente inferiore al secondo.

• Operazioni Preliminari

Appendete ad una estremità del filo una massa di circa $300\,g$ e fissate l'altra estremità alla puleggia. Fate in modo che, quando la massa ha la minima distanza da terra, la lamina metallica fissata alla ruota sia orizzontale e stia, rispetto alla verticale, dalla parte opposta alle fotocellule. Se necessario spostate la lamina metallica.

- **Dipendenza di ω^2 da θ**

Appendete ogni massa a vostra disposizione, dopo averla misurata usando la bilancia elettronica, all'estremità libera del filo e avvolgete, a regola d'arte, il filo sulla puleggia. Realizzate il massimo numero di spire compatibile con la posizione orizzontale della lamina dalla parte opposta alle fotocellule. Da questa posizione rilasciate, da ferma, la ruota e iniziate immediatamente la misura dei tempi utilizzando PT in modalità `Pulse 1-2`. Continuate l'acquisizione dei tempi sino a quando la ruota non si arresta nuovamente, terminata la fase di risalita della massa appesa. Se la lamina metallica dovesse arrestarsi fra le due fotocellule, oscurate manualmente la seconda fotocellulla ed eliminate l'ultimo tempo misurato. Per ogni massa appesa create un `File` contenente i risultati delle misure nella vostra `Directory` di lavoro, assegnandogli un nome appropriato.
Esaurite le masse ripetete le misure almeno una volta.

- **Analisi dei Risultati**

Usando `R_PT2ANA.EXE`, convertite i `File` generati da PT in `File` aventi il formato dei *File Dati* di **ANA_DAT**.
Analizzate i dati così ottenuti per la dipendenza di ω^2 da θ utilizzando la (19), la cui definizione è contenuta nel *File Funzioni* `RUOTA.FCN`.
Nell'adattare la (19) ai dati relativi a masse appese diverse tenete fisso il parametro a attribuendogli il valore ottenuto dall'analisi del moto della ruota in presenza delle sole forze dissipative, e lasciate variare tutti gli altri parametri dopo aver loro attribuito dei ragionevoli valori iniziali.
Tenete presente che, come nel caso precedente, gli errori attribuiti da `R_PT2ANA` ai valori di ω^2 non sono attendibili, dovrete pertanto, dall'analisi dei dati, ottenere anche una ragionevole stima per questi errori.
Registrate i valori ottenuti per i parametri $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_0$, θ_0 e ω_0^2 per ogni massa appesa e per ogni serie di misure effettuate. Poichè la procedura seguita per stimare gli errori forza il valore di χ^2/μ ad assumere il valore a 1, è irrilevante specificare sia il valore di questa grandezza che, essendo noto μ, il valore del corrispondente livello di confidenza.
Annotate piuttosto il valore attribuito all'errore dei valori di ω^2.
Nel *File Funzioni* `ROUTA.FCN` è contenuta anche la definizione della funzione (20). Provate ad adattare, in qualche caso, questa funzione ai dati. Potrete apprezzare che le differenze fra dati e funzione manifestano caratteristiche di sistematicità particolarmente per i dati che si riferiscono ai maggiori valori della massa appesa.

- **Determinazione del Momento d'Inerzia**

Utilizzate i valori e gli errori di $\mathcal{K}_m$ precedentemente determinati in corrispondenza ai diversi valori di m e adattattate a questi dati una funzione del tipo αm.
Se il valore ottenuto di χ^2/μ dovesse risultare irragionevolmente grande, usando il solito procedimento, modificate gli errori attribuiti a $\mathcal{K}_m$.
La relazione (18) consente di determinare il valore di $\mathcal{I}$ dalla conoscenza della costante α, del braccio R della forza applicata e dell'accelerazione g di gravità.
Misurate con il calibro ventesimale R, utilizzate per g il valore di $9.79\, m\, s^{-2}$, determinate $\mathcal{I}$ e stimate il suo errore.

Calore Specifico di un Solido col Calorimetro delle Mescolanze

◦ Scopo dell'Esperienza

Si vogliono misurare delle quantità di calore, facendo uso di un calorimetro delle mescolanze, per determinare, in una prima fase dell'esperienza, l'equivalente in acqua del calorimetro e, in una seconda fase, il calore specifico di un campione di materiale solido omogeneo.

◦ Strumentazione a Disposizione

L'apparato sperimentale è costituito da un vaso calorimetrico (vaso *dewar*), per quanto possibile termicamente isolato dall'ambiente esterno, nel quale si utilizza come sostanza calorimetrica un liquido di calore specifico noto (acqua distillata). Nel bagno calorimetrico sono immersi un termometro, per misurare le variazioni di temperatura, ed un agitatore con reticella, usato per accelerare i processi di scambio termico e per rendere omogenea la temperatura del bagno. Nel coperchio del calorimetro è presente un foro che consente l'introduzione delle varie sostanze. Il relativo tappo fa parte della dotazione del calorimetro.
Si ha inoltre a disposizione un apparecchio di riscaldamento di Noak, munito di tappo e di termometro, che consente di riscaldare il corpo di cui si vuol misurare il calore specifico. Completano la strumentazione necessaria per eseguire l'esperienza un termometro, un cronometro digitale, una bilancia elettronica, un fornello, un thermos ed il campione del materiale di cui si vuole misurare il calore specifico.

◦ Calore Specifico di un Corpo

Considerato un sistema termodinamico, in assenza di lavoro scambiato fra il sistema e l'ambiente esterno, il primo principio della termodinamica lega la variazione dQ del calore posseduto dal sistema alla variazione dU della sua energia interna tramite la relazione

$$dQ = dU. \tag{1}$$

Il calore risulta pertanto essere una forma di energia e, nelle condizioni precedenti, quando si dice che un corpo assorbe una certa quantità di calore, si intende dire che aumenta l'energia meccanica dei moti microscopici degli atomi e delle molecole presenti nel corpo. Tale aumento di energia è associato ad un aumento della temperatura e le variazioni misurabili della temperatura possono essere utilizzate per definire la variazione di calore posseduto dal corpo.
Indicata con dT la variazione di temperatura del corpo viene definita come capacità termica, a volume costante, il fattore di proporzionalità C fra dQ e dT:

$$dQ = CdT \tag{2}$$

e, indicata con m la massa del corpo, viene definito come calore specifico la quantità:

$$c = \frac{C}{m}. \tag{3}$$

L'assegnazione del valore 1 a C per una fissata quantità di una certa sostanza ad una temperatura assegnata consente di definire l'unità di misura delle variazioni della quantità di calore. Una unità di misura della quantità di calore, molto usata nella pratica, è la quantità di calore necessaria per variare la temperatura di un kilogrammo di acqua distillata da $14.5\,°C$ a $15.5\,°C$, alla pressione costante di una atmosfera. Questa unità

viene chiamata *Kilocaloria* (*Kcal*) ed equivale in unità meccaniche del Sistema Internazionale a $4186\,J$. Questa scelta attribuisce il valore di $1 Kcal\, Kg^{-1}\,°C$ al calore specifico dell'acqua a $15\,°C$ ed alla pressione di una atmosfera.
Il calore specifico delle diverse sostanze dipende, oltre che dalla sostanza, dalla temperatura, ma tale dipendenza non è generalmente molto forte alle temperature ordinarie, per cui nella pratica, quando non si richiede una precisione elevata, si considera il calore specifico come una costante caratteristica della sostanza[1].
Ignorando la dipendenza del calore specifico dalla temperatura e integrando la (2) si ottiene la variazione finita della quantità di calore ΔQ corrispondente ad una variazione finita di temperatura ΔT:

$$\Delta Q = C\Delta T, \tag{4}$$

che è alla base dell'uso del calorimetro delle mescolanze per la determinazione del calore specifico.
Consideriamo infatti un sistema composto da una certa quantità M_1 di acqua distillata ad una temperatura iniziale T_1 ed una quantità M_2 di un'altra sostanza ad una temperatura iniziale T_2. Le due sostanze poste a contatto in un ambiente termicamente isolato variamo le loro temperature sino a raggiungere una temperatura di equilibio T_0 intermedia a T_1 e T_2. Nel corso della trasformazione la prima sostanza avrà subito una variazione di calore pari a:

$$\Delta Q_1 = c_1 M_1 (T_0 - T_1), \tag{5}$$

mentre la seconda avrà subito una variazione di calore:

$$\Delta Q_2 = c_2 M_2 (T_0 - T_2), \tag{6}$$

ove con c_1 e c_2 abbiamo indicato, rispettivamente, i calori specifici della prima e della seconda sostanza.
Poichè il sistema è termicamente isolato dovrà risultare $\Delta Q_2 = -\Delta Q_1$, ovvero:

$$c_2 M_2 (T_2 - T_0) = c_1 M_1 (T_0 - T_1). \tag{7}$$

Questa relazione consente di determinare c_2 dalla conoscenza di c_1, che vale 1 per l'acqua in forza della definizione dell'unità di calore, e dalla determinazione sperimentale delle altre grandezze che compaiono nella (7).
Per quanto un calorimetro sia ben costruito non si può ignorare che una certa quantità di calore viene scambiata fra il sistema ed il calorimetro stesso. Indicata con ΔQ_c la variazione della quantità di calore del calorimetro, corrispondente ad una variazione di temperatura $T_0 - T_1$, risulterà:

$$\Delta Q_c = C_c (T_0 - T_1), \tag{8}$$

ove con C_c si è indicata la capacità termica del calorimetro. Solitamente si preferisce specificare, invece che C_c, la massa M_c di acqua distillata a $15\,°C$ avente la stessa capacità termica del calorimetro[2], e M_c viene denominata *equivalente in acqua del calorimetro*, rappresentando la massa *fittizia* d'acqua che, in assenza di scambi di calore fra il sistema ed il calorimetro, avremmo dovuto aggiungere a M_1 per ottenere la stessa temperatura di equilibrio T_0 ottenuta in presenza di questi scambi.
Riscrivendo la (8) nella forma:

$$\Delta Q_c = c_1 M_c (T_0 - T_1), \tag{9}$$

[1] Ad esempio, per l'acqua e per il mercurio il calore specifico varia, passando da $15\,°C$ a $100\,°C$, rispettivamente dello 0.6% e dell'1.8%, crescendo per l'acqua e diminuendo per il mercurio.

[2] Si osservi che, usando come unità di misura del calore la caloria, poichè il calore specifico dell'acqua a $15\,°C$ vale 1, le quantità M_c e C_c risultano numericamente eguali.

la relazione che esprime la conservazione della quantià di calore, per il sistema composto dal fluido calorimetrico, dal corpo aggiunto e dal calorimetro, diviene:

$$c_2 M_2 (T_2 - T_0) = c_1 (M_1 + M_c)(T_0 - T_1). \tag{10}$$

◦ Equivalente in Acqua del Calorimetro

• Operazioni Preliminari

Ponete a scaldare in un opportuno recipente una quantità di acqua distillata sul fornellino sino a quando essa ha raggiunto una temperatura di circa $60 - 70\,°C$. Nel frattempo determinate la massa del calorimetro, completo di ogni sua parte, con la bilancia elettronica, e versate nel calorimetro una quantità di acqua distillata M_1, di circa $60\,g$, alla temperatura T_1 che può essere, ad esempio, la temperatura ambiente, e misurate nuovamente la massa del calorimetro contenente l'acqua per determinare, per differenza, il valore M_1 della massa dell'acqua immessa nel calorimetro. Quando l'acqua posta a riscaldare ha raggiunto la temperatura desiderata versatela nel thermos e infilate nel thermos il termometro a vostra disposizione.

• Misura dell'Equivalente in Acqua del Calorimetro

Registrate la temperatura dell'acqua nel thermos e nel calorimetro, ad esempio ogni trenta secondi, per alcuni minuti fino al momento in cui gli si verserà l'acqua più calda nel calorimetro. Al termine del periodo scelto rimuovete, delicatamente, il coperchio del calorimetro e versate rapidamente circa la metà dell'acqua del termos nel recipiente che avete usato per riscaldarla e la restante nel calorimetro avendo cura che essa non ne bagni le pareti. Annotate l'istante di tempo in cui avete effettuato l'operazione, riposizionate delicatamente il coperchio sul calorimetro e rimescolate il bagno calorimetrico mediante l'agitatore allo scopo di rendere uniforme la temperatura del bagno e ridurre al minimo il tempo necessario al raggiungimento dell'equilibrio termico.
Utilizzando il termometro inserito nel calorimetro registrate la temperatura al variare del tempo, annotandone il valore ogni trenta secondi per alcuni minuti.
Dalle misure di temperatura al variare del tempo risalite al valore delle temperature T_1 (dell'acqua fredda), T_2 (dell'acqua calda) e T_0 (della miscela) all'istante in cui è avvenuto il mescolamento. Per ottenere queste temperature, indipendentemente dalle perdite di calore verso l'ambiente, riportate su uno stesso grafico gli andamenti delle tre temperature in funzione del tempo. Estrapolando con delle rette gli andamenti misurati fino all'istante in cui avete effettuato il mescolamento è possibile stimare le tre temperature e dare una valutazione delle loro incertezze.
Misurate nuovamente la massa del calorimetro per determinare, per differenza, la massa dell'acqua calda M_2 aggiunta e utilizzate la formula:

$$M_c = M_2 \frac{T_2 - T_0}{T_0 - T_1} - M_1, \tag{11}$$

che si ricava dalla (10) ponendo $c_2 = c_1$, per determinare M_c e stimarne l'errore.

◦ Calore Specifico del Campione

• Operazioni Preliminari

Mettete a scaldare nell'apparecchio di Noak è una quantità M_2 (circa $60\,g$) di minuzzoli di rame (o perline di vetro) sino a quando viene raggiunta una temperatura compresa tra 95 e $100\,°C$. L'apparecchio di riscaldamento di Noak consente infatti di raggiungere queste temperature, senza che le sostanze vengano a contatto diretto con l'acqua bollente o con il vapore.

Nell'attesa[3] che venga raggiunta la temperatura desiderata, svuotate il calorimetro dall'acqua precedentemente utilizzata e asciugatene accuratamente le pareti. Usate la massima attenzione nello svuotare il calorimetro perchè il vaso Dewer non è solidamente fissato al contenitore.
Rimisurate la massa del calorimetro, completo di ogni sua parte, e versate nello stesso una quantità d'acqua M_1 (preferibilmente di valore vicino a quello utilizzato per la misura dell'equivalente in acqua del calorimetro) che determinerete come nel caso precedente.

- **Calore Specifico del Campione**

Come nella prima parte dell'esperienza osservate e registrate la temperatura T_1 al variare del tempo.
Prendete nota della temperatura T_2 letta sul termometro dell'apparecchio di Noak, introducete rapidamente la sostanza riscaldata nel bagno calorimetrico e, dopo aver chiuso il tappo, registrate l'istante di tempo in cui è avvenuta l'immissione del campione nel calorimetro. Servendovi dell'agitatore cercate di rendere il più rapido possibile il raggiungimento dell'equilibrio termico fra il fluido ed il campione, evitando, per eccesso di zelo, di spruzzare fluido sul coperchio del calorimetro.
Non appena la temperatura della miscela T_0 si è stabilizzata iniziate a registrare il sua andamento in funzione del tempo. Come fatto per la determinazione dell'equivalente in acqua del calorimetro ricavate i valori di T_1 e T_0 all'istante di mescolamento.
Pesate nuovamente il calorimetro per determinare, per differenza la massa M_2 del campione immesso nel calorimetro e utilizzando la relazione:

$$c_2 = \frac{M_1 + M_c}{M_2} \frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_0} \tag{12}$$

determinate il valore del calore specifico del campione e stimatene l'errore.
Se la temperatura di equilibrio del sistema dovesse risultare diversa, per più di qualche grado, dalla temperatura di equilibrio ottenuta nel corso della determinazione dell'equivalente in acqua del calorimetro, determinate nuovamente l'equivalente in acqua del calorimetro variando la massa aggiunta e la sua temperatura in modo da ottenere una temperatura di equilibrio ed un volume finale occupato nel calorimetro quanto più possibile eguali a quelli ottenuti durante la determinazione del calore specifico del campione.

Nota
Calori specifici di alcune sostanze

	T in $°C$	$cal\, g^{-1}\ °C^{-1}$		T in $°C$	$cal\, g^{-1}\ °C^{-1}$
Piombo	20	0.0306	Mercurio	20	0.0332
Piombo	-100	0.0283	Mercurio	-33.1	0.0338
Piombo	-259	0.0073	Mercurio	-43	0.0337
Vetro crown	$10 \div 50$	0.16	Stagno	18	0.0542
Vetro flint	$10 \div 50$	0.12	Rame	20	0.0921
Vetro per term.	$19 \div 100$	0.20	Ferro	20	0.107
Zinco	20	0.0925	Alluminio	20	0.214
Grafite	20	0.17	Diamante	20	0.12

Può essere interessante osservare che per i corpi solidi, a temperatura non prossima allo zero assoluto, il prodotto del calore specifico per il peso atomico è circa costante e vale pressapoco 6 $cal\,°C^{-1}$. Questa proprietà è stata scoperta empiricamente dal Doulong e Petit ed è prevista per un modello dei solidi in cui si suppone che ogni atomo sia disposto nei punti di intersezione di un reticolo spaziale e sia collegato tramite *molle* ai sui prossimi vicini.

---

[3] Per evitare perdite di tempo è opportuno inserire il campione nell'apparecchio di Noak prima di iniziare la prima fase dell'esperienza dedicata alla misura dell'equivalente in acqua del calorimetro.

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Densità di un Corpo di Forma Regolare

◦ Materiale a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Riga millimetrata			
Calibro a cursore			
Calibro Palmer			
Bilancia analitica			
Bilancia elettronica			

Caratteristiche del campione ____________________

____

◦ Volume del Campione

• Operazioni Preliminari

Verifica azzeramento degli strumenti: calibro a cursore ______ calibro Palmer ______

Formula per la determinazione del volume ____________________

Formula per l'errore nella determinazione del volume ____________________

• Dimensioni e Volume del Campione

Strumento	l_1	Δl_1	l_2	Δl_2	l_3	Δl_3	V	ΔV
Riga millimetrata								
Calibro a cursore								
Calibro Palmer								

◦ Massa del Campione

• Operazioni Preliminari

Verifica orizzontalità della bilancia $\boxed{\text{SI}}$

Formula per la determinazione del centro di oscillazione ____________________

Formula per l'errore nella determinazione del centro di oscillazione ____________________

Centro di oscillazione a piatti scarichi		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Centro di oscillazione con sovraccarico di ______ mg		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Formula per la determinazione della sensibilità ____________________

Formula per l'errore nella determinazione della sensibilità ____________________

Sensibilità a piatti scarichi ____________________

- **Massa del Campione con il Metodo della Doppia Pesata**

a) Equilibrio del Campione Posto sul Piattello di Sinistra

Elementi della massiera in *gr*			
			100
50	20	10	10
5	2	1	1
.5	.2	.1	.1
.05	.02	.01	.01
Cavaliere di Berzelius ______			
Massa totale ______			

Centro di oscillazione all'equilibrio		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Centro di oscillazione con sovraccarico di ______ *mg*		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Sensibilità a piatti carichi ______
Massa corrispondente allo spostamento del centro di oscillazione ______
Massa di equilibrio del campione posto sul piattello di sinistra ______

b) Equilibrio del Campione Posto sul Piattello di Destra

Elementi della massiera in *gr*			
			100
50	20	10	10
5	2	1	1
.5	.2	.1	.1
.05	.02	.01	.01
Cavaliere di Berzelius ______			
Massa totale ______			

Centro di oscillazione all'equilibrio		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Massa corrispondente allo spostamento del centro di oscillazione ______
Massa di equilibrio del campione posto sul piattello di destra ______

Massa del campione con il metodo della doppia pesata ______

• **Massa del Campione con il Metodo della Tara**

a) Equilibrio della Tara

Elementi della massiera in gr			
			100
50	20	10	10
5	2	1	1
.5	.2	.1	.1
.05	.02	.01	.01
Cavaliere di Berzelius ______			
Massa totale ______			

Centro di oscillazione all'equilibrio		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Centro di oscillazione con sovraccarico di ______ mg		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Sensibilità a piatti carichi ______
Massa corrispondente allo spostamento del centro di oscillazione ______
Massa di equilibrio della tara ______

b) Equilibrio della Tara con il Campione sull'altro Piattello

Elementi della massiera in gr			
			100
50	20	10	10
5	2	1	1
.5	.2	.1	.1
.05	.02	.01	.01
Cavaliere di Berzelius ______			
Massa totale ______			

Centro di oscillazione all'equilibrio		
	sinistra	destra
1		
2		
3		
Totale		
Media		
C. d. O.		
Errore		

Massa corrispondente allo spostamento del centro di oscillazione ______
Massa di equilibrio della tara con il campione sull'altro piattello ______

Massa del campione con il metodo della tara ______

• **Massa del Campione con la Bilancia Elettronica di Precisione**

Massa del campione con la bilancia elettronica di precisione ______

○ Densità del Campione

Formula utilizzata per la determinazione della densità ______
Formula utilizzata per la stima dell'errore ______

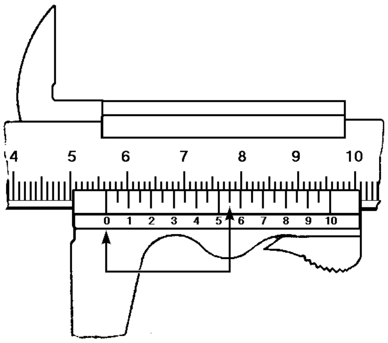
Densità ed errore con il metodo della doppia pesata ______
Densità ed errore con il metodo della tara ______
Densità ed errore con la bilancia elettr. di prec. ______

○ Utilità

• Esempio di lettura di un calibro ventesimale

a) Lettura della scala principale
Lo zero del nonio si trova fra 5.6 e 5.7 cm: la lettura è 5.6 cm.
b) Lettura della scala del nonio
La divisione del nonio coincidente con una divisione della scala principale fornisce una lettura sulla scala del nonio di 5.5, corrispondente a 0.055 cm.

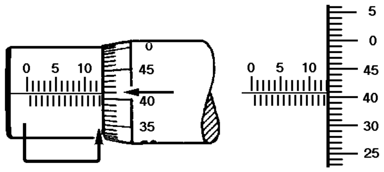
Il risultato della misura è: 5.655 cm.



• Esempio di lettura di un calibro Palmer

a) Lettura della scala sulla bussola interna
Il tamburo graduato consente di vedere il dodicesimo trattino della scala superiore e la divisione della scala inferiore immediatamente a destra. La lettura è 12.5 mm.
b) Lettura del tamburo graduato
La divisione del tamburo meglio allineata alla linea di fede fornisce la lettura 41, corrispondente a 0.41 mm.

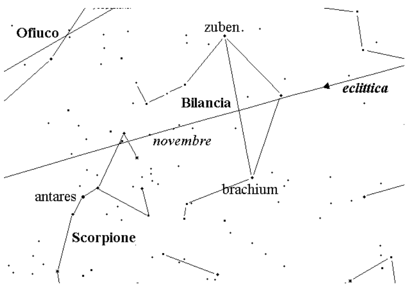
Il risultato della misura è: 12.91 mm.

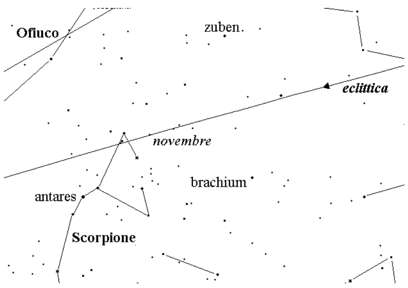


○ Curiosità

• La costellazione della Bilancia

La costellazione della bilancia è percorsa dal sole nel suo moto lungo l'eclittica fra il 31 ottobre ed il 22 novembre. Il sole risulta pertanto in considerevole ritardo rispetto alla tabella di marcia prevista dall'astrologia.
Osservando le linee che connettono le stelle più luminose della costellazione non possiamo fare a meno di riconoscere che fanno venire proprio in mente una bilancia, con il suo bel giogo e con le stelle *zuben* e *brachium* che rappresentano i coltelli cui sono sospesi i piattelli. Se rimuoviamo le linee siamo da un lato tentati di complimentarci con gli antichi astronomi per la loro immaginazione, e dall'altro stimolati a sfidarli inventando una nuova costellazione.





Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Viscosità di un Fluido con il Metodo di Stokes

◦ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Riga millimetrata			
Cronometro digitale			
Calibro Palmer			
Bilancia di Mohr Westphal			
Termometro			

◦ Operazioni Preliminari

• Predisposizione della Bilancia

Orizzontalità della bilancia $\boxed{\text{SI}}$ Azzeramento della bilancia $\boxed{\text{SI}}$

• Verifica della Taratura in Acqua Distillata

Temperatura dell'acqua ____________ $^\circ C$ Densità corrispondente ____________

Posizione dei cavalieri all'equilibrio

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/100$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lettura strumentale l_a ______ Errore della lettura strumentale Δl_a ______

	Fatt. Correttivo K	Errore ΔK
Formule		
Valori		

• Verifica dei Rapporti fra le Masse dei Cavalieri

Posizioni alternativa dei cavalieri all'equilibrio

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/100$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/100$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

◦ Densità del Fluido

Temperatura del fluido ____________ $^\circ C$

Posizione dei cavalieri all'equilibrio

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M/100$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lettura strumentale l_f ______ Errore della lettura strumentale Δl_f ______

	Densità ρ_f	Errore $\Delta \rho_f$
Formule		
Valori		

◦ Determinazione della Velocità Critica

• Misura di Spazi, Diametri e Tempi

s_A		
	d_1	t
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
m		
σ		
σ_m		

s_A		
	d_2	t
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
m		
σ		
σ_m		

s_B		
	d_1	t
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
m		
σ		
σ_m		

s_B		
	d_2	t
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
m		
σ		
σ_m		

Migliori stime delle grandezze misurate e tipo di errore (Δ per errori massimi e σ per scarti quadratici medi)

Spazi	
s_A	
s_B	
Tipo di Err. ______	

Diametri	
d_1	
d_2	
Tipo di Err. ______	

$t_{i\alpha}$	s_A	s_B
d_1		
d_2		
Tipo di Err. ______		

• Determinazione delle Velocità

$i = 1, 2$ $\alpha = A, B$		$v_{i\alpha}$ in ______	$\sigma_{v_{i\alpha}}$	$\Delta_{v_{i\alpha}}$
Formule		$s_\alpha / t_{i\alpha}$	$v_{i\alpha}\sqrt{\frac{\sigma^2_{s_\alpha}}{s^2_\alpha} + \frac{\sigma^2_{t_{i\alpha}}}{t^2_{i\alpha}}}$	$v_{i\alpha}(\frac{\Delta_{s_\alpha}}{s_\alpha} + \frac{\Delta_{t_{i\alpha}}}{t_{i\alpha}})$
d_1	s_A			
d_1	s_B			
d_2	s_A			
d_2	s_B			

• Verifica della Consistenza dei Risultati

a) Risultati dell'adattamento delle costanti v_1 e v_2, rispettivamente, a v_{1A}, v_{1B} e a v_{2A}, v_{2B}.

Costante	Valore	Errore	Liv. di Con.
v_1			
v_2			

b) Consistenza dei valori di $\tau_A = \frac{t_{2A}}{t_{1A}}$ e $\tau_B = \frac{t_{2B}}{t_{1B}}$, x indica il valore di $\frac{\tau_A - \tau_B}{\sqrt{\sigma^2_{\tau_A} + \sigma^2_{\tau_B}}}$

$\alpha = A, B$	τ_α	σ_{τ_α}
Formule	$\frac{t_{2\alpha}}{t_{1\alpha}}$	$\tau_\alpha\sqrt{\frac{\sigma^2_{t_{2\alpha}}}{t^2_{2\alpha}} + \frac{\sigma^2_{t_{1\alpha}}}{t^2_{1\alpha}}}$
τ_A		
τ_B		

x	
$1 - A(x)$	

∘ Determinazione della Viscosità

• Verifica della Consistenza dei Risultati

a) Verifica della legge di Stokes

Determinazione dei fattori $f_i = \frac{d_i^2}{v_i}$, $i = 1, 2$.

$i = 1, 2$	f_i	σ_{f_i}
Formule	$\frac{d_i^2}{v_i}$	$f_i \sqrt{\frac{4\sigma_{d_i}^2}{d_i^2} + \frac{\sigma_{v_i}^2}{v_i^2}}$
f_1		
f_2		

Risultati dell'adattamento di una costante f ai valori di f_1 e f_2.

Costante	Valore	Errore	Liv. di Con.
f			

b) Effetto delle pareti

Determinazione dei fattori $f_i = \frac{d_i^2}{(1+\frac{9}{4}\frac{d_i}{D})v_i}$, con $i = 1, 2$.

Diametro D del contenitore della glicerina ____________________

$i = 1, 2$	f_i	σ_{f_i}
Formule	$\frac{d_i^2}{(1+\frac{9}{4}\frac{d_i}{D})v_i}$	da **ANA_DAT**
f_1		
f_2		

Risultati dell'adattamento di una costante f ai valori di f_1 e f_2.

Costante	Valore	Errore	Liv. di Con.
f			

• Valore della Viscositá della Glicerina

Formula per la viscosità: ____________________

Formula per l'errore: ____________________

Valore della densità delle sfere: ____________________

Valore dell'accelerazione di gravità: ____________________

Valore del fattore f: ____________________

Valore della viscosità: ____________________

◦ Utilità

• Calcolo degli Errori

Il calcolo dell'errore associato alle diverse grandezze che vengono determinate nel corso dell'esperienza può risultare in certi casi noioso ed in altri complicato.
Per ottenere rapidamente e semplicemente i valori numerici è possibile utilizzare l'opzione `Propagazione Errori` alla sezione `Servizi` di **ANA_DAT**. A fianco è riportato un esempio di un *File Funzioni* utile allo scopo.
Tenete comunque presente che la possibilità di ottenere rapidamente e semplicemente dei valori numerici, utilizzando risorse messe a vostra disposizione, non deve farvi ritenere esonerati dall'obbligo morale di riottenere, almeno in qualche caso, i numeri calcolati dal programma come risultato di *vostre* elaborazioni analitiche seguite da un *vostro* calcolo numerico.

```
% valore e errore di un rapporto tipo x^2/a
#
a
x^2/a
x^2/a
% valore e errore della quantita' f
% x = diametro delle sfere
#
D,v
x^2/(1+9/4*x/D)/v
x^2/[(1+9/4 x/D)v]
% valore e errore della viscosita'
% x  = accelerazione di gravita',
% Rs = densita' sfere
% Rf = densita' glicerina
#
Rs,Rf,f
(Rs-Rf)*x*f/18
(Rs-Rf) x f/18
```

• Viscosità, in *poise*, di alcuni liquidi e gas a $20\,°C$

Liquidi		Gas	
Acetone	$2.92\,10^{-3}$	Aria	$.1840\,10^{-3}$
Acqua	$10.05\,10^{-3}$	Azoto	$.1823\,10^{-3}$
Glicerina	14.99	Idrogeno	$.0930\,10^{-3}$
Mercurio	$15.50\,10^{-3}$	Neon	$.3230\,10^{-3}$
Olio d'oliva	.840	Ossigeno	$.2060\,10^{-3}$

◦ Curiosità

• Caduta Libera di un Uomo

La viscosità dell'aria fa sì che esista una velocità limite anche per la caduta libera di un corpo umano. Può essere interessante sapere che la velocità limite risulta essere di circa $200\,km/h$, che non è una velocità sorprendentemente elevata. Basti pensare che, in assenza della resistenza dell'aria, un corpo per effetto dell'accelerazione di gravità raggiunge la velocità di $200\,km/h$ dopo una caduta di, circa, *soli* $150\ m$. Cadere da una quota di qualche migliaio di metri invece che di qualche centinaio di metri non aumenta, pertanto, la pericolosità della caduta.
Il fatto che una caduta risulti normalmente fatale da una quota dell'ordine della decina di metri non esclude la possibilità che, in circostanze fortunate, si possa cadere senza danno da qualche migliaio di metri.
Durante la seconda guerra mondiale, un mitragliere di coda di un bombardiere americano, che precipitava in fiamme colpito dalla caccia tedesca, non potendo raggiungere il paracadute, e preferendo una morte rapida alla certa e dolorosa morte che gli sarebbe stata causata dalle fiamme, si gettò in caduta libera fuori dall'aereo. Ebbe la ventura di cadere in una foresta innevata e la sua caduta fu prima rallentata dai rami, ricoperti di neve, di un abete secolare e poi arrestata da un cumulo di neve che ricopriva un mucchio di ramaglia. Riportò solo qualche contusione e qualche graffio!
È facile calcolare l'accelerazione costante che arresta in uno spazio di una ventina di metri un corpo che si muove inizialmente alla velocità di $200\,km/h$. Questa accelerazione risulta essere di circa $8\,g$ ed è una accelerazione sopportabile dal corpo umano (è circa pari all'accelerazione necessaria per arrestare in $1\ m$ un corpo che si muove a circa $45\ km/h$)
È anche facile verificare, utilizzando il valore della viscosità dell'aria, che la velocità limite del corpo umano in caduta libera in aria non è quella prevista dalla legge di Stokes.

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Analisi del Moto di un Corpo Sottoposto a Forze Costanti

◦ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Riga millimetrata			
Cronometro digitale			
Bilancia			

◦ Legge Oraria del Moto

• Operazioni Preliminari

Verifica orizzontalità della rotaia SI Posizionamento prima fotocellula SI

Misura della massa M del carrello __________

Massa appesa __________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

□ Utilizzare, se necessario, più righe per il medesimo spazio.

Massa appesa __________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

Massa appesa ______________________________

Spazio	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ_t	$\sigma_{\bar{t}}$

• **Determinazione della Legge Oraria**

Risultati dell'adattamento di funzioni del tipo $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ e $s = \frac{1}{2}bt^2$ ai dati della dipendenza dello spazio dal tempo per diversi valori m_i della massa appesa.

m_i	a_i	σ_{a_i}	v_{0i}	$\sigma_{v_{0i}}$	Liv. di Conf.	b_i	σ_{b_i}	Liv. di Conf.

□ Allegare qualche grafico per illustrare visivamente la qualità dell'accordo fra la funzione e i dati.

○ Dipendenza dell'Accelerazione dalla Massa Appesa

• **Un Modello Ingenuo**

Confronto fra i valori numerici ottenuti per l'accelerazione, ignorando attriti e momenti d'inerzia, con la formula:

$$a_i^{(I)} = \frac{m_i}{M + m_i} g,$$

e i valori a_i determinati sperimentalmente, e fra i corrispondenti errori

$$\Delta a_i^{(I)} = \frac{Mg}{(M + m_i)^2} \Delta m_i + \frac{m_i g}{(M + m_i)^2} \Delta M + \frac{m_i}{(M + m_i)} \Delta g,$$

e σ_{a_i}, rispettivamente, massimo e statistico.

m_i								
$a_i^{(I)}$								
$\Delta a_i^{(I)}$								
a_i								
σ_{a_i}								

• **Effetto degli Attriti**

Risultato dell'adattamento ai dati ottenuti sperimentalmente per la dipendenza dell'accelerazione a dalla massa appesa m di una funzione del tipo:

$$a = \frac{m - m_0}{M + m} g.$$

m_0	σ_{m_0}	Liv. di Conf.

□ Allegare un grafico che illustri visivamente la qualità dell'accordo fra la funzione e i dati ed evidenzi le discrepanze fra i dati ed il modello ingenuo.

• **Effetto dei Momenti di Inerzia**

Massa M_r della ruota __________ Massa M_c della carrucola __________

Massa $M' = M_r + \frac{3}{4} M_c$ aggiuntiva __________

Risultato dell'adattamento ai dati ottenuti sperimentalmente per la dipendenza dell'accelerazione a dalla massa appesa m di una funzione del tipo:

$$a = \frac{m - m_0}{M + M' + m} g.$$

m_0	σ_{m_0}	Liv. di Conf.

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Periodo di Oscillazione e Forza di Richiamo di un Pendolo Semplice

○ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Cronometro digitale			
Calibro ventesimale			
Metro a nastro			
Massiera			
Bilancia digitale			

○ Dipendenza del Periodo dalla Lunghezza

• Operazioni Preliminari

a) Stime degli errori nelle misure dei tempi e delle lunghezze

τ_i

Diametro della sfera: D ________ ΔD ________
Lunghezza del filo: f ________ Δf ________
Lunghezza del pendolo: l ________ Δl ________

Numero di oscillazioni misurate: $\mathcal{N}$ ________
Tempo medio: τ ________
Dev. standard camp. σ_τ ________
Stima di $k = \frac{\tau^2}{\mathcal{N}^2 l}$: k ________

b) Pianificazione del numero delle misure e del numero di oscillazioni

Lunghezza massima del pendolo: L ________ Numero delle misure: N ________

Valore della costante α tale che $\sqrt{\frac{3(1+\alpha^2}{N}\frac{\Delta l}{L}} = 0.001$: α ________

Valori l'_n delle lunghezze del pendolo in corrispondenza alle quali effettuare le misure, dei tempi totali τ'_n e del numero di oscillazioni $\mathcal{N}_n$ di ogni misura:

$$\tau'_n = \frac{2\sigma_\tau l'_n}{\alpha \Delta l}$$

$$\mathcal{N}_n = \frac{\tau'_n}{\sqrt{k l'_n}}$$

l'_n	τ'_n	$\mathcal{N}_n$

• **Misura delle Lunghezze e dei Tempi**

l_n	τ_n	$\mathcal{N}_n$	T_n	T_n^2	ΔT_n^2

Formula utilizzata per il calcolo dell'errore di T_n^2: ΔT_n^2 ____________________

• **Analisi dei Risultati delle Misure**

a) Risultati dell'adattamento ai dati di una funzione del tipo:

$$T^2 = kl$$

k	σ_k	Liv. di Conf.

□ Allegare un grafico per illustrare visivamente le differenze fra i valori misurati ed i valori calcolati.

b) Stima dell'accelerazione di gravità

- Usando la formula: $g = \frac{4\pi^2}{k}$

  Formula utilizzata per la stima dell'errore ____________________

  Accelerazione di gravità: g __________ Δg __________

- Usando la formula: $g = \frac{4\pi^2}{k}(1 + \frac{1}{8}\theta_0^2)$

  Ampiezza dell'oscillazione: θ_0 __________ $\Delta\theta_0$ __________

  Formula utilizzata per la stima dell'errore ____________________

  Accelerazione di gravità: g __________ Δg __________

○ Dipendenza della Forza di Richiamo dall'Angolo

• **Operazioni Preliminari**

Sistemazione dell'assetto del dispositivo SI

Massa del pendolo: M __________ ΔM __________

Massa del cestello: C __________ ΔC __________

Massa della carrucola: μ __________ $\Delta\mu$ __________

• Misura della Forza di Richiamo

Formula utilizzata per il calcolo di m_n ______________________________

Formula utilizzata per il calcolo di Δm_n ______________________________

θ_n	$\Delta\theta_n$	m_{1n}	Δm_{1n}	m_{2n}	Δm_{2n}	m_n	Δm_n

• Analisi dei Risultati delle Misure

a) Risultati dell'adattamento ai dati di una funzione del tipo:

$$y = p_1\theta(1 + p_2\theta + p_3\theta^2 + p_4\theta^3)$$

Par.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.
p_1								
p_2	0	0						
p_3	0	0	0	0				
p_4	0	0	0	0	0	0		
Liv. di Conf.								

b) Risultati con una funzione del tipo:

____

Par.	Val.	Err.
Liv. di Conf.		

c) Risultati con una funzione del tipo:

$$y = A \sin\theta$$

Par.	Val.	Err.
A		
Liv. di Conf.		

□ Allegare un grafico per illustrare visivamente l'accordo fra i valori misurati ed i valori calcolati usando le due ultime funzioni.

d) Confronto fra i valori ottenuti per i parametri delle funzioni usate ed i valori attesi in base alla legge $\frac{F}{g} = M \sin\theta$

____

____

____

____

____

◦ Utilità

• Un Programma per Tabulare la Funzione $f(\theta_0)$

La funzione $f(\theta_0)$ che rende il periodo di oscillazione di un pendolo dipendente dall'ampiezza dell'oscillazione è data da: $f(\theta_0) = \frac{2}{\pi} K(\sin^2 \frac{\theta_0}{2})$, dove $K(x)$ indica la funzione trascendente non elementare denominata *Integrale Ellittico Completo di I Specie*.
Il fatto che $K(x)$ si porti addosso un nome così altisonante non significa che sia un oggetto difficile da calcolare. La prima tabulazione di questa funzione risale al 1826 ed è dovute a Legendre. Non stentiamo ad immaginare quanto tempo sia costato a Legendre, o più probabilmente ai suoi collaboratori e/o studenti, costruire la tabulazione.
Al giorno d'oggi tale costo è ridotto ai pochi minuti necessari per scrivere un semplice programma come quello seguente, scritto in *Microsoft Quick Basic*. Il programma è stato scritto in modo da usare unicamente la forza bruta: si limita infatti a sommare i termini dello sviluppo in serie di $K(x)$ nell'intorno di $x = 0$ sino a quando l'aggiunta di un ulteriore termine è numericamente apprezzabile. A fianco del programma è riportata la tabulazione ottenuta per $f(\theta_0)$, con θ_0 compreso fra $0°$ e $87.5°$ e con un passo di $2.5°$.

```
DECLARE FUNCTION dInElCmI# (dx#)
DEFDBL D
Fmt$ = "##.#   #.########^^^^"
dPi2 = 2 * ATN(1#): dGra2Rad = dPi2 / 90
ddAng = 2.5
  FOR dAng = 0 TO 90 - ddAng STEP ddAng
  dThet = dAng * dGra2Rad
  dX = SIN(dThet / 2)
  dArg = dX * dX
  dY = dInElCmI(dArg) / dpi2
  PRINT USING Fmt$; dAng; dY
  NEXT
END

DEFLNG I
FUNCTION dInElCmI (dX)
dPi2 = 2 * ATN(1#)
dSumO = 0
i = 1: dAdd = 1: dSumN = 1
  DO WHILE dSumO <> dSumN
  dSumO = dSumN
  i2 = i + i
  dFc = (i2 - 1) / i2: dFc = dFc * dFc
  dAdd = dAdd * dFc * dX
  dSumN = dSumO + dAdd
  i = i + 1
  LOOP
dInElCmI = dPi2 * dSumO
END FUNCTION
```

0.0	0.10000000D+01
2.5	0.10001190D+01
5.0	0.10004762D+01
7.5	0.10010720D+01
10.0	0.10019072D+01
12.5	0.10029829D+01
15.0	0.10043006D+01
17.5	0.10058619D+01
20.0	0.10076690D+01
22.5	0.10097243D+01
25.0	0.10120306D+01
27.5	0.10145909D+01
30.0	0.10174088D+01
32.5	0.10204882D+01
35.0	0.10238334D+01
37.5	0.10274491D+01
40.0	0.10313405D+01
42.5	0.10355132D+01
45.0	0.10399733D+01
47.5	0.10447275D+01
50.0	0.10497830D+01
52.5	0.10551474D+01
55.0	0.10608292D+01
57.5	0.10668375D+01
60.0	0.10731820D+01
62.5	0.10798732D+01
65.0	0.10869225D+01
67.5	0.10943420D+01
70.0	0.11021449D+01
72.5	0.11103455D+01
75.0	0.11189590D+01
77.5	0.11280021D+01
80.0	0.11374926D+01
82.5	0.11474498D+01
85.0	0.11578947D+01
87.5	0.11688501D+01

• Un Suggerimento per i Pigri

Per calcolare il numero di oscillazioni da misurare $\mathcal{N}_n = \tau'_n / \sqrt{k l'_n}$, che risulta anche eguale a $2\sigma_\tau / (\alpha \Delta l) \sqrt{l'_n / k}$, si corre il rischio di appiattirsi i polpastrelli sulla tastiera della calcolatrice!
Dopo aver creato un *File Funzioni* di **ANA_DAT**, per definire la funzione riportata a lato con ovvio significato delle variabili, e aver caricato e selezionato la funzione, per calcolare $\mathcal{N}_n$ basta usare l'opzione `Propagazione Errori` per immettere una volta sola `St`, `a`, `Dl` e `k`, limitandosi a cambiare poi solo `x`.

```
#
St,a,Dl,k
2*St/a/Dl*sqr(x/k)
2 St/a/Dl sqr(x/k)
```

Se vi crea disagio usare **ANA_DAT**, tenete almeno presente che ogni calcolatrice dispone di almeno 1 memoria, che può essere utilmente usata per memorizzare valori che non cambiano.

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Misura di Momenti d'Inerzia
e
Verifica del Teorema di Steiner

∘ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Riga millimetrata			
Calibro ventesimale			
Bilancia elettronica			
Cronometro digitale			

∘ Momento d'Inerzia della Sbarretta

Dimensioni del sistema

Lunghezza della sbarra: L_s ____________ ΔL_s ____________
Diametro della sbarra: D_s ____________ ΔD_s ____________
Lunghezza dei fili: l ____________ Δl ____________
Distanza dei fili dal c.m.: d ____________ Δd ____________

Periodo di oscillazione

Oscillazioni misurate: N' ____________
Tempo impiegato: τ' ____________
Periodo stimato: T'_s ____________

Misure programmate: n ____________
Err. rel. richiesto $\frac{\delta T_s}{T_s}$ ____________

Formula utilizzata: N ____________
Oscillazioni da misurare: N ____________

Valor medio di T_{si} : T_s ____________
Scarto quadr. medio di T_{si} : $\sigma_{T_{si}}$ ____________
Scarto quadr. medio di T_s : σ_{T_s} ____________

i	τ_i	T_{si}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Raggio giratore della sbarretta

Valore sperimentale

Formula per il valore ________________________ Valore: $\mathcal{R}_s$ ____________

Formula per l'errore ________________________ Errore: $\delta\mathcal{R}_s$ ____________

Valore teorico

Formula per il valore ________________________ Valore: $\mathcal{R}_s$ ____________

Formula per l'errore ________________________ Errore: $\delta\mathcal{R}_s$ ____________

∘ Verifica del Teorema di Steiner

Dimensioni dei cilindri e masse del sistema

Lunghezza dei cilindri:	L_c	______	ΔL_c	______
Diametro esterno:	D_c	______	ΔD_c	______
Diametro interno:	d_c	______	Δd_c	______
Massa della sbarretta:	M_s	______	ΔM_s	______
Massa totale dei cilindri:	$2M_c$	______	$\Delta 2M_c$	______
Massa totale del sistema:	M_t	______	ΔM_t	______

Periodi di oscillazione

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

s ______ cm		N ______
i	τ_i	T_{ti}
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Dipendenza del periodo di oscillazione dalla distanza

s	Δs	s^2	Δs^2	T_t	σ_{T_t}	T_t^2	$\sigma_{T_t^2}$

Risultati dell'adattamento ai dati della dipendenza di T_t^2 da s^2 di una retta di equazione $y = a + bx$:

Par.	Valore	Errore
a		
b		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

☐ Allegare un grafico per illustrare l'accordo fra la funzione e i dati.

Valore della massa totale dei cilindri

Formula per k __________ Valore: k __________

Formula per l'errore __________ Errore: δk __________

Formula per $2M_c$ __________ Valore: $2M_c$ __________

Formula per l'errore __________ Errore: $\delta 2M_c$ __________

Raggio giratore del cilindro cavo

Valore sperimentale

Formula per il valore __________ Valore: $\mathcal{R}_c$ __________

Formula per l'errore __________ Errore: $\delta\mathcal{R}_c$ __________

Valore teorico

Formula per il valore __________ Valore: $\mathcal{R}_c$ __________

Formula per l'errore __________ Errore: $\delta\mathcal{R}_c$ __________

◦ Utilità

• Un Programma per Misurare Tempi

Il programma seguente, scritto in *Microsoft Quick Basic*, simula la misura di un intervallo temporale. Il programma disegna, lungo una pista orizzontale, due traguardi e un segmentino verticale che, dopo un **VIA**, inizia a muoversi. Lo scopo è quello di misurare il tempo che il segmentino mobile impiega a percorrere il tratto compreso fra i due traguardi, per farlo usate un tasto qualsiasi come pulsante del cronometro. Provate a modificare la sesta riga scrivendo `imin` al posto di `-320` e domandatevi come mai il vostro errore aumenti di più di un decimo di secondo.

```
DEFINT I-N
SCREEN 12                                   'modalita' grafica
RANDOMIZE TIMER                             'inizializzazione generatore numeri casuali
WINDOW (-320, -240)-(320, 240)              'finestra di vista
imin = -250: imax = 250                     'posizioni dei traguardi
imind = -320: imaxd = 320                   'posizioni di partenza e arrivo
DO                                          'inizio ciclo
  a$ = "": CLS
  PRINT "                    Premere un Tasto per Iniziare (F per Finire)"
  DO WHILE a$ = "": a$ = INKEY$: LOOP       'attendi la pressione di un tasto
  IF UCASE$(a$) = "F" THEN EXIT DO          'se F esci dal ciclo
  CLS: LINE (-320, -2)-(320, -2)            'disegna la pista
  LINE (imind, 0)-STEP(0, 20)               'posizione iniziale
  LINE (imin, 20)-STEP(0, 20)               'traguardo di partenza
  LINE (imax, 20)-STEP(0, 20)               'traguardo di arresto
  t0 = TIMER                                'prepara la partenza
  LOCATE 5, 36: PRINT "P R O N T I"         'dai il PRONTI
  DO WHILE TIMER - t0 < 5 + 3 * RND: LOOP   'VIA fra 5 e 8 secondi dal PRONTI
  isStart = 0: isEnd = 0                    'cronometro NON attivato
    IF INKEY$ <> "" THEN                    'se il cronometro e' avviato
      DO WHILE INKEY$ <> "": LOOP           'prima del via, segnale
      BEEP: LOCATE 5, 20                    'l'anomalia
      PRINT "NON fate partire il cronometro prima del VIA!"
      GOTO Riavvio:                         ' e ricomincia
    END IF
    FOR i = imind TO imaxd                   'inizia la corsa
      IF i = imin THEN                       'al traguardo iniziale
        LOCATE 5, 36: PRINT "   V I A    "   'da' il VIA e
        tt0 = TIMER                          'avvia il cronometro interno
      END IF
      IF i = imax THEN tt = TIMER - tt0      'arresto cronometro interno
      IF INKEY$ <> "" AND NOT isEnd THEN     'se tasto premuto meno di 2 volte
        IF isStart THEN                      'se il cronometro e' avviato
          tm = TIMER - tm0: isEnd = -1       'registra il tempo misurato
        ELSE                                 'altrimenti
          tm0 = TIMER: isStart = -1          'avvia il cronometro
        END IF
      END IF
    LINE (i, 0)-STEP(0, 20)                  'disegna la nuova posizione
    LINE (i - 1, 0)-STEP(0, 20), 0           'cancella la vecchia
    FOR j = 1 TO 5000: NEXT                  'ciclo di ritardo
  NEXT
  IF NOT isEnd THEN                          'se il cronometro NON e'
    DO WHILE INKEY$ = "": LOOP               'stato arrestato, aspetta che
    tm = TIMER - tm0                         'lo sia e registra il tempo
  END IF
  LOCATE 5, 36: PRINT "            "         'cancella il VIA
  LOCATE 18, 1                               'e scrivi i risultati
  PRINT "tempo di calcolo "; INT(tt * 100) / 100
  PRINT "tempo   misurato "; INT(tm * 100) / 100
Riavvio:
  LOCATE 20, 26                              'attendi la pressione
  PRINT "Premere un tasto per continuare"    'di un tasto per una nuova
  DO WHILE INKEY$ = "": LOOP                 'misura
LOOP                                         'fine ciclo
```

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Analisi del Moto di un Sistema Ruotante

○ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Riga millimetrata			
Calibro Palmer			
Calibro ventesimale			
Bilancia digitale			
Programma PT			

○ Momento d'Inerzia con il Metodo delle Oscillazioni Torsionali

• Operazioni Preliminari

Centratura della lamina: $\boxed{\text{SI}}$

Lunghezza della sbarra: l ________ Δl ________

Diametro della sbarra : d ________ Δd ________

Modulo di rigidità: μ ________ $\Delta \mu$ ________

Formula per il calcolo della costante: k ______________________________

Formula per il calcolo dell'errore: Δk ______________________________

Valore della costante: k ________ Δk ________

• Determinazione del Momento d'Inerzia

Valori ottenuti per i periodi T_i dell'i-esima oscillazione nelle diverse serie di misure.

Serie A				Serie B				Serie C			
1		16		1		16		1		16	
2		17		2		17		2		17	
3		18		3		18		3		18	
4		19		4		19		4		19	
5		20		5		20		5		20	
6		21		6		21		6		21	
7		22		7		22		7		22	
8		23		8		23		8		23	
9		24		9		24		9		24	
10		25		10		25		10		25	
11		26		11		26		11		26	
12		27		12		27		12		27	
13		28		13		28		13		28	
14		29		14		29		14		29	
15		30		15		30		15		30	

□ Separare con una linea i dati utilizzati per la determinazione del periodo medio.

□ Allegare dei grafici per illustrare un'eventuale dipendenza del periodo dal numero dell'oscillazione.

Periodo medio: T ________ σ_{T_i} ________ σ_T ________

Formula per il calcolo del momento d'inerzia: $\mathcal{I}$ ______________________________

Formula per il calcolo dell'errore: $\Delta \mathcal{I}$ ______________________________

Valore del momento d'inerzia: $\mathcal{I}$ ________ $\Delta \mathcal{I}$ ________

∘ Moto in Presenza delle Sole Forze Dissipative

• Dipendenza di ω^2 da θ

`Directory` nella quale sono stati registrati i dati: ______________________________
Denominazione dei `File` contenenti i dati: ______________________________

• Analisi dei Risultati

a) Analisi della Dipendenza di $\frac{d\omega^2}{d\theta}$ *da* ω

Risultati dell'adattamento ai dati della funzione: $a\omega^2 + b\omega + c$.

Serie di Misure A

Par.	Valore	Errore
a		
b		
c		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Par.	Valore	Errore
a		
b	0	0
c		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Errore attribuito ai valori di $\frac{d\omega^2}{d\theta}$: ______________

Serie di Misure B

Par.	Valore	Errore
a		
b		
c		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Par.	Valore	Errore
a		
b	0	0
c		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Errore attribuito ai valori di $\frac{d\omega^2}{d\theta}$: ______________

□ Allegare un grafico per illustrare l'accordo fra la funzione e i dati.

b) Analisi della Dipendenza di ω^2 *da* θ

Risultati dell'adattamento ai dati della funzione: $\frac{(\mathcal{K}_0 + a\omega_0^2)\, e^{-a(\theta-\theta_0)} - \mathcal{K}_0}{a}$.

Serie di Misure A

Par.	Valore	Errore
a		
$\mathcal{K}_0$		
ω_0^2		
θ_0	0	0
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Errore attribuito a ω^2 ______

Serie di Misure B

Par.	Valore	Errore
a		
$\mathcal{K}_0$		
ω_0^2		
θ_0	0	0
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Errore attribuito a ω^2 ______

□ Allegare un grafico delle differenze fra i valori di ω^2 misurati ed i valori calcolati.

○ Moto in Presenza di Forze Applicate

• Dipendenza di ω^2 da θ

`Directory` nella quale sono stati registrati i dati: ________________
Denominazione dei `File` contenenti i dati: ________________

• Analisi dei Risultati

Risultati dell'adattamento ai dati della funzione:

$$\frac{(\mathcal{K}' + a\omega_0^2)e^{-a(\theta-\theta_0)} - \mathcal{K}'}{a}, \text{ con } \mathcal{K}' = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_m \operatorname{sign}(\theta - \theta_0).$$

Serie di Misure A

	m		m		m		m		m	
Par.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.
$\mathcal{K}_m$										
a										
$\mathcal{K}_0$										
ω_0^2										
θ_0										
$\Delta\omega^2$ Attr.										

Serie di Misure B

	m		m		m		m		m	
Par.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.	Val.	Err.
$\mathcal{K}_m$										
a										
$\mathcal{K}_0$										
ω_0^2										
θ_0										
$\Delta\omega^2$ Attr.										

□ Allegare qualche grafico per illustrare visivamente l'accordo fra i valori misurati ed i valori calcolati.

• Determinazione del Momento d'Inerzia

Risultati dell'adattamento ai dati della dipendenza di $\mathcal{K}_m$ da m della funzione: αm

Serie di Misure A

Par.	Valore	Errore
α		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

Serie di Misure B

Par.	Valore	Errore
α		
χ^2/μ		
Liv. di Conf.		

□ Allegare un grafico per illustrare la dipendenza lineare di $\mathcal{K}_m$ da m.
□ Specificare, se sono stati modificati, gli errori attribuiti a $\mathcal{K}_m$.

Formula per il calcolo del momento d'inerzia: $\mathcal{I}$ ____________
Formula per il calcolo dell'errore: $\Delta\mathcal{I}$ ____________

Braccio della forza:	R	______	ΔR	______	
Accelerazione di gravità:	g	______	Δg	______	
Momento d'inerzia:	$\mathcal{I}$	______	$\Delta\mathcal{I}$	______	Serie di Misure A
	$\mathcal{I}$	______	$\Delta\mathcal{I}$	______	Serie di Misure B

∘ Utilità

• I Programmi di Conversione `P_PT2ANA` e `R_PT2ANA`

Nella `Directory RUOTA` del disco fisso sono a vostra disposizione i sorgenti `P_PT2ANA.BAS` e `R_PT2ANA.BAS`, scritti in *Microsoft Quick Basic*, dei programmi che avete usato per la conversione dei dati dal formato PT al formato **ANA_DAT**. Se vi interessa sapere come funzionano, siete autorizzati a copiarli nella vostra `Directory`, a curiosarci dentro e a modificare la vostra copia del programma.
Il programma `R_PT2ANA.BAS` contiene la `FUNCTION GasDev` che potrebbe risultarvi utile in svariate occasioni. `GasDev` partendo da numeri casuali uniformemente distribuiti fra 0 e 1, generati dalla funzione implicita `RND` del *Microsoft Quick Basic*, genera numeri casuali normalmente distribuiti a media 0 e varianza 1.

• Il Metodo di Monte Carlo

Un problema fondamentale del calcolo delle probabilità consiste nel determinare la densità di probabilità $q(y)$, di una variabile casuale Y, il cui valore y è determinato, tramite una relazione funzionale assegnata:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

dai valori x_n, con $n = 1, 2, \ldots, N$, di N variabili casuali X_n la cui legge di distribuzione è nota. Alla soluzione di questo problema è riconducibile la determinazione dell'*errore* di una grandezza derivata causato dagli *errori* delle grandezze, direttamente misurate, dalle quali la prima dipende funzionalmente. Le usuali formule della propagazione degli errori forniscono, in modo approssimato, delle informazioni su alcune caratteristiche della variabilità della grandezza derivata in termini di analoghe caratteristiche della variabilità delle grandezze misurate.
Le informazioni che le usuali formule per la propagazione dell'errore forniscono sono solo parziali e approssimate, e ciò perchè la reale natura del problema fa sì che la sua esatta soluzione, anche supponendo che le X_n siano fra di loro indipendenti, possa essere ottenuta con tecniche analitiche solo in pochi casi, in cui risultano particolarmente semplici sia le leggi di distribuzione $p_n(x_n)$ dei valori delle X_n che la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Le variabili casuali usate nei test statistici rappresentano alcuni esempi di questi pochi casi fortunati.
In tutti gli altri casi resta comunque la possibilità di usare la forza bruta per risolvere il problema. Se disponiamo di algoritmi capaci di generare numeri casuali x_n secondo le leggi di distribuzione $p_n(x_n)$, in corrispondenza a ogni N-pla generata $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ni}$, ove con i si è indicato un indice che individua la particolare N-pla, possiamo calcolare il valore $y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ni})$ della Y. Ripetendo un numero sufficiente di volte la generazione delle N-ple ed il calcolo delle y_i possiamo ottenere informazioni *sperimentali* sulla legge di distribuzione della Y.
Questa tecnica viene solitamente denominata *Metodo di Monte Carlo* in ossequio a quella che è una ben nota attività che si svolge nella capitale del principato di Monaco.
Utilizzando la `FUNCTION GasDev` potete provare ad usare il *Metodo di Monte Carlo* per costruire la legge di distribuzione di una qualsiasi funzione di variabili casuali normalmente distribuite. All'opzione `Propagazione Errori`, il programma **ANA_DAT** usa il *Metodo di Monte Carlo* per ricavare informazioni sulla legge di distribuzione dei valori di una grandezza derivata a partire dalle leggi di distribuzione delle grandezze direttamente misurate, supponendo che queste leggi di distribuzione siano, rispettivamente, la legge di distribuzione uniforme se si è specificato un errore massimo e la legge di distribuzione normale se si è specificato uno scarto quadratico medio.

Cognome	Nome	Matr.	Firma	Gruppo
				Data

Calore Specifico di un Solido col Calorimetro delle Mescolanze

◦ Strumenti di Misura a Disposizione

Strumento	Inter. di Funz.	Err. di Sens.	Unità di Misura
Termometro del calorimetro			
Termometro dell'app. di Noak			
Termometro del thermos			
Cronometro			
Bilancia digitale			

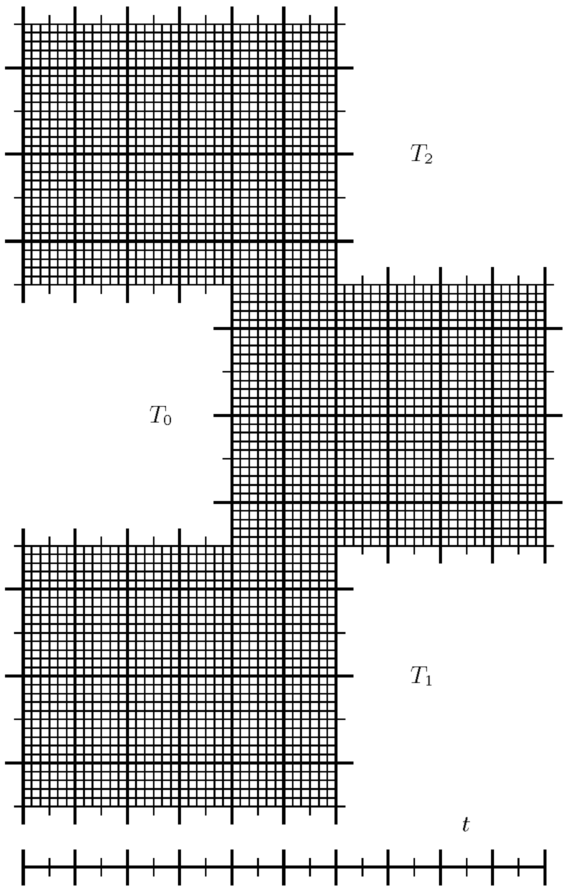
◦ Equivalente in Acqua del Calorimetro

Massa del calorimetro ________
Massa iniziale del cal. ________
Massa finale del cal. ________

min.	sec.	T_1	T_0	T_2

Massa M_1 iniziale ________
Massa M_2 aggiunta ________

Temperature al mescolamento
T_1 ________
T_2 ________
T_0 ________



Istante di mescolamento ________

Formula per l'equivalente in acqua del calorimetro: ____________________

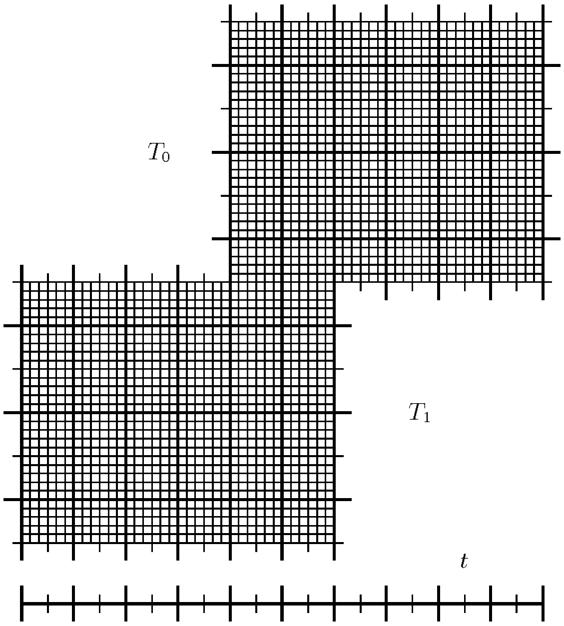
Formula per il calcolo dell'errore: ____________________

Equivalente in acqua del calorimetro: ____________________

◦ Calore Specifico del Campione

Massa del calorimetro ________
Massa iniziale del cal. ________
Massa finale del cal. ________

min.	sec.	T_1	T_0



Istante di Mescolamento ________

Temperature al mescolamento
T_1 ________
T_2 ________
T_0 ________

Massa M_1 iniziale ________
Massa M_2 del campione ________

Formula per il calore specifico: ____________________

Formula per il calcolo dell'errore: ____________________

Calore specifico del campione: ____________________