APPUNTI PER IL CORSO DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA INTRODUZIONE ALL'ANALISI COMPLESSA

Prof. Marco Boiti
(versione aprile 2001)

a.a. 2000-2001

Indice

Capitolo 1

Introduzione all'Analisi Complessa

1.1 Piano complesso

1.1.1 Numeri complessi

Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}$ delle coppie ordinate di reali $z = (x, y)$ o, ciò che è equivalente, dei punti del piano cartesiano xOy, o ancora i vettori (liberi) del piano. Due vettori $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono *uguali* e si scrive $z_1 = z_2$ se e solamente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. I vettori $z = (x, y)$ e $\overline{z} = (x, -y)$ che sono rappresentati da dei punti simmetrici rispetto all'asse x sono detti *coniugati*. Identifichiamo il vettore $(x, 0)$ al reale x; designiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme di tutti i reali (l'asse x). I reali ed essi soli sono tali che $z = \overline{z}$.

Dotiamo l'insieme $\mathbb{C}$ di una struttura di corpo. Introduciamo la somma e la moltiplicazione per uno scalare λ come in analisi vettoriale. Possiamo allora rappresentare ogni elemento $z \in \mathbb{C}$ nella forma *cartesiana*

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy \tag{1.1}$$

dove $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$ indicano rispettivamente il vettore unitario dell'asse x e dell'asse y (ometteremo nel seguito la scrittura del primo vettore unitario).

Si introducono due prodotti in analisi vettoriale, il *prodotto scalare*

$$(z_1, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{1.2}$$

ed il *prodotto vettoriale*[1]

$$z_1 \wedge z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{1.3}$$

Ora si sa che nessuno di questi prodotti soddisfa agli assiomi d'un corpo. Dobbiamo dunque definire un'altra moltiplicazione su $\mathbb{C}$. Più esattamente poniamo per definizione $i \cdot i = i^2 = -1$ e chiamiamo *prodotto* $z_1 z_2$ il vettore ottenuto moltiplicando $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2$ come dei binomi. Ossia poniamo per definizione

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.4}$$

[1] Nel caso generale il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore perpendicolare al piano individuato dai due vettori fattore. Ma nel caso di un campo vettoriale piano, che sarà il solo qui considerato, tutti i prodotti vettoriali sono collineari e dunque definiti dallo scalare (1.3).

Si noti che $i^2 = -1$ è un caso particolare della (1.4). Questo prodotto si esprime in funzione del prodotto scalare e vettoriale nel modo seguente

$$z_1 z_2 = (\overline{z}_1, z_2) + i(\overline{z}_1 \wedge z_2) \tag{1.5}$$

dove $\overline{z}_1 = x_1 - iy_1$ è il coniugato di z_1.

Diamo per noto il fatto che queste operazioni conferiscono all'insieme $\mathbb{C}$ una struttura di corpo, chiamato *corpo dei numeri complessi.* Dunque un numero complesso $z = (x, y)$ è una coppia di reali x e y chiamati rispettivamente (per rispetto alla tradizione) parte *reale* e parte *immaginaria* di z e vengono indicati con

$$x = \text{Re } z, \qquad y = \text{Im } z. \tag{1.6}$$

I numeri $z = (0, y)$ tali che Re $z = 0$ (sempre per rispetto alla tradizione) sono detti *immaginari puri.*

La rappresentazione cartesiana (1.1) si presta bene alla somma (ed alla sottrazione). Ma dalla formula (1.4) si vede che la moltiplicazione (e la divisione) danno luogo a dei calcoli assai voluminosi. Per queste operazioni (così come per l'esponenziazione e per l'estrazione di una radice) è più vantaggioso rappresentare un numero complesso nella sua forma polare

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.7}$$

che discende dalla (1.2) passando a coordinate polari. Le coordinate polari di ogni numero complesso non nullo $z = x + iy$ sono il raggio polare $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e l'angolo polare φ, cioè l'angolo fra l'asse positivo x ed il vettore z. Queste coordinate si chiamano rispettivamente *modulo* e *argomento* di z e si indicano con

$$r = |z|, \qquad \varphi = \arg z. \tag{1.8}$$

Il modulo è definito in modo unico e l'argomento a meno di $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Per semplificare la scrittura introduciamo la notazione compatta (notazione di Eulero)

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{1.9}$$

sfruttando il fatto che l'elevazione ad una potenza immaginaria non è ancore definita[2]. La formula polare (1.7) diviene allora

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.10}$$

Servendosi di formule elementari di trigonometria e della definizione della moltiplicazione (1.4) si ottiene la relazione

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.11}$$

che mette in evidenza l'adeguatezza della notazione (1.9). La relazione (1.11) mostra che quando si moltiplicano dei numeri complessi i loro moduli si moltiplicano ed i loro argomenti si sommano. È ugualmente semplice la divisione di numeri complessi messa sotto forma polare

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.12}$$

[2] Nel seguito definiremo questa operazione in generale e mostreremo che la definizione data è coerente con la (1.10).

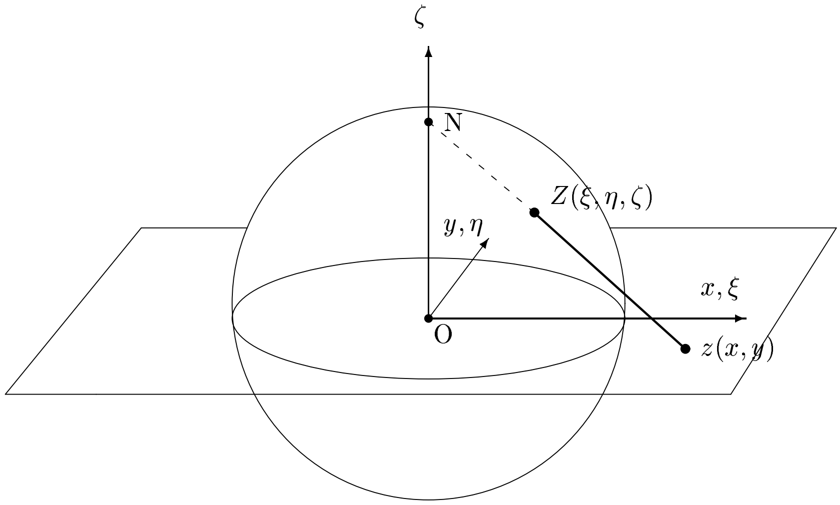


Figura 1.1: Proiezione stereografica

(a condizione naturalmente che $r_2 \neq 0$).

Osserviamo che un numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$ tramite il prodotto

$$z_0 z = w, \tag{1.13}$$

definisce un'applicazione lineare del piano complesso $z = x + iy$ nel piano complesso $w = u + iv$, che è rappresentabile utilizzando una matrice 2×2 nel modo che segue

$$\begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

È facile verificare che le matrici della forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ dotate della somma e prodotto usuale fra matrici costituiscono un corpo isomorfo al corpo dei numeri complessi.

In certi problemi risulta comodo *compattificare* l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Questa procedura consiste nell'aggiungere a $\mathbb{C}$ il *punto all'infinito* $z = \infty$. Contrariamente ai punti finiti ($z \neq \infty$) il punto all'infinito non interviene nelle operazioni algebriche. Il piano compattificato (cioè il piano $\mathbb{C}$ completato del punto all'infinito) sarà chiamato *piano chiuso* ed indicato con $\overline{\mathbb{C}}$. Il piano $\mathbb{C}$ sarà chiamato *aperto* per sottolineare la differenza.

Questa procedura di compattificazione può essere resa più suggestiva se le immagini dei punti complessi sono i punti di una sfera. A questo scopo consideriamo uno spazio euclideo dotato di un sistema di coordinate rettangolari ξ, η e ζ i cui assi ξ ed η coincidono rispettivamente con gli assi x e y del piano complesso e consideriamo la sfera unità

$$S : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1.15}$$

A ciascun punto $z(x, y) \in \mathbb{C}$ associamo il punto $Z(\xi, \eta, \zeta)$ di intersezione di S con il segmento che congiunge il "polo Nord" $N(0, 0, 1)$ di S al punto z (vedi figura 1.1)

La corrispondenza $z \to Z$ si chiama *proiezione stereografica.* Inserendo l'equazione $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1 - t$ del segmento Nz nella (1.15) si trova che $t(1 + |z|^2) = 2$ al punto Z e le equazioni della proiezione stereografica sono

$$\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}. \tag{1.16}$$

Dall'ultima equazione si deduce che $\dfrac{2}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta$ e dalle due prime le formule dell'applicazione inversa

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{1.17}$$

Si vede dalle (1.16) e (1.17) che la proiezione stereografica $z \to Z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{C}$ e $S \backslash N$ (è evidente che il punto N non è immagine di alcun punto z). Si converrà che N sia l'immagine del punto all'infinito $z = \infty$; ciò facendo si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra $\overline{\mathbb{C}}$ ed S. In generale si identifica $\overline{\mathbb{C}}$ a S e si chiama S *sfera dei numeri complessi* o *sfera di Riemann.* Si può identificare il piano aperto $\mathbb{C}$ a $S \backslash N$, cioè alla sfera S privata del polo Nord N.

1.1.2 Topologia del piano complesso

L'insieme $\mathbb{C}$ può essere munito di due metriche corrispondenti alle due rappresentazioni dei numeri complessi. La prima è la *metrica euclidea* ordinaria

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.18}$$

La seconda è la *metrica sferica*, ossia la distanza euclidea delle immagini sferiche Z_1 e Z_2 dei punti z_1 e z_2

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} \tag{1.19}$$

che, ricordando che i punti Z_1 e Z_2 giacciono sulla sfera di raggio unitario, si può riscrivere

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)}. \tag{1.20}$$

Servendosi delle formule (1.16) si trova con dei semplici calcoli che la distanza sferica $\rho(z_1, z_2)$ di due punti z_1 e z_2 di $\mathbb{C}$ è

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}. \tag{1.21}$$

Si può generalizzare la distanza all'insieme $\overline{\mathbb{C}}$ ponendo

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \tag{1.22}$$

Questa formula si ottiene dalla (1.21), per $z_1 = z$, dividendo numeratore e denominatore per $|z_2|$ e facendo tendere z_2 all'∞.

È evidente che per ogni coppia z_1, $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ si ha $\rho(z_1, z_2) \leq 2$.

È immediato verificare che entrambe le metriche muniscono l'insieme $\mathbb{C}$ di una struttura di *spazio metrico,* cioè queste metriche soddisfano agli assiomi ordinari della distanza.

Nel caso della metrica euclidea l'assioma del triangolo prende la forma classica

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.23}$$

Segnaliamo infine che le metriche euclidea e sferica sono *equivalenti* sugli insiemi $M \subset \mathbb{C}$ limitati, cioè contenuti in un disco fisso $\{|z| \leq R\}$, $R < \infty$. In effetti se $M \subset \{|z| \leq R\}$ si vede dalla (1.21) che per ogni coppia x_1, $x_2 \in M$ sia ha la doppia diseguaglianza

$$\frac{2|z_2 - z_1|}{1 + R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq 2|z_2 - z_1|. \tag{1.24}$$

Nel seguito per semplità ci limiteremo ad utilizzare la metrica euclidea. È facile tuttavia, quando sia necessario considerare anche il punto all'infinito, modificare opportunamente definizioni e dimostrazioni.

1.1.3 Cammini e curve

1.1 Definizione (Cammino)
Si chiama *cammino* γ un'applicazione continua di un intervallo $[\alpha, \beta]$ dell'asse reale t in $\mathbb{C}$. ∎

In altre parole un cammino è una funzione $z = \gamma(t)$ d'una variabile reale t a valori complessi, continua in ogni punto $t_0 \in [\alpha, \beta]$, cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno $\{t \in [\alpha, \beta] : |t - t_0| < \delta\}$ per tutti i punti t del quale si ha $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \epsilon$. I punti $a = \gamma(\alpha)$ e $b = \gamma(\beta)$ si chiamano *estremità* del cammino (a è l'origine e b è l'estremità). Un cammino è detto *chiuso* se $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Si dirà che un cammino $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *è situato* su un insieme M se $\gamma(t) \in M$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$.

È talvolta conveniente in alcune questioni distinguere la nozione di cammino da quella di curva. Per introdurre quest'ultima nozione diremo che due cammini $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ sono *equivalenti* e si indicherà $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se esiste una funzione continua strettamente crescente

$$\tau : [\alpha_1, \beta_1] \overset{\text{su}}{\to} [\alpha_2, \beta_2] \tag{1.25}$$

tale che $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ per ogni $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. È immediato verificare che questa relazione è una relazione di equivalenza, cioè che è riflessiva ($\gamma \sim \gamma$), simmetrica ($\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$) e transitiva ($\gamma_1 \sim \gamma_2$ e $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$). Si dirà che il cammino γ_2 si deduce da γ_1 tramite il cambiamento di parametro $\tau(t)$.

1.2 Definizione (Curva)
Si chiama *curva* una classe di cammini equivalenti nel senso sopra descritto. ∎

Se non è possibile nessuna confusione si intende talvolta per curva un insieme di punti $\gamma \subset \mathbb{C}$ immagine dell'intervallo $[\alpha, \beta]$ per l'applicazione continua $z = \gamma(t)$. Tuttavia bisogna sempre ricordare che una curva non è un mero insieme di punti, ma una successione di punti ordinati con continuità dai valori crescenti di un parametro.

Nel seguito avremo bisogno di imporre delle condizioni supplementari ai cammini e alle curve considerate. Si dirà che un cammino $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è un *cammino di Jordan* se l'applicazione γ è continua e biiettiva. La definizione di cammino chiuso di Jordan è lasciata al lettore.

Un cammino $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è detto *differenziabile od anche regolare* se $\gamma(t)$ ammette una derivata $\gamma'(t)$ continua in ogni punto $t \in [\alpha, \beta]$ (per derivata della funzione $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ in un punto $t_0 \in]\alpha, \beta[$ si intende $x'(t_0) + iy'(t_0)$, mentre per gli estremi si intende rispettivamente la derivata a sinistra e a destra) e se $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$.

Un cammino è *differenziabile a tratti* se la funzione $\gamma(t)$ è continua su $[\alpha, \beta]$ e se $[\alpha, \beta]$ può essere diviso in un numero finito di intervalli (chiusi) tali che la restrizione di $\gamma(t)$ a ciascuno d'essi definisce un cammino differenziabile. Un cammino è *rettificabile* se $\gamma(t)$ ammette quasi dappertutto su $[\alpha, \beta]$ una derivata $\gamma'(t)$ assolutamente integrabile, cioè se esiste

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \tag{1.26}$$

che è la *lunghezza* del cammino. Ogni cammino differenziabile a tratti è rettificabile.

Si possono imporre le medesime condizioni alle curve. Una *curva di Jordan* è la classe dei cammini equivalenti ad un cammino di Jordan (poiché i cambiamenti di parametro (1.25) sono biunivoci la proprietà di un cammino di essere di Jordan comporta quella di tutti i cammini equivalenti).

La definizione di curva differenziabile richiede alcune precisazioni. Dobbiamo definire questa nozione in modo tale che essa non sia violata quando si passa da un cammino rappresentante una curva ad un altro cammino equivalente. Poiché un cambiamento di parametro continuo e strettamente crescente (1.25) può trasformare un cammino differenziabile in uno che non lo è, la nozione di differenziabilità non è invariante per tali cambiamenti di parametro. Dobbiamo dunque imporre delle condizioni supplementari alla trasformazione (1.25).

Più esattamente si chiamerà *curva differenziabile* la classe di cammini ottenuti a partire da un cammino differenziabile mediante tutti i cambiamenti di parametro (1.25), in cui τ sia una funzione continuamente differenziabile con derivata > 0. In maniera analoga, mutatis mutandis, si definirà una *curva differenziabile a tratti* ed una curva *rettificabile.* Nel primo caso si esigerà che i cambiamenti di parametro ammissibili siano continui e posseggano dappertutto, ad eccezione di un numero finito di punti, una derivata continua e > 0 (e delle derivate a sinistra e a destra nei punti eccezionali). Nel secondo caso si esigerà che i cambiamenti di parametro siano realizzati da delle funzioni strettamente crescenti ed assolutamente continue.

Ci si servirà a volte di un'altra interpretazione della nozione di curva e si intenderà allora per curva di Jordan, curva differenziabile, curva differenziabile a tratti o curva rettificabile gli insiemi di punti $\gamma \subset \mathbb{C}$, che sono le immagini di un segmento $[\alpha, \beta]$ per delle applicazioni $z = \gamma(t)$ che definiscono rispettivamente un cammino di Jordan, un cammino differenziabile, ecc.

1.3 Definizione (Dominio)

Un dominio (o regione) D è un insieme di punti di $\mathbb{C}$ che possiede le seguenti proprietà.

a) per ogni punto $a \in D$ esiste un intorno di a contenuto in D (apertura);

b) due punti qualunque a, $b \in D$ possono essere collegati da un cammino di estremità a e b contenuto in D (connessione per archi). ∎

I punti di $\mathbb{C}$ che non appartengono a D ma che sono dei punti di accumulazione di D (cioè dei punti per cui ogni intorno contiene dei punti di D) si chiamano *punti frontiera* di D. L'insieme dei punti frontiera di D si chiama *frontiera* o *bordo* di D e si indica con ∂D. L'unione di D e della sua frontiera ∂D si chiama *aderenza* di D e si indica con $\overline{D}$. I punti di $\mathbb{C}$ non contenuti in D e che non sono punti di frontiera di D (cioè i punti dell'insieme $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ complementare di $\overline{D}$) si chiamano punti *esterni* a D. Ciascuno di questi punti possiede un intorno che non contiene punti di D.

1.4 Teorema (Chiusura della Frontiera)

La frontiera ∂D di ogni dominio D è un insieme chiuso. ∎

Dimostrazione. Sia ζ_0 un punto di accumulazione dell'insieme ∂D. Esso non può appartenere a D perché D è aperto. Quindi per dimostrare che $\zeta_0 \in \partial D$ è sufficiente dimostrare che ζ_0 è punto di accumulazione per D. Consideriamo un intorno qualunque U di ζ_0. L'intorno U contiene un punto ζ di ∂D. Per definizione di frontiera ogni intorno di ζ contiene punti di D e quindi in particolare un intorno V di ζ tale che $V \subset U$. Ma allora U contiene dei punti che appartengono a D. Ciò esprime il fatto che ζ_0 è un punto di accumulazione per D. ∎

Nel seguito imporremo alle volte delle condizioni supplementari alle frontiere dei domini considerati. Per formularle dobbiamo dapprima generalizzare la nozione di connessione già prima introdotta.

1.5 Definizione (Connessione)
Diremo che un insieme M è *connesso* se *non* può essere ripartito in due parti non vuote N_1 e N_2, ossia se non esistono due parti non vuote N_1 e N_2 tali che $M = N_1 \cup N_2$ essendo $\overline{N}_1 \cap N_2 = 0$ e $N_1 \cap \overline{N}_2 = 0$. ∎

Va notato che si richiede che nessuna delle due parti N_1 e N_2 abbia punti aderenti all'altra; non resta esclusa invece l'eventualità che sia $\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \neq 0$.

Si noti inoltre che se M è chiuso ed è ripartibile in N_1 e N_2 allora N_1 e N_2 sono necessariamente chiusi. Infatti poiché M è chiuso $\overline{N}_1 \subset M$ ed quindi, essendo $M = N_1 \cup N_2$ e $\overline{N}_1 \cap N_2 = 0$, ne segue $\overline{N}_1 = N_1$, ossia N_1 è chiuso. Analogamente per N_2.

La proprietà di un insieme espressa dalla condizione *b*) della definizione di dominio (la possibilità di collegare due punti qualunque di un insieme con un cammino contenuto interamente in questo insieme) si chiama *connessione per archi.* Si dimostra che ogni insieme connesso per archi è connesso, ma il reciproco è generalmente falso. Tuttavia queste due nozioni coincidono nel caso di insiemi aperti.

Sia M un insieme non connesso. Le più grandi parti connesse di M (cioè le parti che non sono strettamente contenute in alcuna altra parte connessa di M) si chiamano *componenti connesse* di M. Si dimostra che ogni insieme è l'unione delle sue componenti connesse (in numero finito o infinito).

Si dice che un dominio $D \subset \mathbb{C}$ è *semplicemente connesso* se il suo bordo ∂D è un insieme connesso e *molteplicemente connesso* nel caso contrario. Il numero delle componenti connesse di ∂D, se è finito, si chiama *ordine di connessione* di D. Se il numero di queste componenti è infinito il dominio si dice *infinitamente connesso.*

Si introdurranno talvolta delle condizioni di altra natura. Si dirà che un dominio D è *di Jordan* se la sua frontiera ∂D è costituita da curve di Jordan chiuse (nell'interpretazione geometrica di questa nozione). Un dominio D è *compatto* se è contenuto in un disco $\{|z| < R, R < \infty\}$. Si dirà che un insieme M *appartiene propriamente* a un dominio D se la sua aderenza $\overline{M}$ (per la topologia di $\overline{\mathbb{C}}$, cioè tenuto conto non solamente dei punti al finito ma anche del punto di accumulazione infinito di M qualora esista) appartiene a D.

L'appartenenza propria sarà designata col simbolo $\Subset$ (in modo che sia $M \Subset D$ se $\overline{M} \subset D$). Dire che un dominio D è compatto corrisponde a dire che $D \Subset \mathbb{C}$.

È utile il seguente teorema e soprattutto il suo corollario 1.10 riportato nella sezione 1.2.

1.6 Teorema (Parte non Vuota)

Siano $M \subset \mathbb{C}$ un insieme connesso e N una parte non vuota di M. Se N è contemporaneamente chiuso ed aperto rispetto alla topologia indotta[3] *da $\mathbb{C}$ su M allora $M = N$.* ∎

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'insieme $N' = M \backslash N$ non sia vuoto. Utilizziamo dapprima l'ipotesi che N è chiuso. Notiamo che, se un punto è di accumulazione di N

[3] Si chiama topologia indotta su un insieme $M \subset \mathbb{C}$ una topologia per la quale gli intorni dei punti sono le intersezioni con M degli intorni di questi medesimi punti per la topologia di $\mathbb{C}$.

per la topologia di M lo è anche per la topologia di $\mathbb{C}$ e che se è punto di accumulazione solo rispetto a $\mathbb{C}$ ammette un intorno che non contiene punti di M e quindi non appartiene ad M. Quindi l'aderenza $\overline{N}$ per la topologia di $\mathbb{C}$ è composta dei punti dell'aderenza $(\overline{N})_M$ per la topologia di M e di un insieme (eventualmente vuoto) di punti non appartenenti ad M. Dunque $\overline{N} \cap N' = (\overline{N})_M \cap N'$ e poiché N è chiuso per la topologia di M allora $(\overline{N})_M = N$ e di conseguenza $\overline{N} \cap N' = N \cap N'$, che è vuoto.

Ma poiché N è anche aperto per la topologia di M, il suo complementare N' è chiuso per questa topologia (i punti di accumulazione di N' non possono appartenere ad N perché è aperto e dunque appartengono a N'). Si può di conseguenza applicare ad N' le medesime considerazioni fatte per N e concludere che $\overline{N'} \cap N = 0$. Ma ciò, poiché abbiamo sopra dimostrato che $\overline{N} \cap N' = 0$, contraddice la definizione di connessità di M. ∎

1.1.4 Problemi

1. Esprimere ciascuno dei seguenti numeri complessi in forma polare esponenziale.
$$1, \quad -i, \quad 1+i, \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2. Esprimere ciascuno dei seguenti numeri complessi nella forma $a+ib$ con a e b reali.
$$e^{2+i\pi/2}, \quad \frac{1}{1+i}, \quad (1+i)^3, \quad |3+4i|, \quad \cos(i\pi/4+c) \text{ con } c \text{ reale.}$$

3. Trovare le radici delle seguenti equazioni.
$$z^3 = 4, \quad z^4 = -1, \quad (az+b)^3 = c \text{ con } a,b,c>0, \quad z^4+2z^2+2=0.$$

4. Verificare i seguenti risultati.
$$\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \quad |z-w| \le |z|+|w|, \quad z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z,$$
$$\mathrm{Re}\,z \le |z|, \quad |w\overline{z}+\overline{w}z| \le 2|wz|, \quad |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

5. Disegnare le regioni associate alle seguenti diseguaglianze. Determinare se la regione è aperta, chiusa, limitata o compatta.
$$|z| \le 1, \quad |2z+1+i| < 4, \quad \mathrm{Re}\,z \ge 4,$$
$$|z| \le |z+1|, \quad 0 < |2z-1| \le 2.$$

6. Disegnare le seguenti regioni. Determinare se sono connesse e qual'è la loro chiusura se non sono chiuse.
$$0 < \arg z \le \pi, \quad 0 \le \arg z < 2\pi, \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \quad \mathrm{Im}\,z > 0,$$
$$\mathrm{Re}\,(z-z_0) > 0 \text{ e } \mathrm{Re}\,(z-z_1) < 0 \text{ per due numeri complessi } z_0, z_1,$$
$$|z| < \frac{1}{2} \text{ e } |2z-4| \le 2.$$

7. Usare la formula di Eulero per l'esponenziale e le ben note espansioni in serie per le funzioni reali e^x, $\sin y$ e $\cos y$ per mostrare che
$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}.$$

Suggerimento: Utilizzare

$$(x+iy)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x^j \, (iy)^{k-j} \; .$$

8. Utilizzare la relazione

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1} e^{ix_2}$$

con x_1, x_2 reali per dedurre le formule trigonometriche

$$\begin{aligned} \sin(x_1+x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1+x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 . \end{aligned}$$

9. A quali curve sulla sfera stereografica corrispondono le rette $x = 0$ e $y = 0$?

10. Descrivere le curve sulla sfera stereografica che corrispondono ad una retta qualunque sul piano.

11. Mostrare che a un circolo sulla sfera stereografica corrisponde un circolo sul piano.

1.2 Funzioni di una variabile complessa

1.2.1 Nozione di funzione

1.7 Definizione (Funzione)
Si dice che una *funzione* f è definita su un insieme $M \subset \mathbb{C}$ se è data una legge che a ciascun punto $z \in M$ associa un numero complesso w

$$f : M \to \mathbb{C} \quad \text{dove} \quad w = f(z). \tag{1.27}$$

■

Secondo questa definizione ogni funzione è univoca (introdurremo più in là la nozione di funzione multivoca). Si richiederà a volte che la funzione sia biunivoca. Si dice che una funzione $f : M \to \mathbb{C}$ è *biunivoca* o *iniettiva* se trasforma punti distinti di M in punti distinti di $\mathbb{C}$, ossia se essendo z_1 e z_2 due punti di M l'eguaglianza $f(z_1) = f(z_2)$ implica l'eguaglianza $z_1 = z_2$.

Se si separa in f ed in z la parte reale ed immaginaria scrivendo $f = u + iv$ e $z = x + iy$ l'assegnazione di $f : M \to \mathbb{C}$ equivale a quella dell'applicazione vettoriale

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned} , \tag{1.28}$$

di $M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se $f \neq 0$ e si scrive $f(z) = \rho e^{i\psi}$, si può rappresentare l'applicazione f con le due relazioni

$$\rho = \rho(z), \quad \psi = \psi(z) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \tag{1.29}$$

Nei punti in cui la funzione f è nulla lo è anche ρ, mentre ψ non è definita.

1.8 Definizione (Limite)
Sia f una funzione definita nell'intorno di un punto $a \in \mathbb{C}$. Si dice che $A \in \mathbb{C}$ è il *limite* della funzione f per z che tende ad a e si scrive

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \tag{1.30}$$

se per ogni intorno U_A del punto A esiste un intorno U_a di a tale che per ogni $z \in U_a$ si ha $f(z) \in U_A$. Ossia per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che la diseguaglianza

$$|z - a| < \delta \tag{1.31}$$

implichi

$$|f(z) - A)| < \epsilon. \tag{1.32}$$

■

Se $a = \infty$, $A \neq \infty$ la definizione di limite si riformula sostituendo le diseguaglianze (1.31) e (1.32) rispettivamente con $|z| > \delta$ e $|f(z) - A| < \epsilon$. I casi $a \neq \infty$, $A = \infty$ e $a = A = \infty$ sono lasciati al lettore. È possibile anche riformulare la definizione di limite utilizzando la distanza ρ sulla sfera stereografica. Non è allora necessario considerare a parte i casi $a = \infty$ e $A = \infty$.

Se poniamo $f = u + iv$, $A = A_1 + iA_2$ ci convinciamo immediatamente che l'uguaglianza (1.30) equivale alle uguaglianze reali

$$\lim_{z \to a} u(z) = A_1, \quad \lim_{z \to a} v(z) = A_2. \tag{1.33}$$

Se inoltre ammettiamo che sia $A \neq 0$ e scegliamo convenientemente i valori di $\arg f$ si può scrivere la (1.30) in coordinate polari

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = |A|, \quad \lim_{z \to a} \arg f(z) = \arg A. \tag{1.34}$$

Poiché la definizione del limite di una funzione è simile a quella del caso reale e poiché le operazioni algebriche sui numeri complessi obbediscono alle medesime leggi valide per i numeri reali, i teoremi elementari sui limiti di una funzione in un punto (limite di una somma, ecc.) si estendono automaticamente ai numeri complessi e noi quindi trascureremo gli enunciati e le dimostrazioni.

In certi casi si parlerà del limite di una funzione in rapporto ad un insieme. Siano dati un insieme M con un punto di accumulazione a ed una funzione f il cui insieme di definizione contiene M. Si dirà che f tende verso A quando z tende verso a in rapporto ad M, e si scriverà

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in M}} f(z) = A, \tag{1.35}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in M$ tale che $|z - a| < \delta$ si ha $|f(z) - A)| < \epsilon$.

1.9 Definizione (Continuità)
Sia f una funzione definita nell'intorno di un punto $a \in \mathbb{C}$; si dirà che f è *continua nel punto* a se esiste il limite

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a). \tag{1.36}$$

■

Per le ragioni già richiamate, i teoremi elementari relativi alle funzioni continue in un punto (continuità di una somma, ecc.) si estendono *ad litteram* all'analisi complessa, sotto riserva che la continuità sia una $\mathbb{C}$–continuità.

Si può egualmente parlare della continuità in un punto a in rapporto ad un insieme M se a è un punto di accumulazione di M ed il limite del primo membro della (1.36) è un limite in rapporto ad M. Una funzione continua in ciascun punto di un insieme M si dice *continua su* M. In particolare se f è continua in ciascun punto di un dominio D essa è detta *continua in* D (in questo caso è continua in ciascun punto di D nel senso della definizione precedente di continuità, perché ciascun punto z è contenuto in D con uno dei suoi intorni).

Segnaliamo le proprietà delle funzioni $\mathbb{C}$–continue su degli insiemi $\mathbb{C}$–chiusi $K \subset \mathbb{C}$.

1. Ogni funzione f continua su un insieme K è limitata (cioè esiste una costante A tale che $|f(z)| \leq A$ per ogni $z \in K$).

2. Ogni funzione f continua su un insieme K raggiunge i suoi limiti superiore ed inferiore su K (cioè esistono dei punti z_1, $z_2 \in K$ tali che $|f(z)| \leq |f(z_1)|$, $|f(z)| \geq |f(z_2)|$ per ogni $z \in K$.

3. Ogni funzione f continua su un insieme K è uniformemente continua (cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ purché z_1, $z_2 \in K$ e $|z_1 - z_2| < \delta$).

Queste proprietà si provano esattamente come nel caso reale e trascureremo la loro dimostrazione.

Inoltre utilizzeremo spesso nel seguito il seguente corollario del teorema 1.6.

1.10 Corollario (Costanza locale)

Siano $M \subset \mathbb{C}$ un insieme connesso ed f una funzione continua su M (o $\overline{M}$). Se f è localmente costante su M, ossia se ogni punto di M ammette un intorno, rispetto alla topologia indotta su M da $\mathbb{C}$, in cui f è identicamente costante, allora f è identicamente costante su tutto M (o $\overline{M}$).

Dimostrazione. Sia c il valore assunto da f in un punto z di M. Consideriamo l'insieme N di tutti i punti di M per cui $f = c$. N è aperto rispetto alla topologia indotta su M, perché f è localmente costante. Consideriamo ora un punto z_0 di accumulazione di N rispetto alla topologia indotta su M. Esso appartiene ad M e può essere considerato limite di una successione di Cauchy $\{z_n\}$ di punti di N. Per la continuità della f su M è $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$ e poiché $f(z_n) = c$ abbiamo che $z_0 \in N$ e quindi N è chiuso. Dal teorema 1.6 segue che $N = M$, cioè $f \equiv c$ su M. Se in aggiunta f è continua su $\overline{M}$, allora per continuità è identicamente costante anche su $\overline{M}$. ∎

1.2.2 Differenziabilità

Poiché questa importante nozione è legata alla linearità, cominceremo col definire le funzioni lineari di una variabile complessa.

1.11 Definizione (Linearità)

Una funzione $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si chiama $\mathbb{R}$–*lineare* o rispettivamente $\mathbb{C}$–*lineare* se

a) $l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2)$ per ogni z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ e se per tutti i $z \in \mathbb{C}$

b) $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ o rispettivamente

b') $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. ∎

Dunque le funzioni $\mathbb{R}$–lineari sono lineari sul corpo $\mathbb{R}$ dei reali e quelle $\mathbb{C}$–lineari sono lineari sul corpo $\mathbb{C}$ dei complessi; poiché la condizione b') è più forte della condizione b) le funzioni $\mathbb{C}$–lineari formano un sottoinsieme delle funzioni $\mathbb{R}$–lineari.

Stabiliamo la forma generale delle funzioni $\mathbb{R}$–lineari. Ponendo $z = x + iy$ ed utilizzando le proprietà a) e b) si ha per ogni funzione l $\mathbb{R}$–lineare: $l(z) = xl(1)+yl(i)$. Poniamo $l(1) = \alpha$, $l(i) = \beta$ e notiamo che $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$; delle trasformazioni semplici ci conducono al

1.12 Teorema ($\mathbb{R}$–linearità)

Ogni funzione $\mathbb{R}$–lineare è della forma

$$l(z) = az + b\overline{z}, \tag{1.37}$$

dove $a = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$ e $b = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$, con $\alpha = l(1)$ e $\beta = l\,(i)$, sono delle costanti complesse. ∎

In maniera analoga dall'uguaglianza $z = z \cdot 1$ si deduce grazie alla proprietà b') il

1.13 Teorema ($\mathbb{C}$–linearità)

Ogni funzione $\mathbb{C}$–lineare è della forma

$$l(z) = az, \tag{1.38}$$

dove $a = l(1)$ è una costante complessa.

1.14 Proposizione

Perché una funzione $\mathbb{R}$–lineare sia $\mathbb{C}$–lineare è necessario e sufficiente che

$$l(iz) = il(z). \tag{1.39}$$

∎

Dimostrazione. Che la condizione sia necessaria è evidente. Dal teorema 1.12 si ha $l(z) = az + b\overline{z}$, dunque $l(iz) = i(az - b\overline{z})$ e $il(z) = i(az + b\overline{z})$; se la (1.39) è soddisfatta allora $2b\overline{z} = 0$ e quindi $b = 0$, cioè l è una funzione $\mathbb{C}$–lineare. ∎

Ponendo $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $z = x + iy$ e $w = u + iv$ e separando le parti reali ed immaginarie, si può mettere la funzione $\mathbb{R}$–lineare $w = az + b\overline{z}$ nella forma

$$u = (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y \tag{1.40}$$

$$v = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y. \tag{1.41}$$

Dunque geometricamente una funzione $\mathbb{R}$–lineare si riconduce ad una trasformazione affine del piano di Jacobiano

$$J = a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 = |a|^2 - |b|^2. \tag{1.42}$$

Questa trasformazione è regolare per $|a| \neq |b|$; essa invia rette in rette, rette parallele in rette parallele e quadrati in parallelogrammi. Essa conserva l'orientamento per $|a| > |b|$ e lo modifica per $|a| < |b|$.

Le applicazioni $\mathbb{C}$–lineari $w = az$ non possono modificare l'orientamento perché il loro Jacobiano $J = |a|^2 \geq 0$; esse sono regolari per $a \neq 0$. Ponendo $a = |a|e^{i\alpha}$ e ricordandosi il significato geometrico della moltiplicazione dei numeri complessi si vede che le applicazioni $\mathbb{C}$–lineari regolari

$$w = |a|e^{i\alpha}z \tag{1.43}$$

si riconducono ad un'omotopia piana di rapporto $|a|$ seguita da una rotazione piana d'angolo α, cioè ad una similitudine di rapporto $|a|$ e di angolo α. Queste applicazioni conservano gli angoli e mandano quadrati in quadrati.

Passiamo alla nozione di differenziabilità. Dire che una funzione è differenziabile corrisponde a dire che è possibile approssimare il suo incremento con un'applicazione lineare, chiamata differenziale della funzione. La possibilità di introdurre due diverse forme di linearità ci conduce a due nozioni di differenziabilità.

1.15 Definizione ($\mathbb{R}$–differenziabilità)
Fissiamo un punto $z \in \mathbb{C}$ ed un suo intorno U; si dice che una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$–*differenziabile* nel punto z se il suo incremento in questo punto è rappresentato nella forma

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = l(\Delta z) + o(\Delta z), \tag{1.44}$$

dove l è una funzione $\mathbb{R}$–*lineare* a z fisso e $o(\Delta z)$ un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δz, cioè $o(\Delta z)/\Delta z \to 0$ quando $\Delta z \to 0$. La funzione l si chiama il *differenziale* di f in z e si indica con df. ■

L'incremento di una funzione $\mathbb{R}$–differenziabile è per il teorema 1.12 della forma

$$\Delta f = a\Delta z + b\overline{\Delta z} + o(\Delta z). \tag{1.45}$$

Scegliendo $\Delta z = \Delta x$ (in modo che $\overline{\Delta z} = \Delta x$), dividendo per Δx e facendo tendere Δx a zero si ottiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = a + b. \tag{1.46}$$

In maniera analoga scegliendo $\Delta z = i\Delta y$ (in modo che $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$) e facendo tendere Δy a zero si ottiene

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = a - b, \tag{1.47}$$

da cui

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Quindi la $\mathbb{R}$–differenziabilità implica la derivabilità della f rispetto a x ed a y.

Se, tramite le equazioni

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \tag{1.48}$$

le due variabili x e y sono interpretate come funzioni delle due variabili considerate indipendenti z e $\overline{z}$, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{1.49}$$

che sono a volte chiamate *derivate formali* della funzione f in z. È Riemann il primo che le ha messe in evidenza nel 1851.

Servendosi delle relazioni evidenti $dz = \Delta z$ e $d\overline{z} = \Delta\overline{z}$ si ottiene quindi per il differenziale di una funzione $\mathbb{R}$–differenziabile

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \tag{1.50}$$

e separando la parte reale ed immaginaria

$$df = du + idv \tag{1.51}$$

dove

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{1.52}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy. \tag{1.53}$$

Perciò risultano $\mathbb{R}$–differenziabili in z tutte e sole le funzioni $f = u + iv$ con u e v funzioni delle variabili reali x e y che possiedono dei differenziali ordinari in questo punto.

Quindi la nozione di $\mathbb{R}$–differenziabilità non porta essenzialmente niente di nuovo rispetto a quanto studiato in analisi delle funzioni vettoriali. L'elemento nuovo è invece la $\mathbb{C}$–differenziabilità, che è di fatto il punto di partenza dell'analisi complessa.

1.16 Definizione ($\mathbb{C}$–differenziabilità)
Fissiamo un punto $z \in \mathbb{C}$ ed un suo intorno U; si dice che una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$–*differenziabile* nel punto z se il suo incremento in questo punto è rappresentato nella forma

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = l(\Delta z) + o(\Delta z), \tag{1.54}$$

dove l è una funzione $\mathbb{C}$–*lineare* a z fisso e $o(\Delta z)$ un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δz, cioè $o(\Delta z)/\Delta z \to 0$ quando $\Delta z \to 0$. ■

Il differenziale di una funzione f che sia $\mathbb{C}$–differenziabile è per il teorema 1.13 della forma

$$df = adz. \tag{1.55}$$

Naturalmente se f è $\mathbb{C}$–differenziabile è a maggior ragione $\mathbb{R}$–differenziabile. Quindi confrontando questa formula con la formula (1.50) otteniamo il seguente teorema.

1.17 Teorema ($\mathbb{C}$–differenziabililtà. Versione $\overline{\partial}$)

Una funzione f, che sia $\mathbb{R}$–differenziabile, è $\mathbb{C}$–differenziabile se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{1.56}$$

■

Se $f = u + iv$ la formula (1.49) ci dà

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.57}$$

e dunque l'eguaglianza complessa (1.56) può essere scritta sotto la forma di due eguaglianze reali e si ottiene il seguente teorema equivalente.

1.18 Teorema ($\mathbb{C}$–differenziabililtà. Versione Cauchy–Riemann)
Una funzione f, che sia $\mathbb{R}$–differenziabile, è $\mathbb{C}$–differenziabile se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.58}$$

■

Queste condizioni di differenziabilità si chiamano tradizionalmente *condizioni di Cauchy–Riemann.*

La condizione di $\mathbb{C}$–differenziabilità di una funzione è visibilmente più restrittiva. Se è assai difficile costruire delle funzioni continue non $\mathbb{R}$–differenziabili (esempio di Weierstrass o di Peano) è d'altra parte facile trovare delle funzioni elementari non $\mathbb{C}$–differenziabili. Ad esempio la funzione $f(z) = x + 2iy$ non è $\mathbb{C}$–differenziabile in alcun punto. Essa non soddisfa alle condizioni (1.64) poiché $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 2$.

Osserviamo inoltre che la $\mathbb{R}$–differenziabilità non implica necessariamente la continuità delle derivate parziali della u e della v, mentre invece, come vedremo più avanti, la $\mathbb{C}$–differenziabilità nell'intorno di un punto implica la loro continuità nel punto.

Studiamo ora la nozione di derivata cominciando con la derivata in una direzione. Fissiamo un punto $z \in \mathbb{C}$, un suo intorno U e consideriamo una funzione $f : U \to \mathbb{C}$. Ponendo $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$ si deduce dalle formule (1.45) e (1.50)

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} |\Delta z| e^{i\theta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} |\Delta z| e^{-i\theta} + o(\Delta z), \tag{1.59}$$

dove $o(\Delta z)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δz. Dividendo i due membri per Δz e passando al limite per $\Delta z \to 0$ e $\arg \Delta z = \theta$ =cost. si ottiene la *derivata di f in z nella direzione θ*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\theta = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg \Delta z = \theta}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}. \tag{1.60}$$

Si vede da questa formula che se f e z sono fissi e se θ varia da 0 a 2π il punto $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\theta$ percorre due volte un centro di centro $\frac{\partial f}{\partial z}$ e di raggio $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|$.

Dunque se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$ la derivata $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\theta$ dipende dalla direzione θ e solamente quando $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, cioè quando la funzione f è $\mathbb{C}$–differenziabile in un punto z, la derivata è la stessa in tutte le direzioni. Parleremo in questo caso, senza ulteriori specificazioni, di *derivata* di f nel punto z, introducendo quindi la seguente definizione.

1.19 DEFINIZIONE (DERIVATA)
Si dice che una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ ammette *derivata* $f'(z)$ nel punto $z \in U$ se esiste il limite

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}, \tag{1.61}$$

dove il limite è preso per la topologia di $\mathbb{C}$ (cioè gli intorni che intervengono nella definizione di limite sono dei dischi in $\mathbb{C}$ e quindi il limite è indipendente dalla maniera con cui Δz tende verso 0). ■

È chiaro che se la derivata $f'(z)$ esiste essa è uguale a $\frac{\partial f}{\partial z}$. Reciprocamente se $f'(z)$ esiste per definizione di limite si ha

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z), \tag{1.62}$$

dove $\alpha(\Delta z) \to 0$ con Δz. Dunque l'incremento $\Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$ è composto di due parti di cui la prima è $\mathbb{C}$–lineare e la seconda è un infinitesimo, ciò che esprime il fatto che f è $\mathbb{C}$–differenziabile in z.

In conclusione possiamo enunciare i seguenti due teoremi.

1.20 Teorema (Equivalenza)

V'è equivalenza fra la $\mathbb{C}$–differenziabilità di una funzione f in un punto z e l'esistenza della sua derivata $f'(z)$ in z. ∎

1.21 Teorema (Derivabilità)

Una funzione f, che sia $\mathbb{R}$–differenziabile in un punto z, ammette derivata $f'(z)$ in z se e solo se in z

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{1.63}$$

o, equivalentemente, se e solo se in z sono soddisfatte le condizioni di Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.64}$$

∎

Poiché la derivata di una funzione di variabile complessa si definisce come in analisi reale, le operazioni elementari di derivazione (derivata di una somma, di un prodotto, di un quoziente, di una funzione composta e del reciproco) si generalizzano senza cambiamenti al caso complesso.

Facciamo un'osservazione utile per il calcolo. Poiché la derivata (se esiste) della funzione $f = u + iv$ è indipendente dalla direzione la si può calcolare nella direzione dell'asse x o y. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Osserviamo infine che la $\mathbb{C}$–differenziabilità in un solo punto non è sufficiente per elaborare una teoria consistente. Si esigerà dunque la $\mathbb{C}$–differenziabilità non in un solo punto ma in tutti i punti vicini e si utilizzerà la definizione seguente.

1.22 Definizione (Olomorfia)

Si dice che una funzione f è *olomorfa* (o *analitica*) in un punto $z \in \mathbb{C}$ se è $\mathbb{C}$–differenziabile in un intorno di questo punto. ∎

Esempio. La funzione $f(z) = |z|^2$ è visibilmente $\mathbb{R}$–differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$. Ora $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ è nulla solamente per $z = 0$ e dunque la funzione $f(z)$ è $\mathbb{C}$–differenziabile solo al punto $z = 0$. Essa dunque non può essere olomorfa in questo punto.

L'insieme delle funzioni olomorfe in un punto z (ciascuna di queste funzioni è $\mathbb{C}$–differenziabile in un proprio intorno di z) è indicato con $\mathcal{O}_z$. Questo insieme è un anello poiché è stabile per la somma ed il prodotto. Segnaliamo che il quoziente f/g di due funzioni di $\mathcal{O}_z$ può non appartenere ad $\mathcal{O}_z$ se $g(z) = 0$.

Le funzioni $\mathbb{C}$–differenziabili su un insieme aperto $D \subset \mathbb{C}$ saranno chiaramente olomorfe su D. Si dirà che queste funzioni sono *olomorfe su D* e si indicherà l'insieme di queste funzioni con $\mathcal{O}(D)$. Anche l'insieme $\mathcal{O}(D)$ è un anello. Per olomorfia di una funzione su un insieme $M \subset \mathbb{C}$ si intenderà la possibilità di prolungare questa funzione ad una funzione olomorfa su un insieme aperto $D \supset M$.

Si dirà che una funzione f è olomorfa *nel punto all'inifinito se la funzione* $g(z) = f(1/z)$ lo è nel punto $z = 0$. Questa definizione permette di considerare delle funzioni olomorfe su degli insiemi di $\overline{\mathbb{C}}$. Osserviamo che la definizione di derivata all'infinito non ha senso.

1.2.3 Trasformazioni conformi

Supponiamo che un cammino γ di equazione $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, sia contenuto in un dominio D e sia $f(z)$ definita e continua in D. Allora l'equazione $w = w(t) = f(z(t))$ definisce un cammino γ' nel piano w, che può essere chiamato l'*imagine* di γ.

Consideriamo il caso di una $f(z)$ che sia olomorfa in D ed il caso di un cammino γ differenziabile. Allora anche $w'(t)$ esiste ed è dato da

$$w'(t) = f'(z(t))\, z'(t)\,.$$

Studiamo il significato di questa equazione in un punto $z_0 = z(t_0)$ con $f'(z_0) \neq 0$.

La prima conclusione è che $w'(t_0) \neq 0$. Quindi γ' ha una tangente nel punto $w_0 = f(z_0)$ e la sua direzione è data da

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)\,.$$

Questa relazione stabilisce che l'angolo fra la direzione tangente a γ in z_0 e quella tangente a γ' in w_0 è uguale a $\arg f'(z_0)$ ed è quindi indipendente dalla curva γ. Per questa ragione curve che passano per z_0 e che sono tangenti fra di loro sono trasformate in curve con tangente comune in w_0. Inoltre curve che formano un angolo in z_0 sono trasformate in curve che formano il medesimo angolo, sia in ampiezza che verso. In vista di questa proprietà l'applicazione $w = f(z)$ è detta *conforme* in tutti i punti in cui $f'(z) \neq 0$.

Un ulteriore proprietà dell'applicazione si ottiene considerando il modulo $|f'(z_0)|$. Abbiamo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|\,.$$

Ciò significa che un qualunque piccolo segmento con un estremo in z_0 è al limite, nella trasformazione, contratto o dilatato di un rapporto $|f'(z_0)|$. In altre parole la variazione di scala effettuata dalla trasformazione $w = f(z)$ nel punto z_0 è indipendente dalla direzione. Naturalmente questo cambiamento di scala in generale varia da punto a punto.

Viceversa è chiaro che la presenza contemporanea di entrambi i tipi di conformalità implica l'esistenza di $f'(z_0)$.

La trasformazione conforme associata ad una funzione olomorfa $f(z)$ fornisce una eccellente visualizzazione delle sue proprietà, che può essere a buon ragione paragonata con la visualizzazione di una funzione reale mediante il suo grafico.

Più precisamente risulta essere particolarmente fruttuoso lo studio della corrispondenza fra curve indotta dalla trasformazione conforme considerata. Le specifiche proprietà della funzione $f(z)$ possono essere descritte studiando la famiglia di curve in cui sono trasformate alcune curve particolarmente semplici.

Sovente è conveniente cominciare collo studiare le immagini delle rette $x = x_0$ e $y = y_0$. Se scriviamo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, l'immagine di $x = x_0$ è data dalle equazione parametriche $u = u(x_0, y)$, $v = v(x_0, y)$; y svolge le funzioni di parametro e può essere eliminato o mantenuto a seconda della convenienza. L'immagine di $y = y_0$ è determinata nella medesima maniera. Assieme queste curve immagine formano una rete ortogonale nel piano w. Analogamente possiamo considerare le curve $u(x,y) = u_0$ e $v(x,y) = v_0$ nel piano z. Anch'esse sono ortogonali e sono chiamate le *curve di livello* di u e v.

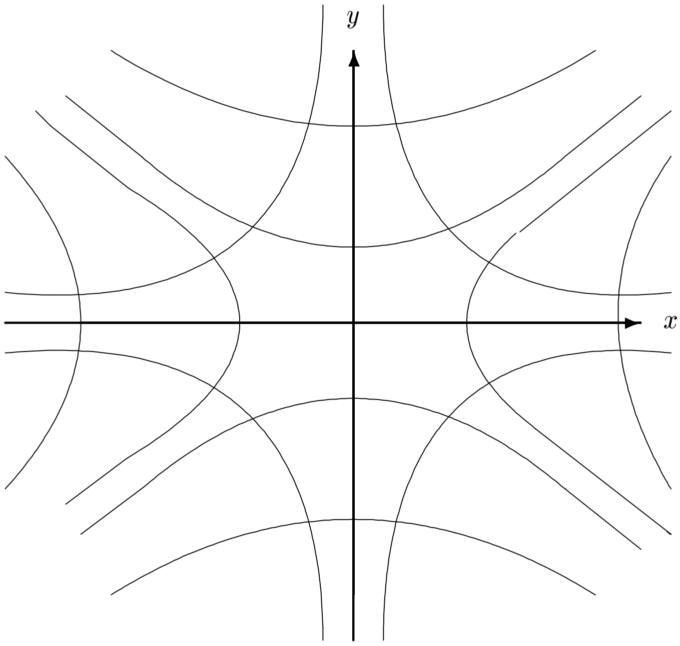


Figura 1.2: Curve di livello nel piano z

In altri casi può essere più conveniente usare coordinate polari e studiare le immagini di centri concentrici nell'origine e dei raggi uscenti dall'origine.

Consideriamo, a quisa d'esempio, alcune applicazioni elementari.

Consideriamo dapprima l'applicazione $w = z^2$. Poiché in questo caso $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$ le curve di livello $u = u_0$ e $v = v_0$ sono delle iperboli equilatere con asintoti, rispettivamente, le diagonali e gli assi coordinati. Sono naturalmente ortogonali fra di loro. D'altro lato l'immagine di $x = x_0$ è $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}x_0^2$ e l'immagine di $y = y_0$ è $u = -y_0^2 + \frac{v^2}{4y_0^2}$. Entrambe le famiglie di curve rappresentano parabole con il fuoco nell'origine i cui assi sono diretti, rispettivamente, lungo la direzione negativa e positiva dell'asse u. La loro ortogonalità è ben nota dalla geometria analitica. Queste famiglie di curve di livello sono descritte nelle figure 1.2 e 1.3.

Anche l'applicazione $w = e^z$ è molto semplice. Le rette $x = x_0$ e $y = y_0$ sono trasformate, rispettivamente, in circoli centrati nell'origine e raggi uscenti dall'origine.

1.2.4 Superfici di Riemann

La visualizzazione di una funzione così come descritta nella sezione precedente è completamente chiara solo quando l'applicazione è biunivoca. Se non è così possiamo ancora aiutare la nostra intuizione introducendo dei domini generalizzati in cui punti distinti possono avere le medesime coordinate. Per ottenere ciò è necessario supporre che punti che occupano la medesima posizione possano essere distinti introducendo altre caratteristiche come ad esempio una etichetta od un colore. Punti colla medesima etichetta sono considerati giacere sul medesimo *foglio* o *strato*.

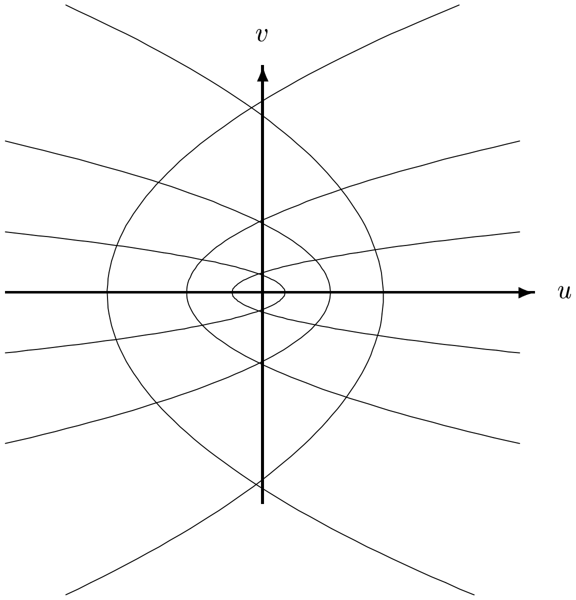


Figura 1.3: Curve di livello nel piano w

Questa idea porta alla nozione di *superficie di Riemann*. Esorbita dai compiti di questo corso fornire una definizione rigorosa di questa nozione. Per i nostri scopi è sufficiente introdurre le superfici di Riemann in un modo puramente descrittivo. Siamo legittimati a ciò sino a che le utilizziamo a soli scopi illustrativi e mai in prove logiche.

La superficie di Riemann più semplice è connessa colla funzione $w = z^2$. Questa funzione definisce un'applicazione biunivoca fra i semipiani $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$ e $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ e l'intero piano w privato dell'asse reale negativo. L'immagine di ciascun semipiano è così ottenuta eseguendo un "taglio" lungo l'asse negativo del piano w; questo taglio ha un "lembo" superiore ed un "lembo" inferiore. Quindi in corrispondenza ai due semipiani del piano z consideriamo 2 copie identiche del piano w con un taglio. Esse saranno i "fogli" della superficie di Riemann e saranno distinte da un etichetta $k = 1, 2$, che serve ad identificare il semipiano di provenienza. Quando z muove nel piano il punto immagine w muove sulla superficie di Riemann. Affinché il punto immagine descriva una curva continua sulla superficie di Riemann dobbiamo incollare il lembo inferiore del primo foglio col lembo superiore del secondo foglio ed il lembo superiore del primo foglio col lembo inferiore del secondo, così come indicato in figura 1.4. In senso fisico ciò non è possibile senza che la superficie così costruita non abbia un intersezione lungo l'asse reale negativo, ma il modello ideale è considerato privo di questa intersezione. Il risultato di questa costruzione è una superficie di Riemann i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano z. Di più questa corrispondenza è continua se la continuità è definita nel senso suggerito dalla costruzione.

Il taglio lungo l'asse reale negativo può essere sostituito da un taglio lungo un qualunque cammino da 0 all'∞; la superficie di Riemann costruita in tal modo dovrebbe essere considerata identica a quella costruita originariamente. In altre parole gli specifici tagli scelti non costituiscono caratteristiche distintive delle superfici di Riemann, ma la loro introduzione è necessaria ai soli fini descrittivi.

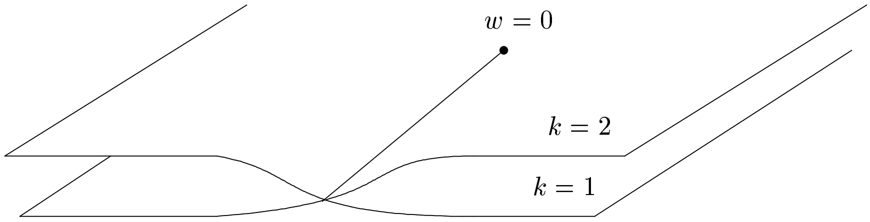


Figura 1.4: Superficie di Riemann di z^2

Il punto $w = 0$ è speciale. Esso connette i due fogli ed è chiamato un *punto di diramazione* o più specificatamente un punto di diramazione del primo ordine, perché una curva deve girargli attorno due volte prima di potersi chiudere. Se la nostra superficie di Riemann è considerata su $\overline{\mathbb{C}}$, allora il punto all'∞ è anch'esso un punto di diramazione (del primo ordine).

Osserviamo infine che la funzione radice $z = \sqrt{w}$, se definita sulla superficie di Riemann sopra descritta invece che sul piano w, può essere considerata come l'inversa della funzione $w = z^2$ surgettiva fra il piano z e la superficie di Riemann e come tale risulta essere una funzione ad un solo valore, olomorfa in quanto inversa di una funzione olomorfa. La funzione $z = \sqrt{w}$ se calcolata sul foglio $k = 1$ vale $z = |w|^{1/2} \exp\left(i \frac{\arg w}{2}\right)$, mentre vale $z = -|w|^{1/2} \exp\left(i \frac{\arg w}{2}\right)$ sul foglio $k = 2$, dove in entrambi i casi si deve scegliere $-\pi < \arg w < \pi$. Il valore della radice sul foglio $k = 1$ è detto determinazione principale della radice.

La superficie di Riemann corrispondente a $w = e^z$ si può costruire in maniera analoga. In questo caso la funzione applica in maniera biunivoca ogni striscia parallela $-(k+1)\pi < y < (k+1)\pi$ del piano z, per ogni $k = 0, \pm 1, \ldots$, su un foglio tagliato lungo l'asse reale negativo, cui poniamo l'etichetta k. I lembi dei tagli di ciascun foglio devono essere incollati fra loro in modo da formare un elica senza fine (vedi figura 1.5). L'origine $w = 0$ non è considerata un punto appartenente alla superficie di Riemann così costruita, corrispondentemente al fatto che e^z non si annulla mai. Esso è un punto di diramazione di ordine infinito perché anche girando infinite volte attorno ad esso una curva non può chiudersi.

La funzione $z = \log w$, se definita sulla superficie di Riemann dell'esponenziale invece che sul piano w, può essere considerata come l'inversa della funzione $w = e^z$ surgettiva fra il piano z e la sua superficie di Riemann e come tale risulta essere una funzione ad un solo valore, olomorfa in quanto inversa di una funzione olomorfa. la funzione $z = \log w$ calcolata sul foglio k vale $z = \log|w| + i(k+1)\arg w$, dove $-\pi < \arg w < \pi$. Il valore del logaritmo sul foglio $k = 0$ è detto determinazione principale del logaritmo.

1.2.5 Problemi

1. Dove sono differenziabili le seguenti funzioni?

$$\sin z, \quad \tan z, \quad \frac{z-1}{z^2+1}, \quad e^{1/z}, \quad 2\overline{z}.$$

2. Mostrare che le funzioni $\mathrm{Re}\, z$ ed $\mathrm{Im}\, z$ non sono differenziabili in alcun punto.

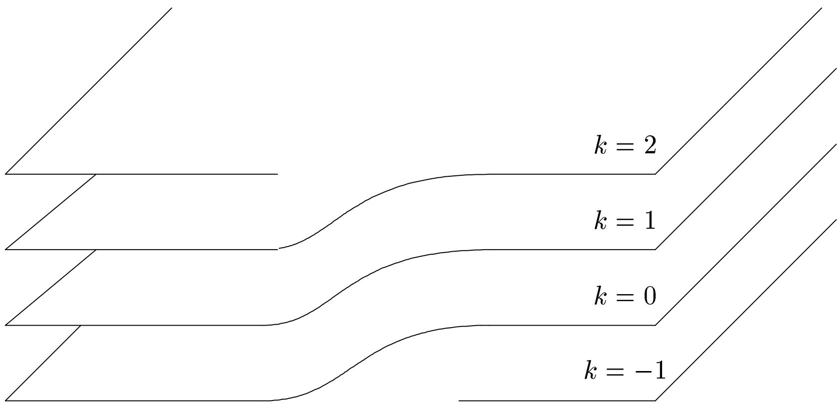


Figura 1.5: Superficie di Riemann di e^z

3. Sia $z = x$ reale. Utilizzare la relazione $(d/dx)\, e^{ix} = ie^{ix}$ per trovare le formule di derivazione standard per le funzioni trigonometriche

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

4. Discutere le seguenti trasformazioni dal piano complesso z al piano complesso w.

$$w = z^3, \quad w = 1/z.$$

5. Considerare la trasformazione

$$w = z + \frac{1}{z}, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv.$$

Mostrare che l'immagine dei punti nel semipiano superiore di z $(y > 0)$ che sono esterni al circolo $|z| = 1$ corrisponde all'intero semipiano superiore di w, ossia a $v > 0$.

6. Descrivere la superficie di Riemann della funzione $w = z^n$.

Capitolo 2

Proprietà delle Funzioni Olomorfe

In questo capitolo ci occuperemo dei più importanti metodi di studio delle funzioni olomorfe, metodi che sono basati sulla rappresentazione di queste funzioni mediante degli integrali speciali (integrali di Cauchy) o mediante delle serie (serie di Taylor e di Laurent).

2.1 Primitive e teorema di Cauchy

Cominciamo con la nozione di integrale di una funzione di variabile complessa.

2.1.1 Integrali curvilinei

2.1 Definizione (Integrale su un cammino)
Sia dato un cammino differenziabile a tratti $\gamma : I \to \mathbb{C}$, dove $I = [\alpha, \beta]$ è un intervallo dell'asse reale, e sia data sull'immagine $\gamma(I)$ di questo cammino una funzione complessa f tale che $f \circ \gamma$ sia continua su I. Si chiama integrale della funzione f lungo il cammino γ la quantità

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{2.1}$$

dove l'integrale della funzione complessa $f(\gamma(t))\gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ della variabile reale t è inteso come $\int_\alpha^\beta g_1(t)dt + i\int_\alpha^\beta g_2(t)dt$. ■

Osserviamo che nelle condizioni ammesse le funzioni g_1 e g_2 non possono presentare che un numero finito di discontinuità di prima specie su I (si confronti la definizione data nel capitolo precedente di un cammino differenziabile a tratti), di modo che l'integrale (2.1) esiste nel senso di Riemann.

È conveniente introdurre anche i seguenti integrali curvilinei

$$\int_\gamma f\,dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))x'(t)dt, \qquad \int_\gamma f\,dy = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))y'(t)dt \tag{2.2}$$

dove $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, che sono chiamati integrali di f lungo γ rispetto alle coordinate x e y. Se si pone $f = u + iv$ l'integrale (2.1) puo' essere rappresentato sotto la forma di un integrale curvilineo rispetto alle coordinate

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy. \tag{2.3}$$

Esempio. 1. Siano γ un cerchio $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $f(z) = (z-a)^n$, dove $n = 0, \pm 1, \ldots$ è un intero arbitrario. Si ha $\gamma'(t) = ire^{it}$, $f(\gamma(t)) = r^n e^{int}$ e dalla formula (2.1)

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Si distinguono due casi. Per $n \neq -1$ si ha

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = r^{n+1}\frac{e^{i(n+1)2\pi} - 1}{n+1} = 0$$

perché l'esponenziale è periodico. Per $n = -1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Le potenze intere di $z-a$ posseggono quindi la proprietà di "ortogonalità"

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{per } n = -1 \end{cases} \tag{2.4}$$

di cui ci serviremo a più riprese.

2. Siano $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un cammino differenziabile a tratti ed $n \neq -1$ un intero qualunque. Se $n < 0$ si ammetterà ancora che $\gamma(t) \neq a$ su I, cioè che il cammino γ non passi per il punto $z = a$. Dalla regola di derivazione di una funzione composta si ha $\frac{d}{dt}(\gamma(t)-a)^{n+1}(t) = (n+1)(\gamma(t)-a)^n(t)\gamma'(t)$ e dunque

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_\alpha^\beta (\gamma(t)-a)^n \gamma'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\{(\gamma(\beta)-a)^{n+1} - (\gamma(\alpha)-a)^{n+1}\}. \tag{2.5}$$

Si vede che gli integrali di $(z-a)^n$, $n \neq -1$, non dipendono dalla forma del cammino, ma solamente dagli estremi. Essi sono nulli lungo cammini chiusi (che non passano per $z = a$ per $n < 0$).

Enumeriamo le proprietà fondamentali dell'integrale di funzioni complesse.

1. *Linearità.* Se f e g sono delle funzioni continue su un cammino γ differenziabile a tratti, per tutte le costanti complesse a e b si ha

$$\int_\gamma (af + bg)dz = a\int_\gamma f\,dz + b\int_\gamma g\,dz. \tag{2.6}$$

Ciò risulta direttamente dalla definizione.

2. *Additività.* Siano dati due cammini $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [\beta_1, \beta_2] \to \mathbb{C}$ differenziabili a tratti e tali che $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$. Si chiama *riunione* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ di questi cammini il cammino $\gamma : [\alpha_1, \beta_2] \to \mathbb{C}$ tale che

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ se } & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t) \text{ se } & t \in [\beta_1, \beta_2]. \end{cases}$$

Per ogni funzione f continua su $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ segue direttamente dalla definizione dell'integrale che

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz. \tag{2.7}$$

Osservazione. Si può rinunciare alla condizione $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$ nella definizione della riunione $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Questa riunione non è allora un cammino continuo, ma la proprietà (2.7) rimane valida.

3. *Invarianza.*

2.2 Teorema (Integrale su una curva)

Se un cammino $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ si ottiene a partire da un cammino differenziabile a tratti $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ con un cambiamento di parametro ammissibile, cioè $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$, dove τ è un'applicazione differenziabile a tratti, strettamente crescente di $[\alpha, \beta]$ su $[\alpha_1, \beta_1]$, allora per ogni funzione f continua su γ (dunque su γ_1) si ha

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz. \tag{2.8}$$

■

Dimostrazione. Per definizione dell'integrale

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau)d\tau,$$

e poiché $\gamma_1(\tau(t)) = \gamma(t)$ e $\gamma_1'(\tau(t))d\tau = \gamma'(t)dt$, il teorema di analisi reale sul cambiamento di variabili ci dà

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} f\,dz.$$ ■

Questo teorema ci permette di trarre l'importante conclusione seguente. L'integrale che abbiamo definito per un cammino può essere inteso come integrale su una *curva* (per curva si intende una classe di cammini equivalenti; vedi capitolo precedente).

Pertanto nel seguito intenderemo sovente per curva un insieme di punti del piano complesso, su cui si è indicato un verso di percorrenza, immagine di un intervallo $[\alpha, \beta]$ per ogni cammino che definisce questa curva. Si parlerà allora di integrale su questo insieme, intendendo con ciò un integrale lungo la curva corrispondente.

4. *Orientabilità.* Indichiamo con γ^- il cammino ottenuto a partire da un cammino differenziabile a tratti $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ con il cambiamento di variabile $t \to \alpha + \beta - t$ (cioè il cammino $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha, \beta]$) e sia f una funzione continua su γ; allora

$$\int_{\gamma^-} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz. \tag{2.9}$$

Questa asserzione si prova come il teorema 2.2.

Si dira che il cammino γ^- si deduce da γ con un cambiamento di orientazione.

5. *Stima di un integrale.*

2.3 Teorema (Stima di un integrale)

Per ogni funzione f continua su un cammino $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ differenziabile a tratti si ha

$$\left| \int_{\gamma} f\,dz \right| \leq \int_{\gamma} |f|\;|dz|, \tag{2.10}$$

dove l'integrale curvilineo a secondo membro è definito da

$$\int_\gamma |f|\ |dz| = \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|dt. \tag{2.11}$$

■

Dimostrazione. Indichiamo con J il valore dell'integrale di f lungo γ e poniamo $J = |J|\,e^{i\theta}$; si ha

$$|J| = \int_\gamma e^{-i\theta} f\, dz = \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f\,[\gamma(t)]\gamma'(t)\, dt$$

(abbiamo incluso il fattore costante $e^{-i\theta}$ sotto il segno di integrale). Poiché l'integrale di destra è un numero reale si ha

$$\begin{aligned} |J| &= \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\{e^{-i\theta} f\,[\gamma(t)]\gamma'(t)\}\, dt \le \int_\alpha^\beta |f\,[\gamma(t)]|\,|\gamma'(t)|dt \\ &= \int_\gamma |f|\ |dz|. \end{aligned}$$

■

2.4 Corollario

Se nelle condizioni del teorema precedente è $|f(z)| \le M$ su tutto γ con M una costante, allora

$$\left| \int_\gamma f\, dz \right| \le M\,|\gamma| \tag{2.12}$$

ove $|\gamma|$ è la lunghezza del cammino γ. ■

Dimostrazione. La diseguaglianza (2.12) segue dalla (2.10) se si maggiora l'integrale del secondo membro e si osserva che

$$|\gamma| = \int_\gamma |dz| \tag{2.13}$$

è per definizione la lunghezza del cammino γ. ■

2.1.2 Primitive

2.5 Definizione (Primitiva)

Si chiama *primitiva* di una funzione f in un dominio D una funzione F olomorfa in D tale che

$$F'(z) = f(z) \tag{2.14}$$

per ogni $z \in D$. ■

Se F è una primitiva di f in D, lo sono del pari tutte le funzioni $F(z) + C$ dove C è una costante arbitraria. Reciprocamente, siano F_1 ed F_2 due primitive di f in un dominio D ed $\Phi = F_1 - F_2$. La funzione Φ è olomorfa in D, dunque $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ in D e $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi' = F_1' - F_2' \equiv 0$ in D e quindi $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 0$. Da qui si deduce che per ogni punto (x, y) di D, poiché D è aperto, possiamo considerare le funzioni $\mathrm{Re}\,\Phi$ e $\mathrm{Im}\,\Phi$ in un intervallo di x e di y e dedurre, grazie ad un teorema di analisi, che Φ è localmente costante in D. Dalla continuità della Φ in D e dalla connessione di D, grazie al corollario 1.10, segue che Φ è identicamente costante su D.

Si è stabilito così il teorema

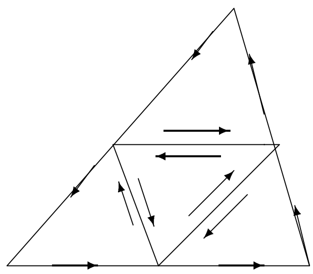


Figura 2.1: Costruzione di Goursat

2.6 Teorema (Insieme delle primitive)
Se F è una primitiva di una funzione f in un dominio D, l'insieme di tutte le primitive di f è dato dalla formula

$$F(z) + C, \tag{2.15}$$

dove C è una costante arbitraria. ■

Dunque se esiste la primitiva di una funzione f in un dominio D è definita a meno di una costante additiva.

Occupiamoci ora del problema dell'esistenza della primitiva. Studiamo dapprima l'esistenza di una primitiva locale. Cominciamo con un teorema che esprime in una forma elementare il teorema di Cauchy sul quale riposa tutta la teoria di integrazione delle funzioni olomorfe.

2.7 Teorema (Goursat)
Se una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$, è cioè olomorfa in un dominio D, l'integrale di f lungo il contorno orientato[1] *di un triangolo qualunque $\Delta \Subset D$ è nullo*

$$\int_{\partial\Delta} f\, dz = 0. \tag{2.16}$$

■

Dimostrazione. Supponiamo che il teorema sia falso e che esista un triangolo $\Delta \Subset D$ tale che

$$\left| \int_{\partial\Delta} f\, dz \right| = M > 0. \tag{2.17}$$

Dividiamo Δ in quattro triangoli con l'aiuto delle linee mediane e supponiamo che i contorni di Δ e di questi triangoli siano orientati in senso antiorario (vedi figura 2.1). È evidente che l'integrale di f lungo $\partial\Delta$ è uguale alla somma degli integrali lungo i contorni dei piccoli triangoli, perché gli integrali lungo le linee mediane sono presi due volte in senso contrario e dunque si semplificano, mentre le altre parti del contorno costituiscono $\partial\Delta$. Esiste quindi almeno un piccolo triangolo – che indicheremo con Δ_1 (ad esempio il triangolo superiore nella figura) – tale che

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f\, dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

[1] Si ammette che il borda $\partial\Delta$ (che è una curva differenziabile a tratti) sia orientato in tal modo che il triangolo sia sempre situato dal medesimo lato del senso del percorso.

Dividendo il triangolo Δ_1 in quattro triangoli con le linee mediane e riprendendo il medesimo ragionamento si trova almeno un triangolo – che designeremo con Δ_2 – tale che

$$\left|\int_{\partial\Delta_2} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Proseguendo questa procedura si ottiene una successione di triangoli ciascuno contenente il successivo tali che per l'integrale preso lungo il contorno dell'n-esimo triangolo si ha

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}. \tag{2.18}$$

Se consideriamo una qualunque successione di punti $z_n \in \overset{\circ}{\Delta}_n$essa è di Cauchy ed ha come limite un punto z_0 che appartiene a Δ e quindi a D. Poiché la funzione f è olomorfa nel punto z_0 per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che nello sviluppo

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0) \tag{2.19}$$

si ha $|\alpha(z)| < \epsilon$ per ogni z preso nell'intorno $U = \{|z - z_0| < \delta\}$.

L'intorno U contiene almeno un triangolo della successione costruita. Sia Δ_n questo triangolo. Grazie alla (2.19)

$$\int_{\partial\Delta_n} f\,dz = \int_{\partial\Delta_n} f\,(z_0)dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)dz + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz,$$

I due primi integrali del secondo membro sono nulli, perché i fattori costanti possono essere estratti dal segno di integrale e gli integrali che si ottengono su 1 e $z - z_0$ lungo il cammino chiuso $\partial\Delta_n$ sono nulli (per l'esempio 2 della sezione precedente). Dunque $\int_{\partial\Delta_n} f\,dz = \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz$ dove $|\alpha(z)| < \epsilon$ per ogni $z \in \partial\Delta_n$. D'altra parte per ogni $z \in \partial\Delta_n$ la quantità $|z - z_0|$ è inferiore al perimetro $|\partial\Delta_n|$ del triangolo Δ_n e dunque per il teorema di stima di un integrale

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz\right| < \epsilon|\partial\Delta_n|^2.$$

Ora per costruzione $|\partial\Delta_n| = |\partial\Delta|/2^n$ dove $|\partial\Delta|$ è il perimetro del triangolo Δ e dunque

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| < \epsilon|\partial\Delta|^2/4^n.$$

Tenendo conto della (2.18) si trova che $M < \epsilon|\partial\Delta|^2$ da cui poiché ϵ è arbitrario $M = 0$, ciò che contraddice l'ipotesi (2.17). ∎

Studieremo il teorema di Cauchy nella sua forma generale nella sezione seguente. Per il momento ci proponiamo di dedurre a partire dal teorema 2.7 un teorema locale di esistenza di una primitiva.

2.8 Teorema (Primitiva locale)

Se una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ allora ammette una primitiva

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta \tag{2.20}$$

in ogni disco $U = \{|z - a| < r\} \subset D$ (l'integrale è preso lungo il segmento $[a, z] \subset U$). ∎

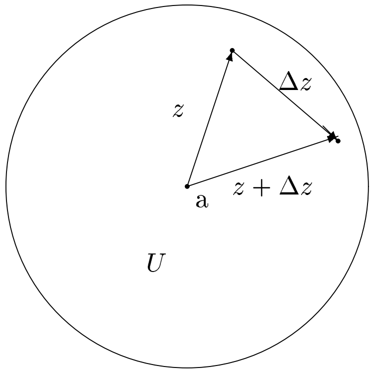


Figura 2.2: Costruzione della primitiva su un disco

Dimostrazione. Fissiamo un punto $z \in U$ e ammettiamo che $|\Delta z|$ sia così piccolo che il punto $z + \Delta z \in U$. Il triangolo Δ di vertici a, z e $z + \Delta z$ appartiene allora propriamente a D (vedi figura 2.2) e per il teorema 2.7

$$\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,z+\Delta z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z+\Delta z,a]} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Il primo integrale è uguale a $F(z)$, il terzo all'integrale preso col segno meno lungo il segmento $[a, z + \Delta z]$, cioè a $-F(z + \Delta z)$, e dunque

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{[z,z+\Delta z]} f(\zeta)d\zeta. \tag{2.21}$$

D'altra parte

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(z)d\zeta$$

(abbiamo scambiato il fattore costante $f(z)$ col segno di integrale) e tenuto conto della (2.21) si può scrivere

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} \{f(\zeta) - f(z)\}d\zeta. \tag{2.22}$$

Grazie alla continuità della funzione f per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per $|\Delta z| < \delta$ si ha $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $\zeta \in [z, z + \Delta z]$. Si deduce quindi dalla (2.22) che per ogni $|\Delta z| < \delta$

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon,$$

ciò che esprime l'esistenza di $F'(z) = f(z)$. ∎

Osservazione. Dimostrando il teorema 2.8 abbiamo utilizzato solamente due proprietà della funzione f, la sua continuità nel dominio D ed il fatto che l'integrale di f lungo il contorno di un triangolo qualunque $\Delta \Subset D$ è nullo. Si può dunque affermare che la funzione F definita dalla formula (2.20) sarà una primitiva locale di ogni funzione f che possiede queste due proprietà. ■

Il problema dell'esistenza della primitiva globale su D è più complicato. Lo affronteremo nella sezione seguente. Per il momento ci limiteremo a mostrare come ottenere una primitiva lungo un cammino dato incollando delle primitive locali.

2.9 Definizione (Primitiva lungo γ)
Siano dati in un dominio D una funzione f ed un cammino (continuo) $\gamma : I = [\alpha, \beta] \to D$. Si dirà che una funzione $\Phi : I \to \mathbb{C}$ è una *primitiva della funzione f lungo il cammino γ* se

1. è continua su I

2. per ogni punto $t_0 \in I$ esiste un intorno $U \subset D$ del punto $z_0 = \gamma(t_0)$ nel quale f possiede una primitiva F_U tale che

$$F_U(\gamma(t)) = \Phi(t) \tag{2.23}$$

per ogni t preso in un intorno $u_{t_0} \subset I$. ■

Osserviamo che, se f possiede una primitiva F dappertutto nel dominio D, la funzione $F(\gamma(t))$ può servire da primitiva lungo il cammino γ. Nella definizione non si esige che la primitiva esista su D, ma è sufficiente che essa esista localmente nell intorno di ogni punto $z_0 \in \gamma$. Inoltre se $\gamma(t') = \gamma(t'') = z'$ per $t' \neq t''$ le due primitive corrispondenti l'una all'intorno $u_{t'}$ e l'altra all'intorno $u_{t''}$ non necessariamente sono uguali ma possono differire per una costante (si noterà che queste due primitive operano nell'intorno di un medesimo punto z' e per il teorema 2.6 la loro differenza deve essere una costante). Dunque la primitiva lungo il cammino γ è una funzione del parametro t ed in generale può non essere una funzione del punto z.

2.10 Teorema (Primitiva lungo γ)

Per ogni funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ ed ogni cammino (continuo) $\gamma : I \to D$ la *primitiva di f lungo γ esiste ed è definita a meno di una costante additiva.* ■

Dimostrazione. Sia

$$2d = \inf_{\substack{t \in I \\ z \in \partial D}} |z - \gamma(t)|$$

la distanza della curva γ dalla frontiera ∂D del dominio D. Suddividiamo l'intervallo $[\alpha, \beta]$ in n intervalli $I_k = [t_k, t'_k]$ in modo tale che due intervalli vicini si ricoprano parzialmente ($t_k < t_{k+1} < t'_k$, $t_1 = \alpha$, $t'_n = \beta$). Poiché la funzione $\gamma(t)$ è uniformemente continua esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni coppia t, t' di punti di I per cui $|t - t'| < \delta$ si ha $|\gamma(t) - \gamma(t')| < d/3$. Se scegliamo gli intervalli I_k di ampiezza $< \delta$, allora il disco U_k di raggio $d/2$, centrato in un punto di $\gamma(I_k)$ immagine di un valore di t interno a I_k, contiene $\gamma(I_k)$ ed è contenuto in D. In virtù del teorema 2.8 f ammette una primitiva in ogni U_k (vedi figura 2.3).

Fra le primitive definite in U_1 (queste primitive differiscono fra loro per una costante) scegliamone arbirtariamente una ed indichiamoloa con F_1. Consideriamo una primitiva definita in U_2; nell'intersezione $U_1 \cap U_2$ non può differire da F_1 che per una costante additiva (poiché sono primitive di una medesima funzione). Quindi fra le primitive definite in U_2 non ne esiste che una – che noi indicheremo con F_2 – che è uguale ad F_1 nell'intersezione $U_1 \cap U_2$.

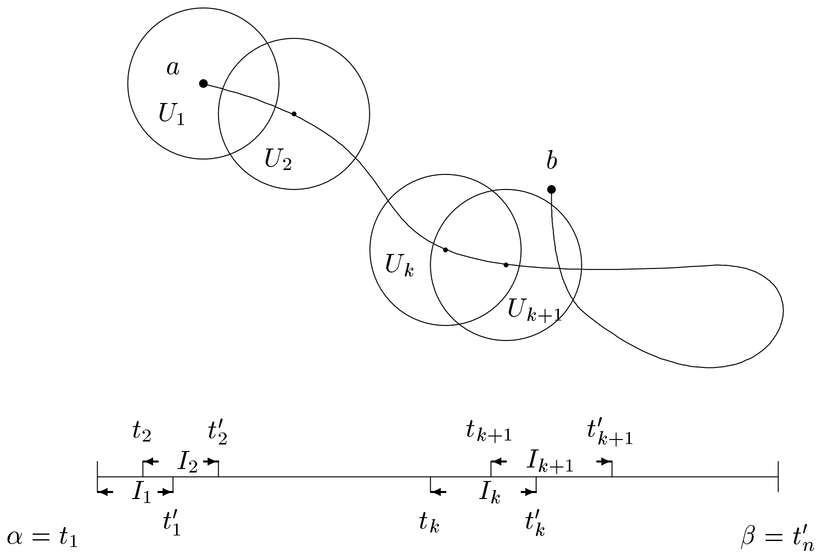


Figura 2.3: Costruzione della primitiva su una curva

Proseguiamo questa procedura scegliendo in ogni U_k una primitiva F_k tale che $F_k \equiv F_{k-1}$ nell'intersezione $U_{k-1} \cap U_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. La funzione

$$\Phi(t) = F_k(\gamma(t)), \quad t \in I_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

sarà una primitiva di f lungo il cammino γ. In effetti essa è evidentemente continua sull'intervallo I e per ogni punto $t_0 \in I$ esiste un intorno nel quale $\Phi(t) = F_U(\gamma(t))$, dove F_U è una primitiva di f definita in un intorno di $\gamma(t_0)$.

Resta da dimostrare la seconda parte del teorema. Siano Φ_1 e Φ_2 due primitive di f lungo il cammino γ. In un intorno u_{t_0} di un qualunque punto $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ si ha $\Phi_1 = F^{(1)}(\gamma(t))$ e $\Phi_2 = F^{(2)}(\gamma(t))$, dove $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$ sono due primitive di f definite in un intorno del punto $\gamma(t_0)$. Queste primitive differiscono nell'intorno per una costante additiva e quindi $\phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ è costante in u_{t_0}. Ora una funzione localmente costante e continua in un insieme connesso è costante su questo insieme per il corollario 1.10 e possiamo concludere che $\Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ è costante su $\overset{\circ}{I}$ e quindi su I. ■

Se si conosce una primitiva di f lungo un cammino γ l'integrale di f lungo γ si calcola colla formula classica di Newton–Leibnitz. Vale cioè il seguente teorema.

2.11 Teorema (Newton–Leibnitz)

Se $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ è un cammino differenziabile a tratti ed f una funzione continua su γ, che possiede una primitiva $\Phi(t)$ lungo γ, allora

$$\int_\gamma f\, dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{2.24}$$

■

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che il cammino γ sia differenziabile ed interamente situato in un dominio dove la funzione f ammette una primitiva F. La funzione $F \circ \gamma$, essendo una primitiva di f lungo γ, differisce da Φ per una costante additiva, cioè $\Phi(t) = F(\gamma(t))+C$. Poiché il cammino γ è differenziabile e $F'(z) = f(z)$, esiste per ogni $t \in [\alpha, \beta]$ una derivata continua $\Phi'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Ma per definizione dell'integrale curvilineo

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

ciò che prova il teorema in questo caso particolare.

Nel caso generale si può suddividere γ in un numero finito di cammini $\gamma_k : [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \to \mathbb{C}$ ($\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = \beta$) in modo tale che ciascuno di essi sia differenziabile e contenuto in un dominio dove f ammette una primitiva. Risulta da ciò che abbiamo appena dimostrato che

$$\int_{\gamma_k} f\,dz = \Phi(\alpha_{k+1}) - \Phi(\alpha_k)$$

e sommando tutte queste uguaglianze si ottiene la (2.24). ∎

È evidente che il secondo membro della (2.24) è invariante per cambiamenti ammissibili di parametri in accordo coll'osservazione generale che l'integrale curvileno è indipendente dal particolare cammino scelto a rappresentare la curva γ.

Osservazione. Il teorema 2.11 ci permette di verificare la veracità di quanto affermato all'inizio di questa sezione e precisamente che una funzione olomorfa non necessariamente possiede una primitiva in un dominio molteplicemente connesso. Siano infatti dati il dominio $D = \{0 < |z| < 2\}$ e la funzione $f(z) = 1/z$ olomorfa in D. Questa funzione non possiede una primitiva in D. Infatti se f ammettesse una primitiva F in D, allora per ogni $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ contenuta in D $F \circ \gamma$ sarebbe una primitiva lungo γ e per il teorema 2.11 si avrebbe

$$\int_\gamma f\,dz = F(b) - F(a),$$

dove $a = \gamma(\alpha)$ e $b = \gamma(\beta)$ sono gli estremi di γ. In particolare l'integrale di f lungo ogni cammino chiuso $\gamma \subset D$ tale che $b = a$ sarebbe nullo, mentre sappiamo che l'integrale di f lungo il cerchio unitario vale

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

2.1.3 Teorema di Cauchy

Dimostreremo nella sua forma generale il teorema di Cauchy che è il teorema fondamentale della teoria dell'integrazione delle funzioni olomorfe. Questo teorema afferma che l'integrale di una funzione olomorfa in un dominio non varia se il cammino di integrazione si deforma con continuità all'interno di questo dominio in modo tale che i suoi estremi rimangano fissi od in modo tale che il cammino resti chiuso. Per poter formulare degli enunciati rigorosi dobbiamo però dapprima definire cosa si intende per deformazione continua di un cammino.

Per ragioni di semplicità ammetteremo che per tutti i cammini considerati il parametro t varî sul medesimo intervallo $I = [0, 1]$. Questa condizione non riduce la generalità del caso considerato, perché la si può sempre soddisfare con un cambiamento ammissibile di parametro, cambiamento che ci permette di passare ad un cammino equivalente senza modificare il valore dell'integrale.

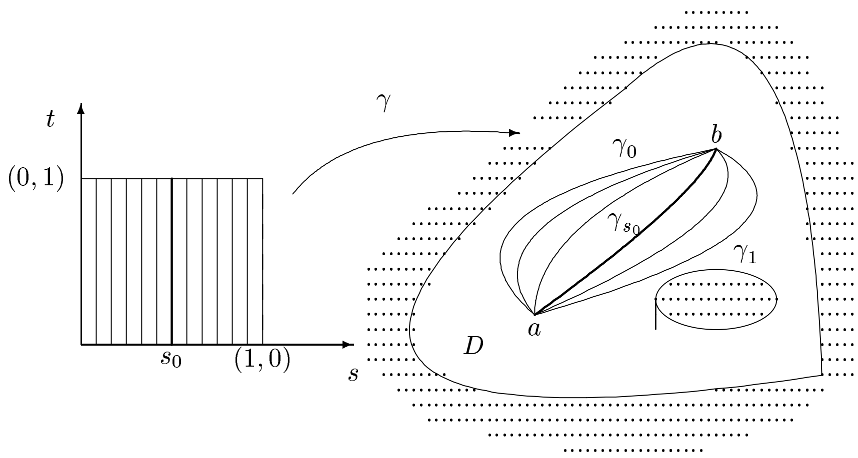


Figura 2.4: Curve omotope

2.12 DEFINIZIONE (OMOTOPIA)
Si dice che due cammini $\gamma_0 : I \to D$ e $\gamma_1 : I \to D$ di estremi comuni $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ sono *omotopi* in un dominio D se esiste un'applicazione continua $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ tale che

$$\begin{array}{lll} \gamma(0,t) \equiv \gamma_0(t), & \gamma(1,t) \equiv \gamma_1(t) & (t \in I) \\ \gamma(s,0) \equiv a, & \gamma(s,1) \equiv b & (s \in I). \end{array} \tag{2.25}$$

■

Per $s = s_0 \in I$ fisso la funzione $\gamma(s_0,t) : I \to D$ definisce un cammino nel dominio D ed inoltre tali cammini variano con continuità quando s_0 varia e la loro famiglia "collega" i cammini γ_0 e γ_1 in D. Dunque dire che due cammini sono omotopi in D corrisponde a dire che si può deformare con continuità l'uno nell'altro all'interno di D (vedi figura 2.4).

In maniera analoga si dice che due cammini chiusi $\gamma_0 : I \to D$ e $\gamma_1 : I \to D$ sono *omotopi* nel dominio D se esiste un'applicazione continua $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ tale che

$$\begin{array}{lll} \gamma(0,t) \equiv \gamma_0(t), & \gamma(1,t) \equiv \gamma_1(t) & (t \in I) \\ \gamma(s,0) \equiv \gamma(s,1) & & (s \in I). \end{array} \tag{2.26}$$

Solitamente si indica l'omotopia col simbolo $\sim$ di modo che se γ_0 è omotopo a γ_1 si scrive $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

È evidente che l'omotopia soddisfa agli assioni ordinari di una relazione d'equivalenza (riflessività, simmetria e transitività). Dunque in un dominio dato tutti i cammini con i medesimi estremi o tutti i cammini chiusi possono essere divisi in classi, ciascuna d'esse ragruppando tutti i cammini omotopi fra di loro. Queste classi si chiamano *classi d'omotopia.*

Fra le classi dei cammini chiusi conviene distinguere la classe dei cammini omotopi a zero. Si dice che un cammino chiuso γ è *omotopo a zero* in un dominio D se esiste un'applicazione continua $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ che soddisfa alle condizioni (2.26) con $\gamma_1(t) \equiv$ cost. (ciò che esprime il fatto che γ è ridotta ad un punto da una deformazione continua all'interno di D).

Si può dimostrare che in un dominio semplicemente connesso ogni cammino chiuso è omotopo a zero e dunque che due cammini qualunque di estremi comuni sono omotopi. Vale

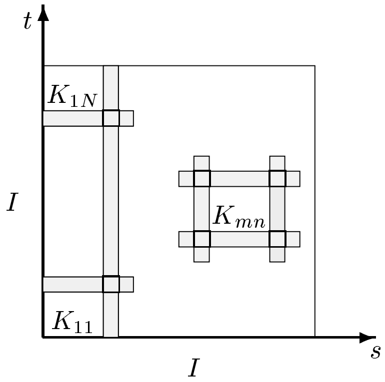


Figura 2.5: Ricoprimento di $I \times I$

anche l'inverso e quindi questa proprietà può essere presa come definizione di connessità semplice.

L'omotopia di due cammini si generalizza alle curve perché con tutta evidenza essa non è violata dai cambiamenti ammissibili di parametro. Più esattamente due curve (chiuse o con estremi comuni) sono *omotope* in un dominio D se e solo se lo sono i cammini γ_1 e γ_2 che le rappresentano.

All'inizio di questo capitolo abbiamo introdotto la nozione di integrale lungo un cammino differenziabile a tratti. Perciò nel seguito ci limiteremo a considerare cammini differenziabili a tratti e di conseguenza una relazione di equivalenza che potremmo chiamare di *omotopia differenziabile*, la cui definizione si ottiene da quella sopra riportata aggiungendo una richiesta di differenziabilità a tratti rispetto alla variabile t per l'applicazione $\gamma(s,t)$. Questa limitazione non cambia nulla alle considerazioni sopra riportate sulla relazione di omotopia fra cammini ed essa sarà generalmente sottintesa.

Abbiamo inoltre visto che l'integrale curvilineo risulta in effetti definito non da un cammino ma da una curva, cioè da una classe di cammini equivalenti. Il teorema di Cauchy nella sua forma generale afferma che nel caso delle funzioni olomorfe si può andare più lontano e che l'integrale è definito non da una curva ma dalla classe di omotopia (di curve differenziabili a tratti) a cui appartiene questa curva. In altri termini si ha il seguente teorema.

2.13 Teorema (Cauchy)

Se una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ e γ_0, γ_1 sono due cammini omotopi in D (sia che abbiano estremi comuni o siano chiusi) allora

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz. \tag{2.27}$$

■

Dimostrazione. Sia $\gamma : I \times I \to D$ la funzione che definisce l'omotopia dei cammini γ_0 e γ_1. Ricopriamo il quadrato $K = I \times I$ con un sistema di piccoli quadrati K_{mn} $(m,n = 1,\ldots,N)$ in modo che ciascun K_{mn} si sovrapponga con i quadrati contigui (vedi figura 2.5).Poiché la funzione γ è uniformemente continua i quadrati K_{mn} possono essere scelti sufficientemente piccoli perché l'immagine $\gamma(K_{mn})$ sia contenuta in un disco $U_{mn} \subset D$ nel quale la funzione f possiede una primitiva F_{mn} (ci si serve del fatto che localmente ogni funzione olomorfa possiede una primitiva). Fissiamo l'indice m e procediamo come nella dimostrazione del teorema 2.10 della sezione precedente. Scegliamo arbitrariamente una primitiva F_{m1} definita in U_{m1} ed una primitiva F_{m2} definita in U_{m2} e tale che $F_{m1} = F_{m2}$ in $U_{m1} \cap U_{m2}$ (ci si serve del fatto che due primitive di f non possono differire che per una costante in questa intersezione). Scegliamo allo stesso modo le primitive $F_{m3}, \dots, F_{mN}$ (in modo che $F_{m,n+1} = F_{mn}$ in $U_{m,n+1} \cap U_{mn}$) e costruiamo la funzione

$$\Phi_m(s,t) = F_{mn}(\gamma(s,t)) \quad \text{per} \quad (s,t) \in K_{mn}\, (n = 1, \dots, N). \tag{2.28}$$

La funzione Φ_m è manifestamente continua nel rettangolo $K_m = \bigcup_{n=1}^{N} K_{mn}$ ed è definita a meno di una costante additiva. Scegliamo Φ_1 arbitrariamente e Φ_2 in modo tale che $\Phi_1 = \Phi_2$ nell'intersezione $K_1 \cap K_2$. Ciò è possibile perché la funzione $\Phi_1 - \Phi_2$ è costante, in conseguenza del fatto di essere continua e localmente costante sull'insieme connesso $K_1 \cap K_2$. Scegliamo allo stesso modo le funzioni $\Phi_3, \dots, \Phi_N$ (in modo che $\Phi_m = \Phi_{m+1}$ in $K_m \cap K_{m+1}$) e costruiamo la funzione

$$\Phi(s,t) = \Phi_m(s,t) \quad \text{per} \quad (s,t) \in K_m \ (m = 1, \dots, N). \tag{2.29}$$

Per $s \in I$ fisso la funzione $\Phi(s,t)$ è manifestamente una primitiva lungo il cammino $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ e dunque per la formula di Newton–Leibnitz

$$\int_{\gamma_s} f\,dz = \Phi(s,1) - \Phi(s,0). \tag{2.30}$$

Trattiamo separatamente due casi.

a) Supponiamo che γ_1 e γ_2 abbiano gli estremi in comune. Per definizione di omotopia per ogni $s \in I$ si ha allora $\gamma(s,0) = a$ e $\gamma(s,1) = b$. In un opportuno intorno u_0 di s si può scrivere $\Phi(s,0) = F_{m1}(\gamma(s,0))$ e $\Phi(s,1) = F_{mN}(\gamma(s,1))$ per un certo m. Quindi le funzioni $\Phi(s,0)$ e $\Phi(s,1)$ sono localmente costanti in I e dunque costanti su tutto I. Di conseguenza $\Phi(0,0) = \Phi(1,0)$, $\Phi(0,1) = \Phi(1,1)$ e la formula (2.30) comporta la formula (2.27).

b) Supponiamo che γ_1 e γ_2 siano chiusi. Dunque $\gamma(s,0) = \gamma(s,1)$ per ogni $s \in I$. Per ogni s si può scegliere un intorno u_0 di s per cui si può scrivere $\Phi(s,0) = F_{m1}(\gamma(s,0))$ e $\Phi(s,1) = F_{mN}(\gamma(s,1))$ per un certo m. Essendo le due primitive calcolate sugli stessi punti poichè $\gamma(s,0) = \gamma(s,1)$, la differenza $\Phi(s,1) - \Phi(s,0)$ è localmente costante in ogni punto di I e quindi su I. Di conseguenza nuovamente da (2.30) si deduce (2.27). ∎

2.1.4 Prime applicazioni del teorema di Cauchy

Studiamo alcune conseguenze immediate del teorema generale di Cauchy, che, vista la loro importanza, meritano di essere enunciate separatamente.

2.14 Teorema (Cauchy. Caso $\gamma \sim 0$)

Se una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ il suo integrale lungo ogni cammino chiuso $\gamma : I \to D$ omotopo a zero in D è nullo, ossia

$$\int_{\gamma} f\,dz = 0 \quad se \quad \gamma \sim 0. \tag{2.31}$$

∎

Dimostrazione. Poiché il cammino γ è omotopo a zero si può deformarlo ad un punto $a \in D$ ed in seguito ad un cerchio $\gamma_\epsilon = \{|z - a| = \epsilon\}$ di raggio ϵ piccolo a piacere. Dal teorema generale di Cauchy

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_\epsilon} f\,dz$$

e poiché la funzione f è limitata in un intorno del punto a (per fissare le idee $|f(z)| \leq M$) l'integrale del secondo membro tende a zero con ϵ (questo integrale è maggiorato da $M2\pi\epsilon$). Il primo membro è nullo perché non dipende da ϵ. ■

Il teorema di Cauchy prende una formula particolarmente semplice – la sua forma classica – in un dominio semplicemente connesso, perché in tale dominio ogni cammino chiuso è omotopo a zero.

2.15 Teorema (Cauchy. Formulazione classica)

Se una funzione f è olomorfa in un dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$, il suo integrale lungo ogni cammino chiuso $\gamma : I \to D$ è nullo. ■

A causa dell'importanza di questo teorema ne forniamo ancora una dimostrazione elementare sotto le due condizioni supplementari seguenti

1. la derivata f' è continua[2] in D
2. γ è un cammino di Jordan differenziabile a tratti.

Dalla seconda condizione risulta che γ è il bordo di un dominio $G \subset D$ perché D è semplicemente connesso. La prima condizione permette di applicare la formula di Riemann–Green

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy, \tag{2.32}$$

formula la cui dimostrazione implica la continuità in $\overline{G}$ delle derivate parziali delle funzioni P e Q (∂G indica il bordo di G percorso in senso antiorario). Applicando questa formula alle parti reali ed immaginarie dell'integrale

$$\int_{\partial G} f\, dz = \int_{\partial G} u\, dx - v\, dy + i \int_{\partial G} v\, dx + u\, dy$$

si ottiene

$$\int_{\partial G} f\, dz = \iint_G \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy.$$

Utilizzando il simbolo della derivata formale $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ possiamo riscrivere questa relazione nella forma

$$\int_{\partial G} f\, dz = 2i \iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy, \tag{2.33}$$

che può essere considerata la forma complessa della formula di Riemann–Green.

Poiché $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ a causa dell'olomorfia il teorema di Cauchy (sotto le condizioni supplementari riportate) risulta direttamente da questa formula.

Il teorema di Cauchy ci permette di stabilire immediatamente un teorema globale di esistenza della primitiva in un dominio semplicemente connesso.

2.16 Teorema (Primitiva globale)

Ogni funzione f olomorfa in un dominio D semplicemente connesso ammette una primitiva in D. ■

[2] Si vedrà che questa condizione è automaticamente soddisfatta per le funzioni olomorfe.

Dimostrazione. Mostriamo che in D l'integrale di f lungo un cammino non chiuso non dipende da questo cammino ma solamente dai suoi estremi. In effetti, siano γ_1 e γ_2 due cammini di D che congiungono i punti a e b. Senza perdere in generalità si può ammettere che per γ_1 il parametro varî su un intervallo $[\alpha, \beta_1]$ e per γ_2 su un intervallo $[-\beta, -\beta_1]$ ($\alpha < \beta_1 < \beta$). Indichiamo con γ l'unione dei cammini γ_1 e γ_2^-; questa unione è un cammino chiuso contenuto in D. Dalle proprietà degli integrali segue che

$$\int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma} f\,dz$$

e quindi la nostra proposizione, poiché per il teorema 2.15 l'integrale di f lungo ogni cammino chiuso $\gamma \subset D$ è nullo[3].

Fissiamo ora un punto $a \in D$ e supponiamo che sia l'origine di un cammino contenuto in D, la cui estremità z sarà supposta arbitraria. L'integrale di f lungo questo cammino (che indicheremo con $\widehat{az}$) è una funzione del punto z

$$F(z) = \int_{\widehat{az}} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{2.34}$$

Riprendendo alla lettera i ragionamenti che ci sono serviti per stabilire il teorema 2.8 della sezione 2.1.2 ci si assicura che F è olomorfa in D e che $F'(z) = f(z)$ in ogni punto $z \in D$, ossia che F è una primitiva di f su D. ∎

L'esempio della funzione $f = 1/z$ nel dominio $0 < |z| < 2$ mostra che la condizione di semplice connessità del dominio è essenziale in questo teorema. Il teorema globale di esistenza della primitiva è in generale falso nei domini molteplicemente connessi.

Il medesimo esempio mostra che in un dominio molteplicemente connesso l'integrale di una funzione olomorfa lungo un cammino chiuso non è necessariamente nullo, cioè il teorema di Cauchy nella sua forma classica (teorema 2.15) non si generalizza ai domini molteplicemente connessi. Si può tuttavia enunciarlo sotto una forma che permette una tale generalizzazione.

Cominciamo col riformulare il teorema di Cauchy in un dominio semplicemente connesso. Il bordo ∂D di un dominio semplicemente connesso D (se non è troppo irregolare) è una curva chiusa omotopa a zero nell'aderenza $\overline{D}$. Nel caso generale non si può applicare il teorema 2.14 a ∂D, perché la funzione f è definita unicamente su D e può non essere prolungata a ∂D. Se si esige in aggiunta che $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, cioè se f si prolunga ad un dominio $G \supset \overline{D}$ il teorema 2.14 sarà valido ed otteniamo il teorema di Cauchy nella forma seguente.

2.17 Teorema (Cauchy. Dominio semplicemente connesso)

Se una funzione f è olomorfa nell'aderenza $\overline{D}$ di un dominio semplicemente connesso D, limitato da una curva differenziabile a tratti, l'integrale di f lungo questa curva è nullo. ∎

Il teorema 2.17 si generalizza egualmente ai domini molteplicemente connessi se si introduce la seguente definizione.

2.18 DEFINIZIONE (FRONTIERA ORIENTATA)

Supponiamo che la frontiera di un dominio D compatto[4] sia costituita da un numero finito di curve chiuse γ_k ($k = 0, \ldots, n$). Supponiamo che la frontiera esterna γ_0, cioè la curva che che separa i punti di D dal punto all'infinito, sia orientata in senso antiorario, e che le

[3] Si può dedurre questa proposizione direttamente dal teorema generale di Cauchy se ci serve del fatto che in un dominio semplicemente connesso due cammini qualunque di estremi comuni sono omotopi.

[4] Ricordiamo che un dominio D è *compatto se* la sua aderenza in $\overline{\mathbb{C}}$ non contiene il punto all'infinito ($D \Subset \mathbb{C}$).

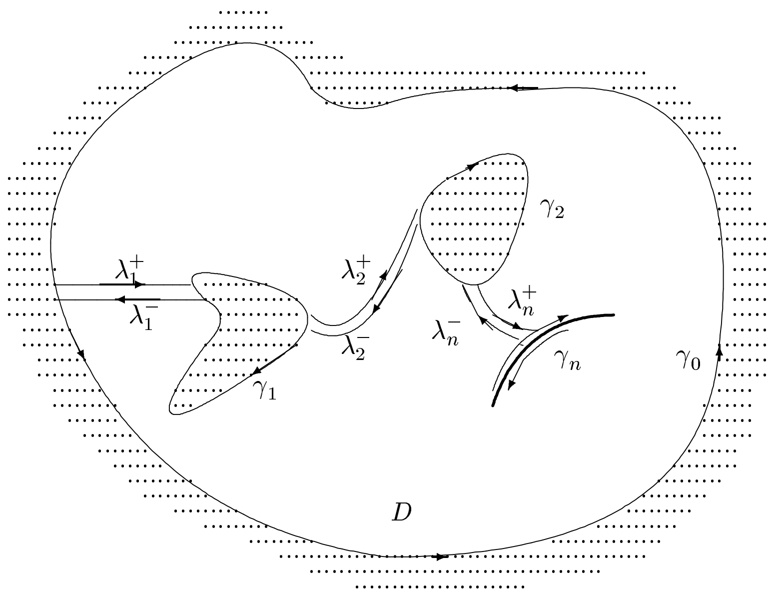


Figura 2.6: Riduzione dell'ordine di molteplicità

altre curve di frontiera γ_k ($k = 1, \ldots, n$) siano orientate in senso orario (ossia le curve sono orientate in tal modo che il dominio resti sempre alla sinistra del senso del percorso). La frontiera del dominio D munita di una tale orientazione sarà chiamata *frontiera orientata* ed indicata col simbolo ∂D. ■

Il teorema di Cauchy per i domini molteplicemente connessi può infine essere formulato come segue.

2.19 Teorema (Cauchy. Dominio molteplicemente connesso)

Supponiamo che un dominio compatto D sia limitato da un numero finito di curve differenziabili a tratti e che f sia una funzione olomorfa nell'aderenza $\overline{D}$. Allora l'integrale di f lungo la frontiera orientata ∂D è nullo

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_{\gamma_0} f\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f\,dz = 0. \tag{2.35}$$

■

Dimostrazione. Colleghiamo le componenti della frontiera di D con un numero finito di tagli $\lambda_\nu^\pm$ (vedi figura 2.6). È evidente che la curva chiusa Γ che è composta della frontiera orientata ∂D e degli insiemi $\Lambda^+ = \bigcup \lambda_k^+$ e $\Lambda^- = \bigcup \lambda_k^-$ è omotopo a zero in un dominio $G \supset \overline{D}$ [5] nel quale f, per ipotesi, si prolunga rimanendo una funzione olomorfa. Dal teorema 2.14 si deduce che l'integrale di F lungo Γ è nullo e per le proprietà dell'integrale che

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \int_{\partial D} f\,dz + \int_{\Lambda^+} f\,dz + \int_{\Lambda^-} f\,dz = \int_{\partial D} f\,dz$$

perché gli integrali di f lungo Λ^+ e Λ^- sono uguali ed opposti. ■

[5] Si può provarlo per ricorrenza sul numero delle componenti di ∂D. Osserviamo tuttavia che la dimostrazione formale di questa affermazione è assai laboriosa.

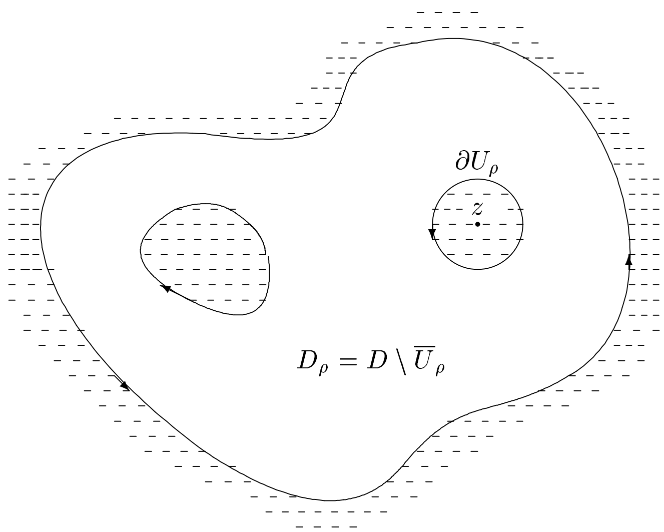


Figura 2.7: Il dominio D_ρ

2.1.5 Problemi

1. Utilizzando la definizione di integrazione complessa, calcolare l'integrale $\oint_C f(z)\, dz$, dove C è il circolo unità centrato nell'origine $C : z = e^{it}$ e dove $f(z)$ è dato da

$$z^2, \qquad \overline{z}^2, \qquad \frac{z+1}{z^2}.$$

2.2 Formula integrale di Cauchy

Ci proponiamo di rappresentare le funzioni olomorfe in un dominio compatto con l'aiuto di un integrale lungo la frontiera di questo dominio. Vedremo che questa rappresentazione possiede delle importanti applicazioni sia nei problemi teorici che pratici.

2.20 Teorema (Rappresentazione integrale di Cauchy)
Sia f una funzione olomorfa nell'aderenza $\overline{D}$ di un dominio compatto limitato da un numero finito di curve (differenziabili a tratti). Allora per ogni $z \in D$ la funzione f si può rappresentare nella forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{2.36}$$

dove ∂D è la frontiera orientata di D.

Il secondo membro di questa formula si chiama integrale di Cauchy. ∎

Dimostrazione. Scegliamo $\rho > 0$ tale che il disco $U_\rho = \{z' : |z' - z| < \rho\} \Subset D$ e poniamo $D_\rho = D \backslash \overline{U}_\rho$ (vedi figura 2.7). La funzione $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ è olomorfa in $\overline{D}_\rho$ in quanto rapporto di due funzioni olomorfe il cui denominatore è $\neq 0$. La frontiera ∂D_ρ è costituita da

∂D e dal cerchio $\partial U_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$ orientato in senso orario. Dunque per le proprietà degli integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho} g\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Ora la funzione g è olomorfa in $\overline{D}_\rho$ (abbiamo eliminato la singolarità in z) e dunque vale il teorema di Cauchy per i domini molteplicemente connessi in virtù del quale l'integrale di g lungo ∂D_ρ è nullo.

Di conseguenza

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{2.37}$$

dove il numero $\rho > 0$ può essere preso piccolo quanto si vuole. Poiché la funzione f è continua nel punto z, per ogni $\epsilon > 0$ si puo scegliere un numero $\delta > 0$ sufficientemente piccolo perché per $\rho < \delta$ si abbia

$$|f\zeta) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{per ogni} \quad \zeta \in \partial U_\rho.$$

Dunque la differenza[6]

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{2.38}$$

è $< \frac{1}{2\pi}\epsilon \cdot 2\pi = \epsilon$ in modulo e quindi tende a 0 con ρ. Ma si vede dalla (2.37) che il primo membro della (2.38) è indipendente da ρ e quindi è nullo, cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Questa formula e la (2.37) comportano la (2.36). ■

Osservazione. Se nelle condizioni del teorema 2.20 il punto z è esterno a $\overline{D}$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0. \tag{2.39}$$

Questa asserzione risulta direttamente dal teorema di Cauchy, perché la funzione $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ è olomorfa in $\overline{D}$. ■

La formula integrale di Cauchy traduce un fatto molto interessante. I valori di una funzione olomorfa in un dominio $\overline{G}$ sono interamente definiti dai valori sulla frontiera ∂G. Questo fatto distingue le funzioni olomorfe dalle funzioni $\mathbb{R}$–differenziabili.

2.21 Teorema (della media)

Il valore di una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ in ciascun punto finito $z \in D$ è uguale alla media aritmetica dei suoi valori su ogni cerchio di raggio ρ sufficientemente piccolo centrato in z

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})\,dt. \tag{2.40}$$

■

[6] Ci si è serviti del fatto che $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo un disco $U_\rho = \{z' : |z' - z| < \rho\}$ tale che $U_\rho \Subset D$ e prendiamolo come dominio G del teorema 2.20. La formula integrale di Cauchy ci dà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \tag{2.41}$$

e poiché su ∂U_ρ si ha $\zeta - z = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $d\zeta = \rho i e^{it} dt$, la formula (2.41) si riduce alla (2.40). ■

Mostriamo in conclusione la formula della rappresentazione integrale delle funzioni $\mathbb{R}$–differenziabili che generalizza la formula integrale di Cauchy.

2.22 Teorema (Cauchy–Green)

Sia f una funzione di classe C^1 nell'aderenza $\overline{D}$ di *un dominio compatto D limitato da un numero finito di curve differenziabili a tratti. In ogni punto $z \in D$ si ha allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi \, d\eta}{\zeta - z}. \tag{2.42}$$

■

La formula (2.42) si chiama *formula di Cauchy–Green.* Se $f \in \mathcal{O}(D)$ l'integrale doppio scompare e si riottiene la formula di Cauchy.

Dimostrazione. Eliminiamo dal dominio D un piccolo disco $\overline{U}_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| \leq \rho\}$ e applichiamo la formula di Riemann–Green nella sua forma complessa (2.33) alla funzione $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ di classe C^1 nel dominio $D_\rho = D \backslash \overline{U}_\rho$ dopo aver osservato che $\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z}$ perché la funzione $\frac{1}{\zeta - z}$ dipende olomorficamente da ζ e la sua derivata rispetto a $\overline{\zeta}$ è nulla. Si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{\pi} \iint_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{d\xi \, d\eta}{\zeta - z}. \tag{2.43}$$

Poiché la funzione f è continua in z, si ha $f(\zeta) = f(z) + O(\rho)$ per $\zeta \in U_\rho$, dove $O(\rho) \to 0$ con ρ. Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta &= f(z) \int_{\partial U_\rho} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta + \int_{\partial U_\rho} \frac{O(\rho)}{\zeta - z} \, d\zeta \\ &= 2\pi i f(z) + O(\rho) \end{aligned}$$

ed inserendo nella (2.43) si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - f(z) = \lim_{\rho \to 0} \iint_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\xi \, d\eta}{\zeta - z}.$$

Poiché $f \in C^1(\overline{D})$ l'integrale doppio della 2.42 esiste (ce se ne può assicurare passando a coordinate polari di origine z), il limite del membro a destra fornisce proprio quest'integrale ed il teorema risulta dimostrato. ■

2.2.1 Problemi

1. Calcolare l'integrale $\oint_C f(z) \, dz$, dove C è il circolo unità centrato nell'origine $C : z = e^{it}$ e dove $f(z)$ è dato da

$$\begin{gathered} 1 + 2z + z^2, \quad \frac{1}{(z - 1/2)^2}, \quad \frac{1}{\overline{z}}, \quad z\overline{z}, \quad e^{\overline{z}}, \\ e^{iz}, \quad e^{z^2}, \quad \frac{1}{z^2 - 4}, \quad \frac{1}{2z^2 + 1}, \quad \sqrt{z - 4}. \end{gathered}$$

2. Sia C il quadrato unitario con i vertici diagonali opposti a $-1-i$ e a $1+i$. Calcolare l'integrale $\oint_C f(z)\, dz$, dove $f(z)$ è dato da

$$\sin z, \quad \frac{1}{2z+1}, \quad \overline{z}, \quad \mathrm{Re}\, z.$$

3. Usare la determinazione principale di $\log z$ e di $z^{-1/2}$ per calcolare

$$\int_{-1}^{1} \log z\, dz, \quad \int_{-1}^{1} z^{-1/2} dz$$

scegliendo -1 sopra e sotto il taglio lungo l'asse reale negativo.

2.3 Serie di Taylor

In questa sezione ci proponiamo, partendo dalla formula integrale di Cauchy, di rappresentare le funzioni olomorfe come somma di serie di potenze (serie di Taylor).

Ricordiamo le nozioni elementari di analisi relative alle serie. Si dice che una serie (di numeri complessi) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *convergente* se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ possiede un limite finito s chiamato *somma* della serie.

Si dice che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ definite su un insieme $M \subset \mathbb{C}$ è *uniformemente convergente* su M se converge in ogni punto di M e se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq N$ i resti $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \epsilon$ per ogni z di M.

Si dimostra esattamente come in analisi reale che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente su un insieme M se converge la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||$, dove $||f_n|| = \sup_{z\in M} |f_n(z)|$. Si dimostra allo stesso modo che la somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue su un insieme M è continua su questo insieme e che una serie di funzioni continue convergente uniformemente su una curva (di classe C^1 o rettificabile) può essere integrata termine a termine lungo la curva.

2.3.1 Serie di Taylor

Il teorema seguente è fondamentale in teoria delle funzioni di una variabile complessa.

2.23 Teorema (Taylor)
Una funzione f olomorfa in un dominio D è sviluppabile per ogni $a \in D$ in una serie di potenze di $z-a$ in ogni disco $U = \{z : |z-a| < R\} \subset D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2.44}$$

■

Dimostrazione. Sia z un punto arbitrario di U. Scegliamo un numero r tale che $|z-a| < r < R$ ed indichiamo con γ_r il cerchio $\{\zeta : |\zeta - a| = r\}$ (vedi figura 2.8). La formula integrale di Cauchy ci dà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

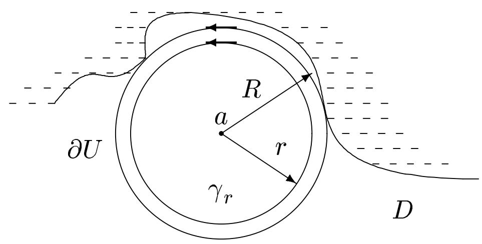


Figura 2.8: Disco di convergenza uniforme della serie di Taylor

Per rappresentare f con una serie di potenze sviluppiamo il “nucleo” di questa formula in una progressione geometrica di $(z-a)/(\zeta-a)$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \tag{2.45}$$

moltiplichiamo i due membri per $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ ed integriamo termine a termine su γ_r. La progressione (2.45) converge uniformemente ed assolutamente in ζ su γ_r, perché $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} = q < 1$ per ogni $\zeta \in \gamma_r$. L'uniformità della convergenza non è violata dalla moltiplicazione per la funzione $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ continua e quindi limitata su γ_r. L'integrazione termine a termine è dunque lecita e si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta\, (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2.46}$$

■

2.24 Definizione (Serie di Taylor)

La serie di potenze (2.44) i cui coefficienti sono definiti dalla 2.46 si chiama *serie di Taylor* della funzione f nell'intorno di a o di centro a. ■

Il teorema di Cauchy sull'omotopia ci dice che i coefficienti c_n della serie di Taylor, definiti dalla (2.46), non dipendono dal raggio r della circonferenza γ_r $(0 < r < R)$ ed anzi γ_r può essere sostituita da una qualunque curva chiusa $\gamma \subset U$ che racchiude il punto a.

Segnaliamo alcune semplici conseguenze del teorema 2.23.

2.25 Corollario (Diseguaglianze di Cauchy)

Sia f una funzione olomorfa in un disco chiuso $\overline{U} = \{z : |z-a| \le r\}$ e sia $M(r)$ il massimo del modulo f sul cerchio $\gamma_r = \partial U$. I coefficienti della serie di Taylor di f nell'intorno di a soddisfano alle diseguaglianze

$$|c_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2.47}$$

■

Dimostrazione. Poiché $|f(\zeta)| \leq M(r)$ su γ_r, le formule (2.46) ci danno

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}. \qquad \blacksquare$$

Dalle diseguaglianze di Cauchy discende il seguente interessante teorema.

2.26 Teorema (Liouville)

Se una funzione f è olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$ allora è costante. ■

Dimostrazione. Per il teorema 2.23 in ogni disco chiuso $\overline{U} = \{z : |z| \leq R\}$, $R < \infty$, la funzione f è rappresentata dalla serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

i cui coefficienti sono indipendenti da R. Essendo la funzione f limitata su $\mathbb{C}$ (per fissare le idee $|f(z)| \leq M$), le diseguaglianze di Cauchy implicano che $|c_n| \leq M/R^n$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$ Si può prendere R grande quanto si vuole e dunque per $n = 1, 2, \ldots$ il secondo membro tende a 0 quando $R \to \infty$. Ora il primo membro è indipendente da R e quindi $c_n = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$ e $f(z) \equiv c_0$. ■

2.3.2 Serie di potenze

Il teorema 2.23 afferma che una qualunque funzione olomorfa in un disco può essere rappresentata in questo disco come somma di una serie di potenze convergente. Ci proponiamo di provare il reciproco, cioè che la somma di una qualunque serie di potenze convergente è una funzione olomorfa. Ricordiamo a questo fine alcune proprietà delle serie di potenze che sono conosciute dai corsi di analisi reale.

2.27 Lemma

Se i termini di una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.48}$$

sono limitati in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, cioè se

$$|c_n(z_0 - a)^n| \leq M \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2.49}$$

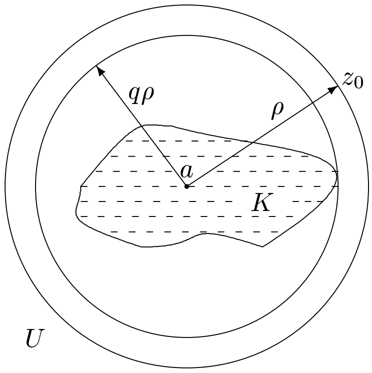
questa serie converge nel disco aperto U_ρ di centro a e raggio $\rho = |z_0 - a|$, converge assolutamente ed uniformemente in ogni disco chiuso $\overline{U}_{q\rho}$ con $q < 1$ (vedi figura 2.9).

Dimostrazione. Per ogni punto $z \in \overline{U}_{q\rho}$ ed ogni $n = 0, 1, \ldots$, si ha

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n|\rho^n q^n.$$

Ora $|c_n|\rho^n \leq M$ per ipotesi (cf. (2.49)) e quindi per ogni $z \in \overline{U}_{q\rho}$ la serie (2.48) è maggiorata dalla progressione geometrica convergente $M\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ed è convergente uniformemente su $\overline{U}_{q\rho}$.

Abbiamo così provato la seconda proposizione del lemma. Quanto alla prima essa consegue dalla seconda, perché ogni punto $z' \in U$ è contenuto in un disco $\{z : |z-a| < \rho'\}$, $|z'-a| < \rho' < \rho$ appartenente propriamente ad U. ■



■

Figura 2.9: Insieme di convergenza assoluta ed uniforme di una serie di potenze

Si noti che in particolare la serie 2.48 converge assolutamente ed uniformemente su ogni insieme $K \Subset U_\rho$.

2.28 Teorema (Abel)

Se una serie di potenze (2.48) converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ allora essa converge nel disco $U = \{z : |z-a| < |z_0 - a|\}$ e converge assolutamente e uniformemente su tutti i sottoinsiemi compatti di U. ■

Dimostrazione. Poiché la serie (2.48) converge in z_0 il termine generale $c_n(z_0 - a)^n$ della serie numerica corrispondente tende a 0. Ora ogni serie convergente è limitata e dunque la condizione del lemma è soddisfatta. Il lemma implica le due proposizioni del teorema. ■

2.29 Teorema (Formula di Cauchy–Hadamart)

Sia data una serie di potenze (2.48) tale che

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}, \tag{2.50}$$

dove $0 \le R \le \infty$ (si conviene che $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$). Allora la serie (2.48) converge all'interno del disco $\{z : |z-a| < R\}$ e diverge all'esterno. ■

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso reale. ■

Per $\max\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ si intende il massimo limite della successione $\sqrt[n]{|c_n|}$ ossia $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|c_k|}$.

Il disco aperto del teorema si chiama *disco di convergenza* della serie di potenze (2.48) ed il numero R *raggio di convergenza.*

Proviamo ora che la somma di una serie di potenze è una funzione olomorfa.

2.30 Teorema (Somma di una serie di potenze)

La somma della serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.51}$$

è olomorfa nel disco di convergenza della serie. ■

Dimostrazione. Ammettiamo che il raggio di convergenza $R > 0$, perché altrimenti non vi è nulla da dimostrare. Consideriamo la serie formale

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} = \phi(z). \tag{2.52}$$

Questa serie converge o diverge come la serie $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^n$ e, poiché $\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, il raggio di convergenza della serie (2.52) è anch'esso uguale a R. La serie (2.52) converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti del disco $U = \{z : |z-a| < R\}$ e dunque la funzione ϕ è continua in U.

Sempre grazie alla convergenza uniforme la serie (2.52) può essere integrata termine a termine sulla frontiera di ogni triangolo $\Delta \Subset U$

$$\int_{\partial\Delta} \phi\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{\partial\Delta} (z-a)^{n-1} dz = 0.$$

Per il teorema di Cauchy tutti gli integrali del secondo membro sono nulli e quindi lo è anche il primo membro. Di conseguenza si può applicare il teorema 2.8 della sezione 2.1.2 e l'osservazione che lo segue in virtù della quale la funzione

$$\int_{[a,z]} \phi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[a,z]} (\zeta-a)^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

(ci si serve nuovamente della convergenza uniforme) ammette in ogni punto $z \in U$ una derivata uguale a $\phi(z)$. Ma allora la funzione

$$f(z) = c_0 + \int_{[a,z]} \phi(\zeta)\, d\zeta$$

ammette in ogni punto $z \in U$ una derivata $f'(z) = \phi(z)$. ■

2.3.3 Ulteriori proprietà delle funzioni olomorfe

Segnaliamo alcuni corollari del teorema di olomorfia della somma di una serie di potenze.

2.31 Teorema (Olomorfia della derivata)

La derivata di ogni funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ è olomorfa in D. ■

Dimostrazione. Per ogni punto $a \in D$ costruiamo un disco $U = \{z : |z-a| < R\} \subset D$. Per il teorema (2.23) della sezione 2.3.1 la funzione f si può rappresentare in U come somma di una serie di potenze. Per il teorema 2.30 della medesima sezione la derivata $f' = \phi$ si rappresenta con una serie convergente nel medesimo disco U. Dunque si può applicare nuovamente il teorema 2.30 a ϕ e ϕ è $\mathbb{C}$–differenziabile in U. ■

Questo teorema implica immediatamente che condizione necessaria perché una funzione f ammetta una primitiva è che essa sia olomorfa.

2.32 Corollario

Ogni funzione olomorfa in D possiede delle derivate di ogni ordine che sono anch'esse olomorfe in D. ■

Il teorema seguente stabilisce l'unicità dello sviluppo di una funzione in una serie di potenze nell'intorno di un punto dato.

2.33 Teorema (Taylor. Formulazione classica)
Se una funzione f si rappresenta in un disco $\{z : |z-a| < R\}$ come somma di una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.53}$$

i coefficienti di questa serie sono definiti in maniera unica dalle formule

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{2.54}$$

■

Dimostrazione. Ponendo $z = a$ in (2.53) si trova $f(a) = c_0$. Derivando la (2.53) termine a termine, ossia

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \cdots,$$

e ponendo $z = a$ si ottiene $f'(a) = c_1$. La derivata n-ma della (2.53)

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + c_1'(z-a) + c_2'(z-a)^2 + \cdots$$

(si ommette la scrittura delle espressioni dei coefficienti) e la sostituzione $z = a$ fornisce $n!c_n = f^{(n)}(a)$. ■

Il teorema 2.33 è a volte formulato dicendo che *ogni serie di potenze convergente è la serie di Taylor della sua somma.*

Confrontando i valori di c_n calcolati colla formula (2.54) con quelli calcolati con la formula (2.55) della sezione 2.3.1 si ottengono le formule seguenti per le derivate di una funzione olomorfa

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.55}$$

Se f è una funzione olomorfa in un dominio D e $G \Subset D$ è un dominio limitato da un numero finito di curve continue e tale che $a \in G$, si può, servendosi dell'invarianza dell'integrale per una deformazione omotopa del contorno, rimpiazzare nella formula γ_r con il contorno orientato ∂G. Si ottengono le formule di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{2.56}$$

(si scrive z in luogo di a e si ammette che $z \in G$).

Queste formule si possono ottenere a partire dalla formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

derivando rispetto a z sotto il segno di integrale. Il ragionamento indiretto che abbiamo fatto ci evita l'obbligo di dimostrare la legittimità di questa operazione.

2.34 Teorema (Morera)
Se una funzione f è continua in un dominio D ed il suo integrale lungo il contorno $\partial\Delta$ di ogni triangolo $\Delta \Subset D$ è nullo allora $f \in \mathcal{O}(D)$. ■

Dimostrazione. Per ogni punto $a \in D$ costruiamo il disco $U = \{z : |z - a| < r\} \subset D$. La funzione $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta$ è olomorfa in U e $F'(z) = f(z)$ in ogni punto $z \in U$ (cf. l'osservazione che segue il teorema 2.8 della sezione 2.1.2. Dal teorema 2.31 segue che f è olomorfa in U. Ciò prova che f è olomorfa in ogni punto $a \in D$. ∎

Osservazione. Il teorema di Morera è il reciproco del teorema di Cauchy nella formulazione della sezione 2.1.2, ossia il reciproco dell'affermazione che l'integrale di una funzione olomorfa in un dominio D lungo il contorno di un triangolo qualunque $\Delta \Subset D$ è nullo. Si noti tuttavia che il teorema contiene una condizione supplementare di continuità della funzione f. Questa condizione è essenziale. Ad esempio l'integrale di una funzione dappertutto nulla in $\mathbb{C}$ salvo in un punto ove è uguale a 1, preso lungo il contorno di un triangolo qualunque, è nullo e tuttavia questa funzione non è olomorfa, anzi non è nemmeno continua. ∎

Enumeriamo in conclusione i risultati relativi all'equivalenza delle diverse definizioni di olomorfia di una funzione in un punto.

2.35 Teorema (Olomorfia alla Riemann, Cauchy e Wierstrass)

Le tre proposizioni seguenti sono equivalenti.

(R) *La funzione f è $\mathbb{C}$–differenziabile in un intorno U* di *un punto a.*

(C) *La funzione f è continua in un intorno U* di *un punto a ed il suo integrale lungo la frontiera $\partial\Delta$ di un qualunque triangolo $\Delta \Subset U$ è nullo.*

(W) *La funzione f si sviluppa in una serie di potenze convergente in un intorno U di un punto a.* ∎

Queste tre proposizioni traducono tre concezioni nell'elaborazione della teoria delle funzioni olomorfe. In generale una funzione è chiamata rispettivamente olomorfa alla Riemann, olomorfa alla Cauchy o olomorfa alla Weierstrass a seconda che soddisfi alla condizione (R), (C) o (W).

L'implicazione (R) $\Rightarrow$ (C) è stata provata dal teorema di Cauchy, l'implicazione (C) $\Rightarrow$ (W) dal teorema di Morera e di Taylor e l'implicazione (W) $\Rightarrow$ (R) dal teorema di olomorfia della somma di una serie di potenze.

2.3.4 Teorema di unicità

2.36 Definizione (Zero di una funzione)
Si chiama *zero* di una funzione f ogni punto $a \in \mathbb{C}$ nel quale questa funzione si annulla, cioè ogni radice dell'equazione $f(z) = 0$. ∎

In analisi reale gli zeri di una funzione derivabile possono avere dei punti di accumulazione nei quali questa funzione resta derivabile (è il caso ad esempio del punto $x = 0$ per la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$). In analisi complessa invece gli zeri di una funzione olomorfa sono necessariamente isolati, non possono avere dei punti di accumulazione che sulla frontiera del dominio nel quale questa funzione è olomorfa[7]. Questo fatto si traduce nel seguente teorema.

2.37 Teorema (Zeri)

[7]Osserviamo che la funzione $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ non è olomorfa in $z = 0$ perché quando $z \to 0$ lungo certe direzioni (per esempio seguendo l'asse immaginario) $\sin(1/z)$ tende all'infinito più rapidamente di ogni potenza di $1/z$.

Se un punto a è uno zero di una funzione f olomorfa in a e non identicamente nulla in alcun intorno di a, esiste un intero naturale $n > 0$ tale che

$$f(z) = (z-a)^n \phi(z), \tag{2.57}$$

dove la funzione ϕ è olomorfa in a e non nulla in un intorno di a. L'intero n è univocamente determinato e si chiama ordine *o* molteplicità dello zero. ■

Dimostrazione. La funzione f si può sviluppare in una serie di potenze in un intorno di a. Il termine costante di questa serie è nullo perché $f(a) = 0$, ma gli altri coefficienti non possono essere tutti nulli, perché si avrebbe $f \equiv 0$ in un intorno di a. Esiste dunque un coefficiente non nullo di un rango che indicheremo con n per fissare le idee e lo sviluppo si scrive

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots, \qquad c_n \neq 0, \qquad n > 0 \tag{2.58}$$

ossia

$$\phi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots$$

Poiché questa serie è convergente in un intorno di a, la sua somma $\phi(z)$ è una funzione olomorfa in questo intorno. Poiché $\phi(a) = c_n \neq 0$ deve essere $\phi \neq 0$ in un intorno di a grazie alla continuità di ϕ.

Dimostriamo ora che n è univocamente determinato. Supponiamo per assurdo che esista un altro $\widetilde{n}$ per cui

$$f(z) = (z-a)^{\widetilde{n}} \widetilde{\phi}(z)$$

con $\widetilde{\phi}(z)$ olomorfa e diversa da zero in a. Sia ad esempio $\widetilde{n} > n$. Allora

$$\phi(z) = (z-a)^{\widetilde{n}-n} \widetilde{\phi}(z)$$

avrebbe uno zero in $z = a$. Dalla contraddizione segue l'unicità di n. ■

Se ricordiamo l'espressione (2.54) per i coefficienti della serie di Taylor della funzione f abbiamo che un punto a è uno zero di ordine n di f se

$$f(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0. \tag{2.59}$$

In altri termini l'ordine o molteplicità di uno zero a di una funzione f olomorfa in a è l'ordine della prima derivata $f^{(k)}(a)$ non nulla.

La nozione di ordine di uno zero può essere generalizzata agli A–punti di una funzione olomorfa. Si chiama *A–punto* di una funzione f un punto $a \in \mathbb{C}$ tale che $f(a) = A$. Si chiama *ordine* di un A–punto a di una funzione f olomorfa in a l'ordine dello zero della funzione $f(z) - A$.

2.38 Teorema (Unicità)

Se due funzioni f_1, $f_2 \in \mathcal{O}(D)$ sono uguali su un insieme E che *possiede almeno un punto di accumulazione $a \in D$, allora $f_1 = f_2$ in tutto D.* ■

Dimostrazione. La funzione $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(D)$. Bisogna mostrare che $f \equiv 0$ in D, cioè che l'insieme $F = \{z \in D : f(z) = 0\} \supset E$ coincide con D. In conseguenza della continuità della f il punto di accumulazione a è una zero della f. Per il teorema 2.37 la funzione $f \equiv 0$ in un intorno de a, perché altrimenti questo punto sarebbe uno zero isolato in contraddizione con l'ipotesi che sia un punto di accumulazione dell'insieme degli zeri di f.

Dunque l'interno $\overset{\circ}{F}$ dell'insieme F (cioè l'insieme dei suoi punti interni) non è vuoto perché contiene il punto a. Per costruzione $\overset{\circ}{F}$ è aperto, ma è anche chiuso per la topologia relativa del dominio D. Infatti se $b \in D$ è un punto di accumulazione di $\overset{\circ}{F}$ è un punto di accumulazione di zeri e quindi, grazie allo stesso argomento usato per a, la funzione $f \equiv 0$ in un intorno del punto b, ossia $b \in \overset{\circ}{F}$. Essendo il dominio D connesso per definizione, il teorema 1.6 della sezione 1.1 ci dice che $\overset{\circ}{F} = D$. ∎

Il teorema ora dimostrato mette in rilievo la differenza fondamentale che esiste fra la nozione di olomorfia di una funzione e la nozione di $\mathbb{R}$–differenziabilità. Infatti due funzioni di variabile reale, anche infinitamente differenziabili, possono coincidere su una parte di un dominio senza essere identicamente uguali. Invece il teorema appena dimostrato ci dice che due funzioni olomorfe che coincidono su un insieme qualunque che possiede un punto di accumulazione appartenente al dominio ove sono olomorfe (per esempio su un piccolo disco od arco appartenente a questo dominio) sono didenticamente uguali su tutto il dominio.

2.3.5 Teorema di Weierstrass

Si sa che in analisi reale la derivazione termine a termine di una serie è possibile quando la serie stessa e la serie delle sue derivate convergono uniformemente. In analisi complessa la situazione è più semplice.

2.39 Teorema (Weierstrass)

Se una serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{2.60}$$

di funzioni olomorfe in un dominio D converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di D, allora

1. *la somma f di questa serie è olomorfa in D;*
2. *la serie f è derivabile termine a termine in ogni punto di D quante volte si vuole.* ∎

Dimostrazione. Sia $a \in D$ un punto arbitrario e sia $U = \{z : |z-a| < r\} \Subset D$. Essendo la serie (2.60) convergente uniformemente per ipotesi su $\overline{U}$ ed i suoi termini continui in $\overline{U}$, la sua somma f è continua in $\overline{U}$. Indichiamo con $\partial\Delta$ il bordo orientato di un triangolo $\Delta \Subset U$. Essendo la serie (2.60) uniformemente convergente su $\partial\Delta$ possiamo integrarla termine a termine su $\partial\Delta$

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial\Delta} f_n dz.$$

Poiché le funzioni f_n sono olomorfe in U, gli integrali del secondo membro sono tutti nulli per il teorema di Cauchy. Dunque anche l'integrale di f su $\partial\Delta$ è nullo. Il teorema di Morera ci dice allora che f è olomorfa in U. Ciò prova la proposizione 1).

Per provare la 2) prendiamo un punto arbitrario $a \in D$, costruiamo un disco $U = \{z : |z-a| < r\} \Subset D$ ed indichiamo con $\gamma_r = \partial U$ il cerchio $\{z : |z-a| = r\}$. La formula di Cauchy per le derivate ci fornisce

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.61}$$

La serie

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-a)^{k+1}} \tag{2.62}$$

è uniformemente convergente su γ_r (differisce dalla (2.60) di un fattore il cui modulo è uguale a $r^{1/(k+1)}$ su γ_r) e quindi può essere inserita nell'integrale (2.61) ed integrata termine a termine. Si ottiene, utilizzando la formula (2.61) per le funzioni f_n,

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(a),$$

che prova la proposizione 2). ■

2.4 Serie di Laurent e punti singolari

Le serie di Taylor sono delle utili rappresentazioni in serie di potenze di funzioni olomorfe in un disco. Ci occupiamo in questa sezione delle serie più generali di potenze positive e negative di $(z-a)$. Queste serie rappresentano delle funzioni olomorfe in corone circolari

$$V = \{z : r < |z-a| < R\}, \quad r \geq 0, \quad R \leq \infty.$$

Questi sviluppi sono particolarmente importanti nelle corone circolari il cui cerchio interno ha raggio nullo, cioè negli intorni (cosiddetti bucati) privati del punto centrale. Infatti sono questi gli intorni che si debbono considerare quando si studiano le funzioni olomorfe nell'intorno di punti isolati in cui l'olomorfia è violata (punti singolari isolati).

2.4.1 Serie di Laurent

Consideriamo dapprima le proprietà fondamentali delle serie a potenze positive e negative di $z-a$. Definiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.63}$$

come la somma delle due serie

$$(\Sigma_1): \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{e} \quad (\Sigma_2): \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2.64}$$

La serie (Σ_1) è una serie di potenze ordinaria ed il suo dominio di convergenza è il disco $\{z : |z-a| < R\}$, dove il numero R è definito dalla formula di Cauchy–Hadamart

$$\frac{1}{R} = \max_{n\to\infty}\lim \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{2.65}$$

La serie (Σ_2) è una serie di potenze ordinaria di $Z = 1/(z-a)$

$$(\Sigma_2): \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} Z^n \tag{2.66}$$

e dunque il suo dominio di convergenza è il "disco" esterno al cerchio $\{\zeta : |\zeta - a| = r\}$, dove

$$r = \max_{n\to\infty} \lim \sqrt[n]{|c_{-n}|} \tag{2.67}$$

come risulta dalla formula di Cauchy–Hadamart applicata alla serie (2.66). Il numero R non è necessariamente più grande di r e dunque il dominio di convergenza della serie (2.63) può essere vuoto. Ma se $r < R$ il dominio di convergenza della serie (2.63) sarà la corona circolare $V = \{z : r < |z - a| < R\}$. Osserviamo che l'insieme dei punti di convergenza della serie (2.63) può differire da V per un insieme di punti appartenenti a ∂V.

Per il teorema di Abel la serie (2.63) converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di V e quindi (per il teorema di Weierstrass) la somma è olomorfa in V.

2.40 Teorema (Laurent)

Ogni funzione f olomorfa in una corona circolare $V = \{z : r < |z - a| < R\}$ può essere rappresentata in V come somma di una serie di potenze a potenze positive e negative

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.68}$$

i cui coefficienti sono definiti dalla formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{2.69}$$

dove $r < \rho < R$. ∎

Dimostrazione. Fissiamo un punto arbitrario $z \in V$ e costruiamo una corona circolare $V' = \{\zeta : r' < |\zeta - a| < R'\}$ tale che $z \in V' \Subset V$. La formula integrale di Cauchy ci dà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2.70}$$

dove i cerchi $\Gamma' = \{\zeta : |\zeta - a| = R'\}$ e $\gamma' = \{\zeta : |\zeta - a| = r'\}$ sono orientati in senso antiorario (vedi figura 2.10).

Per ogni $\zeta \in \Gamma'$ si ha $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = q < 1$ e dunque la progressione geometrica

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

converge assolutamente ed uniformemente in ζ su Γ'. Moltiplicandola per la funzione $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ limitata su Γ'(ciò che non viola la convergenza uniforme) e integrando termine a termine su Γ' si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.71}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.72}$$

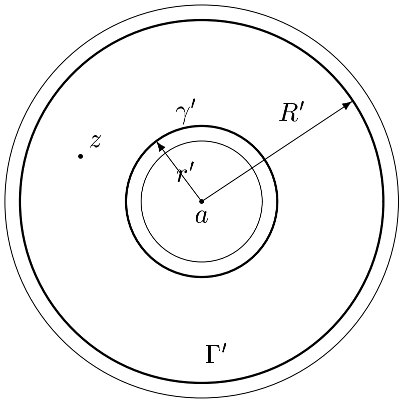


Figura 2.10: Corone circolare di convergenza e di convergenza uniforme

Il secondo integrale della formula (2.70) deve essere sviluppato in un altro modo. Per ogni $\zeta \in \gamma'$ si ha $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = q_1 < 1$ e dunque si può scrivere la seguente serie geometrica

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Moltiplicando per la funzione $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ limitata su γ' ed integrando termine a termine su γ' si trova

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}, \tag{2.73}$$

dove

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.74}$$

Nelle formula (2.73) e (2.74) rimpiazziamo ora l'indice n con l'indice $-n$ e poniamo

$$c_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1} d\zeta \qquad (n = -1, -2, \dots). \tag{2.75}$$

Lo sviluppo (2.73) diviene allora

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2.76}$$

Inseriamo ora (2.71) e (2.76) in (2.70). Si ottiene lo sviluppo (2.68) annunciato $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, dove la serie è la somma delle due serie (2.71) e (2.76). Resta da osservare che, grazie al teorema di Cauchy sulle curve omotope, si può rimpiazzare nelle formule (2.72) e (2.75) i cerchi Γ' e γ' con un cerchio qualunque $\{\zeta : |\zeta - a| = \rho\}$, dove $r < \rho < R$ e queste formule prendono allora la forma (2.69). ∎

2.41 Definizione (Serie di Laurent)
La serie (2.68) i cui coefficienti sono definiti dalla formula (2.69) si chiama *serie di Laurent* della funzione f nella corona circolare V. L'insieme delle potenze positive si chiama *parte regolare* di questa serie e quello delle potenze negative *parte principale* della serie. ■

2.42 Teorema (Unicità della serie di Laurent)

Se una funzione f è rappresentata da una serie (2.68) nella corona circolare $V = \{z : r < |z-a| < R\}$, i coefficienti di questa serie sono definiti dalla formula (2.69). ■

Dimostrazione. Consideriamo il cerchio $\gamma = \{z : |z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$. La serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = f(z)$$

converge uniformemente su γ e questa proprietà è preservata se si moltiplicano entrambi i membri per una potenza qualunque $(z-a)^{-n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1} = \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

L'integrazione termine a termine su γ dà

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (z-a)^{k-n-1} dz = \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Servendosi del fatto che, per la proprietà di ortogonalità delle potenze, tutti gli integrali del primo membro sono nulli con la sola eccezione di quello per cui $k = n$, che è uguale a $2\pi i$, si ottiene

$$2\pi i c_n = \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

che coincide con la (2.69). ■

Il teorema 2.42 si può enunciare dicendo che ogni serie convergente di potenze positive e negative di $z-a$ è la serie di Laurent della sua somma.

La formula (2.69) dei coefficienti della serie di Laurent è d'uso poco frequente in pratica, perché comporta il calcolo di un integrale. Tuttavia, poiché lo sviluppo di Laurent è unico, un qualunque procedimento che permetta di ottenere per una funzione f uno sviluppo in una serie di potenze può essere utilizzato per ottenere questi coefficienti.

Osserviamo che i coefficienti della serie di Laurent sono definiti dalla formula (2.69), che per $n \geq 0$ coincide con la formula integrale per i coefficienti della serie di Taylor. Riprendendo alla lettera i ragionamenti che ci sono serviti per stabilire le diseguaglianze di Cauchy per i coefficienti della serie di Taylor, si ottengono le diseguaglianze seguenti.

2.43 Teorema (Diseguaglianze di Cauchy per la serie di Laurent)

Sia f una funzione olomorfa in una corona circolare $V = \{z : r < |z-a| < R\}$ e sia $M(\rho)$ il massimo del modulo di f sul cerchio $\gamma_\rho = \{z : |z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$. Allora i coefficienti della serie di Laurent soddisfano in V alle diseguaglianze

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$ ■

2.4.2 Punti singolari isolati

Studiamo i punti nei quali è violata l'olomorfia delle funzioni. Ci occuperemo in questa sezione dei più elementari fra questi punti.

2.44 DEFINIZIONE (PUNTO SINGOLARE ISOLATO)
Si dice che un punto $a \in \overline{\mathbb{C}}$ è un *punto singolare isolato* di una funzione f se esiste un intorno bucato di a (cioè un insieme $\{z : 0 < |z-a| < r\}$ se a è finito o un insieme $\{z : R < |z| < \infty\}$ se $a = \infty$) nel quale f è olomorfa. ∎

Si distinguono tre tipi di punti singolari a seconda del comportamento di f quando z tende verso il punto singolare.

2.45 DEFINIZIONE (TIPOLOGIA DELLE SINGOLARITÀ)
Si dice che un punto singolare a di una funzione f è

1. *artificiale* o *eliminabile* se $\lim_{z\to a} f(z) = A < \infty$;
2. un *polo* se $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;
3. *essenziale* se f non possiede né un limite finito né un limite infinito quando $z \to a$. ∎

La natura di un punto singolare isolato $z = a$ è strettamente legata a quella della serie di Laurent della funzione in un intorno bucato di a (diremo anche più brevemente serie di Laurent in un intorno di a). Per i punti finiti a questo legame è espresso dai tre teoremi seguenti.

2.46 Teorema (Singolarità eliminabile)
Se $a \in \mathbb{C}$ è un punto singolare eliminabile di una funzione f allora la serie di Laurent di f in un intorno di a non contiene la parte principale, ossia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2.77}$$

∎

Dimostrazione. Sia a un punto singolare eliminabile. Allora $\lim_{z\to a} f(z) = A < \infty$ e quindi f è limitata (per fissare le idee $|f(z)| \le M$) in un intorno bucato $\{z : 0 < |z-a| < R\}$ del punto a. Prendiamo un ρ tale che $0 < \rho < R$ ed utilizziamo le diseguaglianze di Cauchy

$$|c_n| \le M/\rho^n \qquad (n = 0, \pm 1, \dots).$$

Se $n < 0$ il secondo membro tende a 0 quando $\rho \to 0$, mentre il primo membro è indipendente da ρ. Dunque $c_n = 0$ per $n < 0$ e la parte principale della serie di Laurent è assente. ∎

Si osservi che modificando il valore della f in a ponendo $f(a) = c_0$ si ottiene una funzione olomorfa anche in a. Questo fatto giustifica la denominazione di eliminabile o fittizia assegnata alla singolarità.

2.47 Teorema (Polo)
Un punto singolare isolato $a \in \mathbb{C}$ di una funzione f è un polo se e solo se la parte principale della serie di Laurent della f in un intorno bucato di a non contiene che un numero finito di termini non nulli, ossia se e solo se

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad N > 0. \tag{2.78}$$

Il numero intero N, che si chiama ordine del polo è univocamente determinato. ∎

Dimostrazione. Necessità. Sia a un polo. Poiché $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ esiste un intorno bucato del punto a nel quale la funzione f è olomorfa e non nulla. In questo intorno è olomorfa anche la funzione $\phi(z) = 1/f(z)$ ed inoltre $\lim_{z\to a} \phi(z) = 0$. Dunque a è un punto singolare eliminabile della funzione ϕ e più precisamente uno zero della ϕ. Sia N l'ordine di questo zero. È allora nell'intorno citato

$$\phi(z) = (z-a)^N \psi(z)$$

con $\psi(z)$ olomorfa e diversa da zero in $z = a$. Quindi nel medesimo intorno

$$f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \frac{1}{\psi(z)}. \tag{2.79}$$

Il secondo fattore del membro a destra è una funzione olomorfa in a ed è quindi sviluppabile in serie di Taylor

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \cdots \quad (c_{-N} \neq 0)\,.$$

Inserendo questo sviluppo nella (2.79) si ottiene

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

cioè la serie di Laurent della f in un intorno bucato di a con una parte principale che contiene un numero finito di termini. Poichè la serie di Laurent è univocamente determinata l'ordine del polo N in a è univocamente determinato. Si noti che esso coincide con l'ordine dello zero in a della funzione olomorfa $1/f(z)$.

Sufficienza. Supponiamo che f sia rappresentata in un intorno bucato di a da una serie di Laurent (2.78) la cui parte principale contiene un numero finito di termini e supponiamo ancora che $c_{-N} \neq 0$. Le funzioni $f(z)$ e $\phi(z) = (z-a)^N f(z)$ sono allora olomorfe in questo intorno. La funzione $\phi(z)$ è rappresentata in questo intorno dalla serie

$$\phi(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \cdots\,,$$

dalla quale si vede che a è un punto singolare eliminabile e che $\lim_{z\to a} \phi(z) = c_{-N} \neq 0$. Dunque la funzione $f(z) = \phi(z)/(z-a)^N$ tende all'infinito quando z tende verso a, cioè a è un polo di f. ■

2.48 Teorema (Singolarità essenziale)

Un punto singolare isolato a di una funzione f è essenziale se e solamente se la parte principale della serie di Laurent di f in un intorno bucato di a contiene un'infinità di termini non nulli. ■

Dimostrazione. Questo teorema è in effetti già contenuto nei teoremi 2.46 e 2.77. Se la parte principale contiene un'infinità di termini il punto a non può essere né eliminabile né un polo; se a è un punto singolare essenziale la parte principale non può né essere assente né contenere un numero finito di termini. ■

Qualche parola sui punti singolari isolati all'infinito. I teoremi da 2.46 a 2.48 relativi alla natura degli sviluppi in serie di Laurent devono essere modificati. In effetti la natura di un punto singolare finito è definita dalla parte principale dello sviluppo in serie di Laurent, parte che contiene delle potenze negative di $z - a$ che sono singolari in questo punto. All'infinito invece le potenze negative sono regolari e la singolarità è definita dall'insieme delle potenze positive. È dunque naturale chiamare parte principale dello sviluppo di una funzione in serie di Laurent in un intorno bucato del punto all'infinito l'insieme delle potenze positive. Così modificati i teoremi da 2.46 a 2.48 sono validi anche per il caso $a = \infty$.

Si ottiene immediatamente questo risultato facendo il cambiamento di variabile $z = 1/w$. Se si pone $f(z) = f(1/w) = \phi(w)$ si ha evidentemente

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} \phi(w)$$

e dunque ϕ presenta in $w = 0$ la medesima singolarità che f in $z = \infty$. Nel caso di un polo la funzione ϕ ammette lo sviluppo seguente in $\{w : 0 < |w| < r\}$

$$\phi(w) = \frac{b_{-N}}{w^N} + \cdots + \frac{b_{-1}}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \qquad (b_{-N} \neq 0).$$

Facendo il cambiamento di variabile $w = 1/z$ si ottiene lo sviluppo di f nella corona circolare $\{z : R < |z| < \infty\}$, $R = 1/r$,

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n + c_0 + c_1 z + \cdots + c_N z^N,$$

dove $c_n = b_{-n}$, $c_N \neq 0$. La parte principale di questo sviluppo contiene un numero finito di termini. Si tratta in maniera analoga il caso di un punto singolare eliminabile e essenziale.

Concludiamo con una classificazione delle funzioni olomorfe a seconda dei loro punti singolari. In virtù del teorema di Liouville le funzioni che non presentano alcuna singolarità (cioè che sono olomorfe su $\overline{\mathbb{C}}$) sono costanti. La classe seguente per ordine di semplicità è la classe delle funzioni intere.

2.49 Definizione (Funzione intera)
Si chiama *funzione intera* una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, cioè una funzione che non possiede punti singolari finiti. ■

Di conseguenza il punto $a = \infty$ è un punto singolare isolato di f. Se è un punto singolare eliminabile allora $f =$cost. Se è un polo la parte principale dello sviluppo di f in serie di Laurent nell'intorno del punto all'infinito è un polinomio $g(z) = c_1 z + \cdots + c_N z^N$. Sottraendo ad f la sua parte principale si ottiene ancora una funzione intera $f - g$, ma il cui punto all'infinito è un punto singolare eliminabile. Essa è perciò una costante e concludiamo che *una funzione intera che presenta un polo all'infinito è necessariamente un polinomio.*

Le funzioni intere che presentano un punto singolare essenziale all'infinito si chiamano *funzioni intere trascendenti* (tali sono ad esempio le funzioni e^z, $\sin z$, $\cos z$).

2.50 Definizione (Funzione meromorfa)
Si dice che una funzione è *meromorfa* in $\mathbb{C}$ se le sole singolarità che presenta sono dei poli. ■

Le funzioni intere formano una sottoclasse della classe delle funzioni meromorfe (esse non possiedono singolarità in $\mathbb{C}$). Poiché i poli sono singolarità isolate una funzione meromorfa può avere in $\mathbb{C}$ al più un'infinità numerabile di poli. Infatti ogni disco $\{z : |z| < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ non può contenere che un numero finito di poli (altrimenti esisterebbe un punto d'accumulazione finito di poli che sarebbe un punto singolare non isolato e quindi non un polo) e questi poli possono quindi essere numerati. Le funzioni $\tan z$ e $\cot z$ sono degli esempi di funzioni meromorfe che presentano un'infinità di poli.

Lasciamo al lettore dimostrare il semplice teorema.

2.51 Teorema

Se una funzione meromorfa f presenta all'infinito un punto singolare eliminabile o un polo (cioè se in $\overline{\mathbb{C}}$ le sue sole singolarità sono dei poli) allora è razionale. ■

2.4.3 Residui

Per quanto ciò possa sembrare paradossale, gli elementi di studio più interessanti di una funzione olomorfa sono i punti ove essa cessa di essere olomorfa, cioè i suoi punti singolari. Nel seguito vedremo sulla base di numerosi fatti che la principale informazione sulle funzioni olomorfe è fornita dai punti singolari e dalle parti principali degli sviluppi in serie di Laurent negli intorni di questi punti. Una prima informazione, che misura il difetto di olomorfia di una funzione f in un punto singolare isolato a, è data dal residuo di f nel punto a, che si definisce come segue.

2.52 Definizione (Residuo)

L'integrale di una funzione f lungo un cerchio $\gamma_r = \{z : |z-a| = r\}$ di centro un punto singolare isolato $a \in \mathbb{C}$ di f e di raggio r sufficientemente piccolo (perché non contenga altri punti singolari), diviso per $2\pi i$, si chiama *residuo* di f nel punto a e si indica con

$$\operatorname{Res}\{f, a\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f\, dz. \tag{2.80}$$

■

Per il teorema di invarianza dell'integrale per una deformazione omotopa del contorno, il residuo è indipendente da r (per r sufficientemente piccolo) ed è definito dal comportamento locale di f in a.

2.53 Teorema (dei residui)

Se una funzione f è olomorfa in tutto il dominio D con l'esclusione di un insieme di punti singolari isolati, $G \Subset D$ e *∂G non contiene punti singolari, allora*

$$\int_{\partial G} f\, dz = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname{Res}\{f, a_k\}, \tag{2.81}$$

dove la somma è estesa a tutti i punti singolari $a_k \in G$ della funzione f. ■

Dimostrazione. Indichiamo con $a_1, \ldots, a_n$ i punti singolari (necessariamente in numero finito, perché altrimenti $\overline{G} \subset D$ conterrebbe un punto singolare non isolato, punto di accumulazione di punti singolari isolati) contenuti in G. Costruiamo dei cerchi $\gamma_k = \{z : |z - a_k| = r\}$ di raggio r sufficientemente piccolo perché i dischi $\overline{U}_k$ che racchiudono siano disgiunti e contenuti in G. Supponiamo che i γ_k siano orientati in senso antiorario. Indichiamo il dominio $G \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{U}_k$ con G_0 (vedi figura 2.11). La funzione f è olomorfa in G_0 e dunque per il teorema di Cauchy per i domini molteplicemente connessi si ha

$$\int_{\partial G_0} f\, d\zeta = 0. \tag{2.82}$$

Ora la frontiera orientata ∂G_0 è costituita da ∂G e dai cerchi γ_k $(k = 1, \ldots, n)$ orientati in senso orario e per le proprietà dell'integrale si ottiene

$$\int_{\partial G} f\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f\, d\zeta. \tag{2.83}$$

Dalla definizione di residuo si ottiene quindi la 2.80. ■

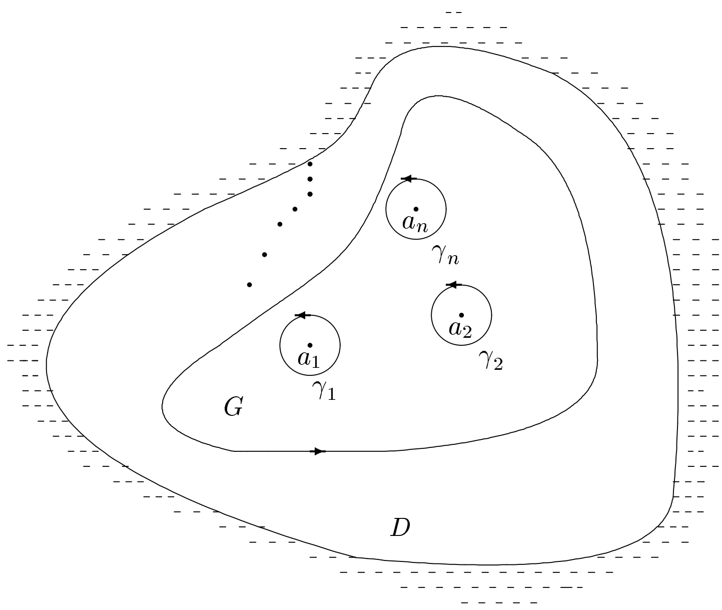


Figura 2.11: Il dominio G_r

Questo teorema è di grande importanza perché riconduce il calcolo di una quantità globale che è l'integrale di una funzione olomorfa lungo la frontiera di un dominio a quello di quantità locali che sono i residui di questa funzione nei suoi punti singolari.

Vedremo che i residui di una funzione nei suoi punti singolari sono interamente definiti dalle parti principali degli sviluppi in serie di Laurent negli intorni di questi punti. Ciò mostra che per calcolare gli integrali di una funzione olomorfa è sufficiente essere informati sui suoi punti singolari e sulle sue parti principali in questi punti.

2.54 Teorema (Residuo e serie di Laurent)

Il residuo di una funzione f in un punto singolare isolato $a \in \mathbb{C}$ è uguale al coefficiente c_{-1} della potenza $(z-a)^{-1}$ della serie di Laurent nell'intorno di a

$$\operatorname{Res}\{f, a\} = c_{-1}. \tag{2.84}$$

■

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di residuo (2.80) e dalla formula per i coefficienti della serie di Laurent (2.69). ■

Ricaviamo le formule per il calcolo del residuo di una funzione in un polo. Supponiamo dapprima che a sia un polo semplice (cioè d'ordine uno). In un intorno di a la serie di Laurent di f è

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Da qui la formula del residuo in un polo semplice

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{2.85}$$

Supponiamo ora che a sia un polo di ordine n di f. In un intorno di a si ha allora

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Moltiplichiamo i due membri di questo sviluppo per $(z-a)^n$ per eliminare le potenze negative del secondo membro, deriviamo $n-1$ volte (per mettere in evidenza c_{-1}) e facciamo tendere z verso a. Otteniamo la seguente formula per il residuo in un polo di ordine n

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}. \tag{2.86}$$

Non esiste una formula simile per calcolare il residuo in un punto singolare essenziale. In questo caso, in generale, bisogna calcolare la parte principale della serie di Laurent.

Alcune parole sul residuo di una funzione all'infinito.

2.55 Definizione (Residuo all'infinito)
Sia f una funzione il cui punto all'infinito è un punto singolare isolato. Si chiama *residuo di f all'infinito* la quantità

$$\operatorname{Res}\{f, \infty\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} f\, dz, \tag{2.87}$$

dove γ_R^- è un cerchio di raggio R sufficientemente grande percorso in senso orario. ■

Il cerchio γ_R^- è orientato in modo tale che l'intorno del punto all'infinito $\{z : R < |z| < \infty\}$ resti a sinistra del senso del percorso. Sviluppiamo la funzione f in serie di Laurent in un intorno del punto all'infinito

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Integrando questa serie termine a termine lungo γ_R^- e servendosi dell'ortogonalità delle potenze si trova

$$\operatorname{Res}\{f, \infty\} = -c_{-1}. \tag{2.88}$$

Le potenze negative figurano nella parte regolare e non nella parte principale dello sviluppo di Laurent all'infinito. Quindi contrariamente ai punti singolari finiti il residuo all'infinito può non essere nullo anche se $z = \infty$ è un punto regolare.

Citiamo ancora un teorema elementare relativo alla somma totale dei residui.

2.56 Teorema (Somma dei residui)

Se una funzione f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ con la sola eccezione di un numero finito di punti a_k $(k = 1, \ldots, n)$, la somma dei residui di tutti i punti singolari al finito e all'infinito è nulla

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\{f, a_k\} + \operatorname{Res}\{f, \infty\} = 0. \tag{2.89}$$

■

Dimostrazione. Costruiamo un cerchio $\gamma_R = \{z : |z| = R\}$ di raggio sufficientemente grande perché contenga tutti i punti singolari finiti a_k e orientiamolo in senso antiorario. Dal teorema dei residui otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f\, dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\{f, a_k\}.$$

Per il teorema di Cauchy la quantità al primo membro non cambia quando R cresce e dunque è uguale al residuo di f all'infinito preso col segno meno (tenuto conto del senso del percosrso). Di conseguenza l'uguaglianza ottenuta è equivalente alla (2.89). ■

Ci si serve sovente dei residui per il calcolo degli integrali. Enunciamo in conclusione un lemma utile in questi calcoli.

2.57 Lemma (Jordan)

Sia f una funzione olomorfa nel semipiano $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ con la possibile eccezione di un insieme di punti singolari isolati e supponiamo che $M(R) = \max|f(z)|$ sul semi–cerchio $\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ tenda a 0 quando $R \to \infty$ (o secondo una sucessione $R_n \to \infty$ tale che γ_{R_n} non attraversi punti singolari di f). Allora per ogni $\lambda > 0$ l'integrale

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz \tag{2.90}$$

tende a 0 quando $R \to \infty$ (o secondo la successione $R_n \to \infty$). ■

Dimostrazione. Indichiamo con $\gamma'_R = \{z : z = Re^{i\phi}, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$ la metà destra di γ_R. Poiché la funzione sin è convessa per $\phi \in [0, \pi/2]$ si ha $\sin\phi \geq \frac{2}{\pi}\phi$ e dunque $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin\phi} \leq e^{-2\lambda R\phi/\pi}$ su γ'_R. Di conseguenza

$$\left|\int_{\gamma'_R} f(z)e^{i\lambda z}dz\right| \leq M(R)\int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R\phi/\pi} R\, d\phi = M(R)\frac{\pi}{2\lambda}(1 - e^{-\lambda R})$$

e l'integrale su γ'_R tende a 0 quando $R \to \infty$. L'integrale su $\gamma''_R = \gamma_R \backslash \gamma'_R$ si maggiora in maniera analoga. ■

Si vede dalla dimostrazione che l'olomorfia di f non è essenziale in questo lemma.

2.4.4 Problemi

1. Calcolare i seguenti integrali $\oint_C f(z)\, dz$ dove C è il circolo unitario centrato nell'origine e $f(z)$ è data da

$$\frac{1}{z(z-2)}, \quad \frac{z}{z^2 - 1/9}, \quad \frac{1}{z(z+1/2)(z-2)}, \quad \frac{\sin z}{z},$$
$$\frac{1}{(2z-1)^2}, \quad \frac{1}{(2z-1)^3}, \quad \frac{e^z}{z}, \quad e^{z^2}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right).$$

2. Calcolare l'integrale

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}dz$$

nei seguenti quattro casi.

(a) C è la frontiera della corona circolare centrata nell'origine con raggio minore 1 e raggio maggiore 3.

(b) C è la frontiera della corona circolare centrata nell'origine con raggio minore 1 e raggio maggiore 4.

(c) C è il circolo centrato nell'origine di raggio $R > \pi$.

(d) C è il circolo centrato nell'origine di raggio $R < \pi$.

3. Mostrare che l'integrale $\int_\gamma 1/z^2\,dz$, per ogni cammino che non attraversa l'origine, dipende solamente dagli estremi del cammino.

4. Calcolare l'integrale $\oint_C f(z)\,dz$ dove C è la frontiera di un quadrato con vertici diagonali opposti a $z = -(1+i)R$ e a $z = (1+i)R$, con $R > a > 0$, e dove $f(z)$ è data da

$$\frac{e^z}{z - i\frac{\pi}{2a}}, \quad \frac{e^z}{\left(z - i\frac{\pi}{2a}\right)^2}, \quad \frac{z^2}{2z+a},$$
$$\frac{\sin z}{z^2}, \quad \frac{\cosh z}{z}.$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2}\,dx$$

considerando l'integrale $\oint_{C_R} \left(1/(z+i)^2\right) dz$ dove C_R è il semicerchio nel semipiano superiore con vertici a $z = -R$ e a $z = R$ chiuso dall'intervallo dell'asse reale $-R \leq x \leq R$.

6. Sviluppare la funzione $f(z) = 1/\left(1+z^2\right)$ in

   (a) serie di Taylor per $|z| < 1$,

   (b) serie di Laurent per $|z| > 1$.

7. Mostrare che le seguenti funzioni sono meromorfe e determinare posizione, ordine e forza dei poli.

$$\frac{z}{z^4+2}, \quad \tan z, \quad \frac{z}{\sin^2 z},$$
$$\frac{e^z - 1 - z}{z^4}, \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{w\,dw}{(w^2-2)(w-z)}.$$

C è il circolo unitario centrato nell'origine e conviene dapprima calcolare la funzione per $|z| < 1$ e poi continuarla analiticamente per $|z| \geq 1$.

8. Calcolare col metodo dei residui l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Suggerimento: Considerare l'integrale di

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

sul semicerchio nel semipiano superiore con vertici a $z = -R$ e a $z = R$ chiuso dall'intervallo dell'asse reale $-R \leq x \leq R$ e poi fare il limite per $R \to \infty$.

9. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
Suggerimento: Considerare l'integrale di
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$
sul semicerchio nel semipiano superiore con vertici a $z = -R$ e a $z = R$ chiuso dai due intervalli dell'asse reale $-R \le x \le -r$, $r \le x \le R$ e dal semicerchio nel semipiano superiore di raggio r centrato nell'origine e fare il limite per $R \to \infty$ e per $r \to 0$.

10. Calcolare l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx \qquad (0 < a < 1)\,.$$
Suggerimento: Considerare l'integrale di
$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + z}$$
sul rettangolo con vertici diagonali opposti a $(-R, 0)$ e a $(R, 2\pi i)$ e fare il limite per $R \to \infty$.

11. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx \qquad (a > 0)\,.$$
Suggerimento: Considerare l'integrale di
$$f(z) = e^{-az^2}$$
sul rettangolo con vertici diagonali opposti a $(-R, 0)$ e a $(R, bi/2a)$ e fare il limite per $R \to \infty$.

12. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\sinh \pi x}\, dx.$$
Suggerimento: Considerare l'integrale di
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$$
sul rettangolo con vertici diagonali opposti a $(0, 0)$ e a $(i, R + i)$, modificato ai vertici $(0, 0)$ e $(0, i)$ costruendo due archi di cerchio di raggio r centrati, rispettivamente, in $(0, 0)$ e in $(0, i)$ in modo da evitare le singolarità di $f(z)$ in questi punti. Considerare successivamente il limite per $R \to \infty$ e per $r \to 0$.