

Capitolo 1

Processi di diffusione in Meccanica Quantistica

1.1 Introduzione

Con *processo di diffusione* si intende un processo nel quale un fascio di particelle, nel senso più ampio possibile del termine, viene inviato contro un bersaglio per poi rivelare i prodotti della collisione. Questa definizione è volutamente generale, perché i processi di collisione sono molto differenziati e dipendono dalle condizioni del fascio incidente, ma soprattutto dal grado di selettività utilizzato nella rivelazione.

Lo schema più semplice di processo d'urto è presentato nella Figura 1.1. Nel sistema di laboratorio, un fascio di impulso $\mathbf{p}_a$ collide con un bersaglio fermo, $\mathbf{p}_b = 0$ nel sistema del laboratorio. L'impulso del fascio viene modificato in $\mathbf{p}'_a$, nel senso che può cambiare sia la direzione che il modulo del vettore impulso, e anche l'impulso del bersaglio viene modificato in $\mathbf{p}'_b$. L'angolo θ tra la direzione del fascio incidente, e la posizione del rivelatore delle particelle del fascio che vengono diffuse è chiamato angolo di diffusione.

Se vengono rivelate le particelle del fascio diffuse dopo la collisione, il processo è chiamato *inclusivo*. Il nome *esclusivo* è, invece, assegnato quando si rivelano, normalmente in coincidenza con il fascio diffuso, anche altre particelle.

Un fascio di particelle può essere considerato come un fronte d'onda che verrà modificato se le dimensioni del bersaglio sono confrontabili con la lunghezza d'onda del fascio. Questa intuitiva considerazione di tipo ottico, indica una relazione tra energia del fascio, legato alla lunghezza d'onda, e dimensioni del bersaglio. Il potere risolutivo Δx , è la distanza minima che la sonda riesce

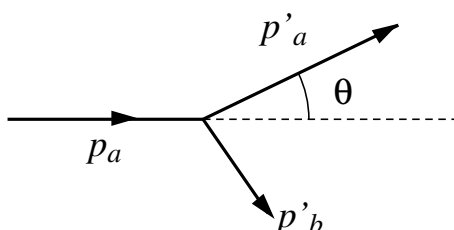


Figura 1.1: Schema di processo d'urto.

a risolvere ed è legata al modulo dell'impulso, dalla relazione di indeterminazione di Heseinberg

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad ; \quad \Delta x \geq \frac{\hbar c}{pc} \simeq \frac{200 \text{ MeV fm}}{pc} \quad (1.1)$$

1.1.1 Diffusione elastica

Il processo di diffusione **elastico** viene indicato utilizzando la simbologia delle reazioni chimiche come

$$a + b \rightarrow a + b \quad (1.2)$$

dove a è il proiettile, e b il bersaglio. In questa reazione si ha solo scambio di energia cinetica tra proiettile e bersaglio.

$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b \quad ; \quad \mathbf{p}_a - \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}'_b - \mathbf{p}_b = \mathbf{q} \quad (1.3)$$

Il momento trasferito è definito come $\mathbf{q} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}'_a$. In laboratorio si ha $\mathbf{p}_b = 0$

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b \quad (1.4)$$

Indicando $p = |\mathbf{p}|$, esprimo l'energia cinetica in questo processo

$$\frac{p_a^2}{2m_a} + 0 = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{q^2}{2m_b} = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{p_a^2 + p_a'^2 - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}'_a}{2m_b} \quad (1.5)$$

$$\frac{p_a'^2}{2} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) - p'_a \frac{p_a}{m_b} \cos \theta + \frac{p_a^2}{2} \left(\frac{1}{m_b} - \frac{1}{m_a} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Questa espressione indica che, nei processi di diffusione elastica esiste una relazione univoca tra le tre quantità normalmente misurate: p_a , p'_a e θ .

Se in (1.5) ci fosse un termine addizionale prodotto dall'assorbimento di energia da parte della struttura interna del bersaglio, o da parte del proiettile, la relazione non sarebbe più univoca.

In processi di diffusione elastica l'energia cinetica totale è conservata.

1.1.2 Diffusione anelastica

Il processi di diffusione **anelastici** sono indicati come

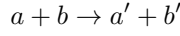
$$a + b \rightarrow a' + b' \quad ; \quad a + b \rightarrow c + d + e + \dots \quad (1.7)$$

i prodotti della reazione, a destra della freccia, sono, in questo caso, sempre differenti rispetto ai reagenti. Questo avviene perché parte dell'energia cinetica viene trasformata in energia di eccitazione del bersaglio, del proiettile, o di entrambi.

Mentre nel caso elastico l'energia cinetica *totale* del sistema era conservata, in questo caso non è conservata. Ad ogni modo *in ogni tipo di reazione* sono conservati i valori globali di

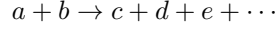
- Energia totale, E .
- Impulso totale, P .
- Carica elettrica
- Momento angolare totale J , spin inclusi.
- Numero fermionico.
- Numero barionico.
- Numero leptonico.

Nel gergo comunemente utilizzato si identifica come processo inelastico una reazione del tipo



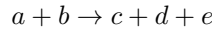
dove la composizione dei reagenti non viene modificata anche se si trovano in stati eccitati

Viene detto di *reazione* un processo del tipo



dove la composizione dei prodotti di reazione è differente da quella dei reagenti. Le reazioni sono di *trasferimento* quando i componenti dei reagenti si ridistribuiscono, di *frammentazione* quando invece i reagenti si frammentano, appunto. In quest'ultimo caso si utilizza la parola canale per indicare i vari modi nei quali i reagenti si possono suddividere.

Consideriamo un processo di frammentazione del tipo



Nel sistema del Centro di Massa possiamo scrivere la conservazione dell'energia come

$$T_i + E_a + E_b = T_f + E_c + E_d + E_e \quad (1.8)$$

dove T indica le energie cinetiche totali prima, i e dopo, f , la collisione, e E indica le energie interne dei vari sistemi che interagiscono. Definiamo il Q_{if} valore della reazione come

$$Q_{if} = E_a + E_b - (E_c + E_d + E_e) \quad (1.9)$$

La conservazione dell'energia implica

$$T_f = T_i + Q_{if} \quad (1.10)$$

Dal punto di vista energetico la reazione può avvenire se $T_f \geq 0$. Quindi se $Q_{if} \geq 0$ la reazione è sempre possibile, e viene chiamata *esotermica*. Se invece $Q_{if} < 0$ la reazione è detta *endotermica* e può avvenire solo se l'energia cinetica iniziale è superiore ad un'energia di soglia

$$T_i > T_i^t = -Q_{if} \quad (1.11)$$

nota che Q_{if} in questo caso ha un valore negativo.

La soglia energetica dipende dalle energie interne dei frammenti della reazione. Questo significa che per un dato valore dell'energia cinetica iniziale, solo quei canali di frammentazione per i quali la (1.11) sono permessi, *aperti* in gergo. Altri tipi di frammentazione, in linea di principio possibili ma energeticamente non permesse sono detti canali *chiusi*.

L'eq. (1.11) indica la possibilità energetica che un tipo di reazione possa avvenire. Questa è una delle restrizioni che deve essere superata. In aggiunta a questa devono essere soddisfatte tutte le leggi di conservazione. Quando tutto questo viene valutato si ha solo l'informazione sul fatto che una reazione *possa* avvenire, ma non esiste alcuna informazione sulla probabilità che questa avvenga.

1.2 Definizione di sezione d'urto

Particelle di velocità $\mathbf{v}$ e densità

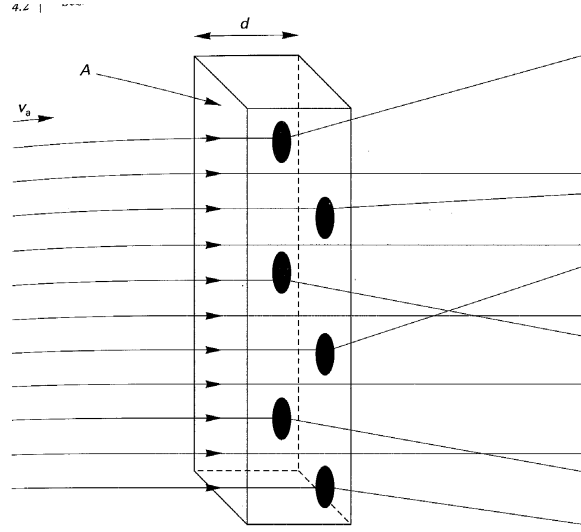
$$n_a = \frac{N_a}{V} \quad (1.12)$$

dove N_a è il numero di particelle inviate nel volume V nell'unità di tempo. Il flusso è definito come

$$\Phi_a = n_a |\mathbf{v}| = \frac{N_a}{V} v \quad [l^{-2}][t^{-1}] \quad (1.13)$$

quindi è il numero di particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Ipotesi di lavoro.



1. Nel bersaglio le distanze tra i centri diffusori sono tali da evitare diffusione coerente ($\lambda \ll d$).
2. Lo spessore è tale da evitare diffusione multipla.
3. Densità n_a piccola da trascurare l'interazione tra particelle incidenti.

Il numero di particelle rivelate nell'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo è proporzionale al flusso e a Ω .

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \Sigma(\Omega)\Phi_a d\Omega \quad (1.14)$$

Dimensioni di $\Sigma(\Omega)$ [superficie]/[sr]

Il numero di particelle diffuse è proporzionale al numero di centri diffusori N_b .

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \sigma(\Omega)N_b\Phi_a d\Omega \quad (1.15)$$

L'equazione precedente definisce la sezione d'urto differenziale $\sigma(\Omega)$

$$\sigma(\Omega) = \frac{n^o \text{ particelle diffuse per unita', di tempo nell'angolo } d\Omega}{\text{flusso incidente } N_b} \quad (1.16)$$

le cui dimensioni sono $[l^2][\text{sr}]$. La sezione d'urto differenziale viene normalmente espressa come

$$\sigma(\Omega) \longrightarrow \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} \quad (1.17)$$

Questa espressione è utile per indicare l'espressione della sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} d\Omega \quad (1.18)$$

Unità di misura spesso utilizzate sono

$$\begin{aligned} \text{barn} &\equiv \text{b} = 10^{-28} \text{ m}^2 \\ 1 \text{ mb} &= 10^{-31} \text{ m}^2, 1 \text{ fm}^2 = 10^{-30} \text{ m}^2 = 10 \text{ mb} \end{aligned}$$

$$\sigma_{tot} = \int_0^\infty d\epsilon \int_{4\pi} d\Omega \frac{d^2\sigma(\epsilon, \epsilon', \omega)}{d\Omega d\epsilon'}$$

1.3 Diffusione da potenziale.

1.3.1 Diffusione elastica

Consideriamo reazioni che avvengono con energie cinetiche molto più piccole del valore delle energie legate alle masse a riposo dei proiettili, per questa ragione consideriamo il problema in meccanica quantistica non relativistica, e facciamo l'ipotesi che la diffusione delle particelle avvenga con una interazione istantanea. In questa trattazione facciamo l'ipotesi che le particelle siano prive di spin, questo per semplicità. La trattazione con particelle dotate di spin non presenta difficoltà di principio. Trascuriamo la struttura interna del proiettile e del bersaglio.

Sotto queste ipotesi, il problema consiste quindi nella soluzione dell'equazione di Schrödinger che descrive il moto di due particelle che interagiscono:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m_1} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E_T \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) , \quad (1.19)$$

Definiamo le seguenti variabili massa totale e ridotta,

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{e} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (1.20)$$

coordinate del centro di massa e relativa,

$$R = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ,$$

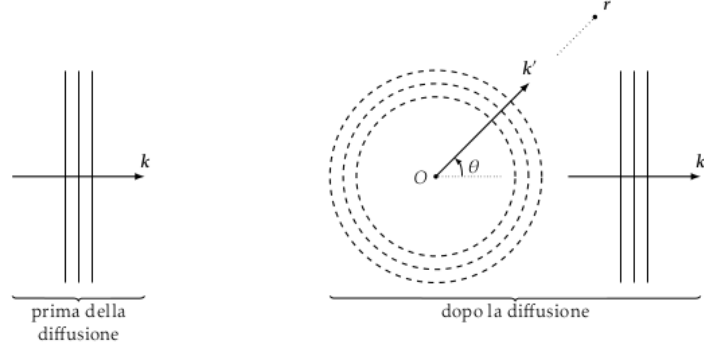
e impulsi del centro di massa e relativo

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} .$$

Utilizzando le definizioni date sopra è possibile separare il moto del centro di massa del sistema, dal moto relativo delle due particelle. La funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ può quindi essere espressa come prodotto delle funzioni d'onda che descrivono il moto del centro di massa e il moto relativo. Dato che il potenziale dipende soltanto dalle coordinate relative, la funzione d'onda del centro di massa è un'onda piana, soluzione dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. Il problema della soluzione dell'equazione (1.19) è quindi ricondotto alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per il moto relativo delle due particelle che collidono:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) , \quad (1.21)$$

Il processo di diffusione può essere descritto come un flusso di particelle che si muovono libere nella direzione del bersaglio. Dopo la diffusione si forma un'onda di tipo sferico che si diffonde dal centro del potenziale. Dato che consideriamo una diffusione puramente elastica, l'energia cinetica totale del sistema è conservata, quindi l'energia cinetica del moto relativo delle due particelle interagenti. Ne consegue che il modulo dell'impulso relativo $p = |\mathbf{p}| \equiv \hbar |\mathbf{k}| = \hbar k$ non cambia. Il processo di diffusione elastica cambia soltanto la direzione di $\mathbf{p}$.



Sotto le ipotesi che abbiamo dettagliato, la soluzione asintotica dell'Eq. (1.21) può essere espressa come:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (1.22)$$

Il primo termine descrive l'onda piana incidente, e il secondo l'onda sferica uscente. Dato che il potenziale è puramente scalare non c'è dipendenza dallo stato di polarizzazione dei due nuclei. Nel caso di potenziale centrale, e una simmetria azimutale attorno alla direzione del fascio, considerata come asse z l'ampiezza di transizione f_k dipenderebbe solo dall'angolo θ . In presenza di spin, e quindi di possibili effetti di polarizzazione, c'è anche una dipendenza dall'angolo ϕ . Nel caso di diffusione anelastica, l'ampiezza di transizione f dipende anche dagli impulsi delle particelle incidenti e diffuse $\mathbf{p}_a$ e $\mathbf{p}_b$.

Calcoliamo le correnti incidenti e diffuse del processo di diffusione. L'espressione della corrente può essere espressa come

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})] \quad (1.23)$$

Inserendo l'espressione della funzione d'onda piana, otteniamo per la corrente del flusso incidente l'espressione.

$$|\mathbf{J}_i(\mathbf{r})| = \frac{\hbar k}{m} \quad (1.24)$$

Il flusso è dato dalla corrente per una costante di normalizzazione.

Per quanto riguarda la corrente della parte diffusa, il secondo termine dell'equazione (1.22), consideriamo le componenti del gradiente in coordinate polari sferiche

$$(\nabla)_r = \frac{\partial}{\partial r} ; (\nabla)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ; (\nabla)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.25)$$

Le componenti del gradiente in θ e ϕ hanno una dipendenza $1/r$ non presente nella componente radiale. Dato che siamo interessati a situazioni dove r è molto più grande delle dimensioni del bersaglio, le componenti angolari possono essere trascurate.

Consideriamo solo la parte radiale del gradiente nel calcolo della corrente, ed inseriamo l'espressione (1.22) in quella della corrente (1.23). In questo modo otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned}
(|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})|)_r &= \frac{\hbar k}{m} \cos \theta \\
&- \frac{i\hbar}{2m} f(\Omega) \left[\frac{ik}{r} (1 + \cos \theta) - \frac{1}{r^2} \right] e^{ikr(1-\cos \theta)} \\
&- \frac{i\hbar}{2m} f^*(\Omega) \left[\frac{ik}{r} (1 + \cos \theta) + \frac{1}{r^2} \right] e^{-ikr(1-\cos \theta)} \\
&+ \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f_k(\theta, \phi)|^2
\end{aligned}$$

Il primo termine rappresenta il contributo del fascio entrante, l'ultimo quello del fascio diffuso, ed il secondo e terzo termine l'interferenza tra i due fasci. L'angolo θ è l'angolo tra $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{r}$, ovvero l'angolo di diffusione. I due termini di interferenza, dipendenti linearmente da f , hanno un termine esponenziale velocemente oscillante quando $kr \gg 1$, come nel caso che stiamo considerando. Per questo motivo il loro contributo è trascurabile.

Il contributo del primo termine viene eliminato quando, al posto delle onde stazionarie, si utilizzano pacchetti d'onda. Il pacchetto d'onda ha le dimensioni trasversali alla direzione del fascio che sono confrontabili con quelle del fascio stesso. Il rivelatore è posto, a distanze che sono ordini di grandezza maggiori delle dimensioni del fascio. Quindi il contributo del termine proporzionale a $\cos \theta$ è trascurabile se non nel caso, raro, in cui il rivelatore è posto nella direzione del fascio.

Commenti su questo problema sono fatti nel paragrafo 2.d del capitolo VIII di [Coh77], e nel capitolo 8.13 di [Gal89]. Una trattazione accurata della diffusione del pacchetto d'onda è fatta nei paragrafi 4, 5 e 6 del capitolo X di [Mes61].

Fatte le considerazioni precedenti, **considerando solo la parte diffusa della funzione d'onda** (1.22) otteniamo per la corrente diffusa l'espressione

$$|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})| \simeq (|\mathbf{J}_d(\mathbf{r})|)_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (1.26)$$

Anche in questo caso, il flusso delle particelle diffuse è dato dalla corrente diffusa moltiplicata per una costante C , identica a quella del flusso incidente. Il numero di particelle diffuse in una superficie $d\mathbf{S}$, è dato da

$$dn = C \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = C (\mathbf{J}_d)_r r^2 d\Omega = C \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f_k(\theta, \phi)|^2 r^2 d\Omega \quad (1.27)$$

Dalla definizione (1.16) possiamo ottenere l'espressione della sezione d'urto dividendo l'espressione (1.27) con la (1.24), quindi abbiamo che [Mes61, Coh77, Gal89]:

$$\boxed{\frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} = |f_k(\Omega)|^2} \quad (1.28)$$

Potenziale a corto raggio

Procediamo facendo alcune ipotesi sul potenziale per semplificare la trattazione. Ipotizziamo che il potenziale sia puramente scalare e centrale $V(\mathbf{r}) = V(r)$. In aggiunta facciamo l'ipotesi che sia a corto raggio. Questa ipotesi significa che il potenziale è nullo quando r è maggiore del raggio d'azione dell'interazione. Dal punto di vista matematico si considerano a corto raggio quei potenziali che tendono asintoticamente a zero più velocemente di $1/r$. Quest'ultima ipotesi è appropriata per l'interazione nucleare forte, che ci interessa. E' ben noto che questa interazione non è attiva a distanze superiori ai $2 fm$.

Consideriamo il caso di diffusione elastica. Sfruttando la simmetria sferica del potenziale, possiamo utilizzare le tecniche di sviluppo in multipoli della soluzione dell'equazione di Schrödinger [Mes61], che scriviamo come:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) . \quad (1.29)$$

Nell'equazione abbiamo indicato con P_l il polinomio di Legendre di grado l . L'equazione (1.21), in coordinate polari sferiche, può essere riscritta considerando che i polinomi di Legendre sono auto-stati dell'operatore momento angolare quadrato. Sfruttando questo fatto riscriviamo l'equazione (1.21) come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (1.30)$$

dove abbiamo definito $k^2 = 2mE/\hbar^2$, e abbiamo indicato con $l(l+1)$ l'autovalore del momento angolare in unità $\hbar^2$.

La soluzione regolare all'origine dell'Eq. (1.30), quando $V(r) = 0$ è la funzione di Bessel sferica $j_l(kr)$. Asintoticamente, il potenziale è nullo, per l'ipotesi di corto raggio. Quindi, nella regione asintotica, la soluzione u_l si comporta come la funzione di Bessel sferica, ma avrà uno sfasamento che ricorda la presenza del potenziale. Abbiamo quindi per la soluzione libera:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) .$$

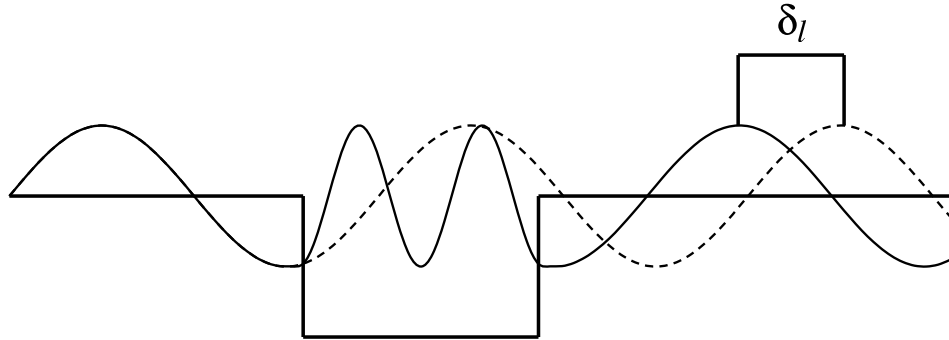


Figura 1.2: Schematizzazione del processo di diffusione da potenziale. La linea tratteggiata rappresenta la soluzione senza potenziale, mentre la linea continua quella in presenza di un potenziale attivo in una regione limitata dello spazio. Asintoticamente le due soluzioni differiscono solo per uno sfasamento.

I comportamenti asintotici delle due soluzioni sono:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}\pi l)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (1.31)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (1.32)$$

dove δ_l è lo sfasamento, e A_l è una costante complessa il cui valore viene fissato imponendo le appropriate condizioni al contorno.

Come indica l'Eq. (1.22), l'onda diffusa è ottenuta sottraendo le due equazioni precedenti:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\Psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \left\{ A_l \sin \left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l \right) - \sin \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right\} \quad (1.33)$$

Le condizioni al contorno indicano dalla (1.22) che è presente solo un'onda uscente. Come mostrato qui sotto, questa condizione, fissa il valore di A_l .

Utilizzando la formula di Eulero possiamo riscrivere la parte tra parentesi graffe nell' Eq. (1.33), come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \left(A_l \left\{ \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l \right) \right] \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right] \right\} \right) \\ & = \frac{1}{2i} \left\{ \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right] (A_l e^{i\delta_l} - 1) + \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right] (1 - A_l e^{-i\delta_l}) \right\} . \end{aligned}$$

Dato che in Eq. (1.22) è presente solo l'onda uscente $\exp(ikr)$, imponiamo che $A_l = \exp(i\delta_l)$.

Utilizzando il risultato qui sopra e ricordando che:

$$e^{-i\frac{1}{2}\pi l} = -i^l ,$$

otteniamo per la (1.33)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\Psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (-i^l) (e^{i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} , \quad (1.34)$$

da cui, confrontando con la (1.22), abbiamo:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{i2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \frac{1}{2i} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i2\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) . \quad (1.35)$$

La sezione d'urto differenziale, è ottenuta utilizzando l'equazione (1.28):

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i2\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2 . \quad (1.36)$$

La sezione d'urto totale viene ottenuta integrando su tutto l'angolo solido:

$$\sigma = \int d\omega \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l , \quad (1.37)$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà di completezza e ortogonalità dei polinomi di Legendre:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(\cos \theta) P_{l'}'(\cos \theta) = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{l,l'} .$$

Potenziale coulombiano

L'ipotesi di base fatta per ottenere le equazioni precedenti è quella che il potenziale fosse a corto raggio d'azione, come il potenziale nucleare. In realtà in un processo di diffusione tra nuclei, il potenziale Coulombiano è sempre presente. Trattiamo prima il caso di diffusione elastica da potenziale Coulombiano puro, e poi il caso in cui sia anche presente un potenziale a corto raggio.

Nel caso in cui il potenziale sia puramente Coulombiano, l'Eq. (1.30) viene normalmente scritta come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (1.38)$$

dove sono stati definiti:

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2}{\hbar v} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{e} \quad v = \frac{\hbar k}{m} .$$

Le soluzioni dell'Eq. (1.38) sono particolari funzioni ipergeometriche confluenti, dette *funzioni coulombiane sferiche* [Mes61]. Le soluzioni regolari all'origine si indicano con $F_l(\gamma; kr)$ e quelle irregolari con $G_l(\gamma; kr)$. Nel limite $\gamma \rightarrow 0$ la funzione F_l corrisponde alla funzione di Bessel sferica j_l , e G_l alla funzione di Neumann n_l . Le espressioni asintotiche di queste funzioni sono:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_l(\gamma; kr) = \sin \left[kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{1}{2}\pi l + \sigma_l \right] \quad (1.39)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_l(\gamma; kr) = \cos \left[kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{1}{2}\pi l + \sigma_l \right] . \quad (1.40)$$

La forma asintotica delle funzioni d'onda in presenza di potenziale coulombiano differisce da quella delle funzioni d'onda libere per la presenza del termine $\gamma \ln 2(kr)$ che dipende dalle cariche dei due nuclei interagenti, e per il termine σ_l , detto, impropriamente, sfasamento coulombiano, che è dato dall'espressione:

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\gamma) , \quad (1.41)$$

dove la funzione Γ è definita come:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{con} \quad x > 0 .$$

Potenziale coulombiano modificato da un potenziale a corto raggio

Analizziamo il caso, più realistico, in cui sia il potenziale coulombiano V_c , sia quello nucleare V' , a corto raggio, sono presenti. L'equazione da risolvere viene scritta come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (1.42)$$

Si può ripetere il ragionamento fatto per il caso in cui il potenziale coulombiano non era presente, sostituendo l'andamento asintotico (1.31) delle funzioni di Bessel sferiche con quello (1.39) della funzione coulombiana F_l . Si ottiene che l'ampiezza di diffusione totale può essere scritta come

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta) , \quad (1.43)$$

dove l'ampiezza coulombiana può essere scritta come:

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \theta/2} \exp \left[-i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2i\sigma_0 \right] . \quad (1.44)$$

L'ampiezza generata dalla presenza del termine nucleare è

$$f'(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\sigma_l} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) . \quad (1.45)$$

L'espressione della sezione d'urto differenziale è:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2 = |f_c(\theta) + f'(\theta)|^2 = |f_c(\theta)|^2 + 2\text{Re}f_c^*(\theta)f'(\theta) + |f'(\theta)|^2 . \quad (1.46)$$

Il primo termine rappresenta la sezione d'urto per diffusione puramente coulombiana:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_c = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4 \theta/2} = \left(\frac{Z_1 Z_2}{4E} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \sin^{-4} \left(\frac{\theta}{2}\right) , \quad (1.47)$$

la cui espressione è quella della formula di Rutherford.

1.3.2 Diffusione anelastica

Nel calcolo della sezione d'urto elastica il coefficiente A_l che in Eq. (1.33) moltiplica il termine asintotico dell'onda diffusa ha modulo unitario. Abbiamo infatti ottenuto $A_l = \exp(i\delta_l)$. Questo fatto garantisce che il flusso di particelle di momento $k\hbar$ che collidono con il bersaglio sia identico al flusso di particelle diffuse con momento $k\hbar$. La conservazione del flusso per un valore fissato del momento relativo tra le due particelle che collidono è una caratteristica della diffusione elastica. Ricordiamo che in una diffusione elastica, l'energia cinetica totale del sistema proiettile e bersaglio viene conservata. Questo significa la conservazione del modulo del momento relativo, e quindi la conservazione del flusso.

In reazioni anelastiche parte particelle incidenti con momento $k\hbar$ vanno a popolare canali con diverso valore del momento, nel senso del modulo. Questo nel caso in cui proiettile e bersaglio non cambino identità. Ovviamente anche nella visione più generale, in cui c'è trasferimento di nucleoni tra un nucleo e l'altro, oppure frammentazione di uno dei due nuclei iniziali, c'è una perdita di flusso dal canale iniziale. Questo fatto viene preso in considerazione moltiplicando il termine di onda uscente dell'onda diffusa per un numero complesso con modulo minore di uno.

Utilizzando la formula di Eulero, l'espressione dell'onda diffusa può essere scritta come:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2kr} \sum_l i^l (2l+1) \left\{ \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] - \eta_l \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \right\} P_l(\cos \theta) , \quad (1.48)$$

con $|\eta_l| < 1$.

Il numero di particelle che interagiscono in maniera anelastica nell'unità di tempo, viene calcolato in termini di flusso di particelle che attraversano la superficie di una sfera S di raggio r attorno al centro diffusore, in un canale diverso da quello di entrata:

$$N_a = - \int_S \mathbf{J}_T \cdot \mathbf{n} dS ,$$

dove $\mathbf{J}_T$ è la corrente:

$$\mathbf{J}_T = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi_T^* \nabla \Psi_T - \Psi_T \nabla \Psi_T^* \right) , \quad (1.49)$$

quindi:

$$N_a = \frac{-\hbar}{2im} \int \left(\Psi_T^* \nabla \Psi_T - \Psi_T \nabla \Psi_T^* \right) r^2 d(\cos \theta) d\phi . \quad (1.50)$$

La parte dipendente da r della funzione d'onda può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_l(r) &= \frac{1}{r} \left\{ \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] - \eta_l \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{r} e^{-i \frac{1}{2} \pi l} \left[e^{-ikr} - \eta_l e^{-i \pi l} e^{ikr} \right] \\ &= \frac{1}{r} i^l \left[e^{-ikr} - \eta_l (-1)^l e^{ikr} \right] .\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2k} \sum_l i^l (2l+1) \mathcal{A}_l(r) P_l(\cos \theta) , \quad (1.51)$$

da cui:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_T &= \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \\ &\left[\sum_{l_1 l'_1} (-i)^{l_1+1} (i)^{l'_1+1} (2l_1+1) (2l'_1+1) \mathcal{A}_{l_1}^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_{l'_1}(r) P_{l_1}(\cos \theta) P_{l'_1}(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l_2 l'_2} (-i)^{l_2+1} (i)^{l'_2+1} (2l_2+1) (2l'_2+1) \mathcal{A}_{l_2}(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_{l'_2}^*(r) P_{l_2}(\cos \theta) P_{l'_2}(\cos \theta) \right] .\end{aligned}$$

Per l'ortogonalità dei polinomi di Legendre, l'integrale su $\cos \theta$ nell'equazione (1.50) implica $l_1 = l'_1$ e $l_2 = l'_2$. Si ha che:

$$\mathcal{A}_l^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l(r) = \frac{1}{r} |\mathcal{A}_l(r)|^2 - \frac{ik}{r^2} \left[1 - |\eta_l|^2 + (-1)^l \left(\eta_l e^{i2kr} - \eta_l^* e^{-i2kr} \right) \right] ,$$

e quindi:

$$\mathcal{A}_l^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l(r) - \mathcal{A}_l(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l^*(r) = (-i) \frac{2k}{r^2} (1 - |\eta_l|^2) .$$

Utilizzando i risultati ottenuti abbiamo:

$$N_a = \frac{\hbar \pi}{mk} \sum_l (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) . \quad (1.52)$$

La sezione d'urto si ottiene dividendo il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo (1.52), per il flusso delle particelle incidenti. Quest'ultimo viene calcolato utilizzando l'espressione (1.49) della corrente per l'onda incidente:

$$\mathbf{J}_I = \frac{\hbar}{2im} \left(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{\hbar}{2im} 2i\mathbf{k} = \mathbf{v} . \quad (1.53)$$

Quindi la sezione d'urto di reazione è:

$$\sigma_r = \frac{N_a}{|\mathbf{J}_I|} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) . \quad (1.54)$$

Il confronto con la sezione d'urto elastica (1.37), viene fatto considerando che in un processo elastico

$$\eta_l = e^{i2\delta_l} ,$$

come si può vedere confrontando la (1.48) con la (1.34), e che

$$\sin^2 \delta_l = |f_l|^2 = \left| \frac{1}{2i} (e^{i2\delta_l} - 1) \right|^2 = \left| \frac{1}{2i} (\eta_l - 1) \right|^2 ,$$

Da queste considerazioni si vede che è possibile riscrivere l'espressione (1.37) come:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left| \frac{1-\eta_l}{2i} \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1-\eta_l|^2 . \quad (1.55)$$

La sezione d'urto totale è data dalla somma delle sezioni d'urto elastica, o di scattering, (1.55) e di reazione (1.54):

$$\sigma_T = \sigma_r + \sigma_{el} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \text{Re } \eta_l) . \quad (1.56)$$

E' da notare che è possibile avere processi di diffusione elastica anche in assenza di processi di diffusione anelastica. Quando $|\eta_l|^2 = 1$ l'eq. (1.54) è nulla, mentre (1.55) è diversa da zero. Non è possibile il contrario, se $|\eta_l|^2 \neq 1$ c'è sempre un contributo alla sezione d'urto elastica. Ad un processo anelastico è sempre associato anche un processo elastico.

1.3.3 Risonanze

Una situazione particolare dei processi di reazione è quella in cui la sezione d'urto presenta un massimo pronunciato ad una particolare energia incidente del proiettile. Questa situazione è chiamata processo di diffusione in risonanza. Consideriamo la situazione di diffusione elastica. Dall'espressione (1.37) si vede che il massimo della sezione d'urto si ha quando:

$$\sin^2 \delta_l = 1 \quad \text{quindi} \quad \delta_l = \frac{\pi}{2} + n\pi , \quad (1.57)$$

dove n è un numero intero. Consideriamo che:

$$f_l = e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \frac{\sin \delta_l}{\exp(-i\delta_l)} = \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l - i \sin \delta_l} = \frac{1}{\cotg(\delta_l) - i} .$$

Chiamiamo ϵ_r l'energia di risonanza, ovvero quella in cui la condizione di risonanza (1.57) è verificata. Facciamo uno sviluppo in serie di Taylor, troncato al primo ordine di $\cotg(\delta_l)$ per un'energia $\epsilon \sim \epsilon_r$:

$$\cotg[\delta_l(\epsilon)] = \cotg[\delta_l(\epsilon_r)] + (\epsilon_r - \epsilon) \left[\frac{d}{d\epsilon} \cotg[\delta_l(\epsilon)] \right]_{\epsilon=\epsilon_r} + \dots = (\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} + \dots ,$$

dove abbiamo considerato che nella situazione di risonanza la cotangente di δ_l è nulla, e abbiamo definito l'ampiezza di risonanza Γ . L'espressione di f_l in zona di risonanza può essere espressa come:

$$f_l(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} - i} = \frac{\Gamma/2}{(\epsilon_r - \epsilon) - i \frac{\Gamma}{2}} .$$

Inserendo le equazioni precedenti nell'espressione (1.37) della sezione d'urto elastica, otteniamo per ogni onda parziale l :

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} , \quad (1.58)$$

espressione nota con il nome di Breit-Wigner. Il massimo valore della sezione d'urto si ha in corrispondenza della risonanza $\epsilon = \epsilon_r$:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) ,$$

e per $\epsilon = \epsilon_r \pm \Gamma/2$ abbiamo $\sigma_l = \sigma_{max}/2$ che indica l'interpretazione fisica dell'ampiezza di risonanza.

L'equazione (1.58) può essere generalizzata in due modi. Il primo per tenere conto dello spin delle particelle interagenti. Se chiamiamo $\mathbf{s}_a$ e $\mathbf{s}_A$ gli spin delle particelle interagenti e $\mathbf{I}$ il momento angolare totale della risonanza abbiamo:

$$\mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_A + \mathbf{l} ,$$

il fattore $2l + 1$ in Eq. (1.58) è sostituito dal fattore:

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} , \quad (1.59)$$

che si riduce a $2l + 1$ per particelle prive di spin.

La seconda generalizzazione dell'espressione (1.58) tiene conto della possibilità che i canali di entrata e di decadimento della risonanza abbiano diverse ampiezze. Il termine Γ^2 al denominatore è quello che tiene in considerazione le diverse ampiezze di decadimento. L'ampiezza totale di decadimento Γ della risonanza è data dalla somma di tutte le ampiezze legate ai singoli canali di decadimento, incluso il canale d'entrata. La vita media è legata all'ampiezza di decadimento dalla relazione

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} ,$$

con $\hbar \sim 6.610^{-22}$ MeV s. L'osservazione di uno specifico canale di formazione della risonanza, o di un canale di decadimento, non modifica la vita media della risonanza. E' una situazione analoga a quella del decadimento radioattivo, in cui anche se si osserva un singolo canale di decadimento, la vita media di decadimento, che è legata all'ampiezza totale, non cambia. Diverso il discorso per il fattore Γ^2 del numeratore, che è legato alla formazione della risonanza e alla probabilità di decadimento in un canale particolare. Nel caso elastico, quello per cui la (1.58) è stata ricavata, i canali di formazione e decadimento sono identici quindi $a + A \rightarrow a + A$, e al numeratore sarà inserito il quadrato dell'ampiezza Γ_{aA} . Nel caso di un processo anelastico, $a + A \rightarrow b + B$, si tiene conto dei diversi canali, d'entrata e di uscita, modificando la (1.58) come

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + (\Gamma/2)^2} . \quad (1.60)$$

Bibliografia

- [Mes61] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, Amsterdam (1961).
- [Coh77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York (1977).
- [Gal89] A. Galindo, P. Pascual *Mecánica Cuántica*, Eudema, Madrid (1989).