Parte 3

Dinamica del corpo rigido

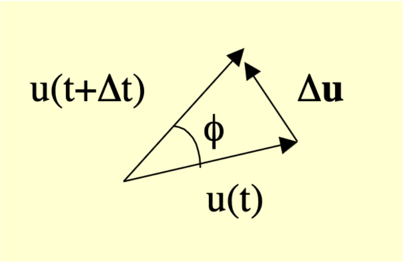
Lezione 1

Moto rotatorio di una particella

Derivata di un vettore (richiamo)

Derivata di un versore o vettore a modulo fisso $\widehat{w} = w_x\widehat{i} + w_y\widehat{j} + w_z\widehat{k}$ e $|\widehat{w}(t)|$ costante nel tempo. Quindi $w^2(t) = \widehat{w}(t) \cdot \widehat{w}(t)$ costante.

$$0 = \frac{dw^2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\widehat{w}(t) \cdot \widehat{w}(t)] = \frac{d\widehat{w}}{dt} \cdot \widehat{w} + \widehat{w} \cdot \frac{d\widehat{w}}{dt} = 2\frac{d\widehat{w}}{dt} \cdot \widehat{w} \Rightarrow \frac{d\widehat{w}}{dt} \perp \widehat{w}$$



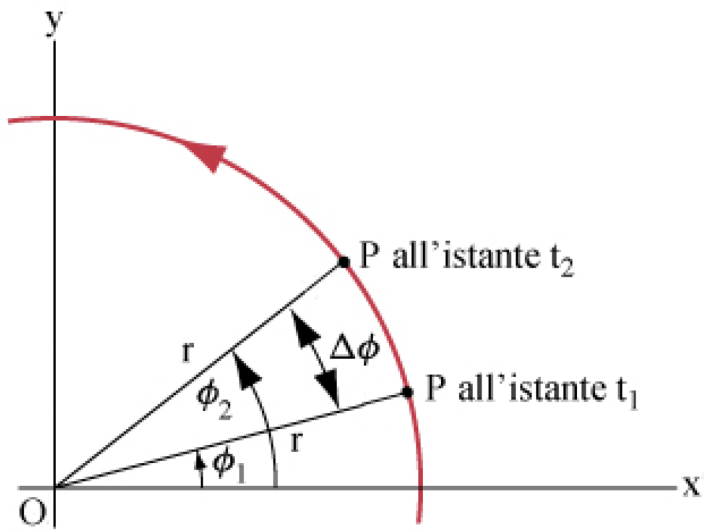
$$\frac{|\Delta \widehat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \widehat{u}|}{\Delta \phi}\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{|\widehat{u}| \sin(\Delta\phi)}{\Delta \phi}\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\sin(\Delta\phi)}{\Delta \phi}\frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \lim_{\Delta \phi \to 0} \frac{|\Delta u|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \lim_{\Delta \phi \to 0} \left[\frac{\sin \Delta\phi}{\Delta \phi}\right] \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\widehat{n} = \omega\,\widehat{n} = \vec{\omega} \times \widehat{u}$$

con l'ovvia definizione di ω. Poiché $\widehat{n} \perp \widehat{u}$. (Verso convenzionale).
Per un vettore generico

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(w\widehat{u}) = \frac{dw}{dt}\widehat{u} + \frac{d\widehat{u}}{\Delta t}w = \frac{dw}{dt}\widehat{u} + \vec{\omega} \times w\widehat{u} = \frac{dw}{dt}\widehat{u} + \vec{\omega} \times \vec{w}$$



Consideriamo un punto materiale P che si muova per un tratto $\vec{s}$ su un arco di circonferenza il cui raggio è r. Definiamo una quantità vettoriale, $\vec{\phi} = \vec{s}/r$ (unità di misura radianti), il cui modulo è chiamato angolo di rotazione. Velocità angolare media

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} \ ,$$

da cui la velocità angolare è definita come

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{d\vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \equiv \vec{\omega}$$

La direzione di $\vec{\omega}$ è ortogonale al piano di rotazione e il verso segue la regola della mano destra: uscente dal piano per rotazioni antiorarie, ed entrante per rotazioni orarie.

Si definisce l'accelerazione angolare come

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Dato che ω cambia solo il modulo, ma non la direzione anche $\vec{\alpha}$ ha la stessa direzione, e verso, di $\vec{\omega}$.

La velocità del punto materiale P è definita come

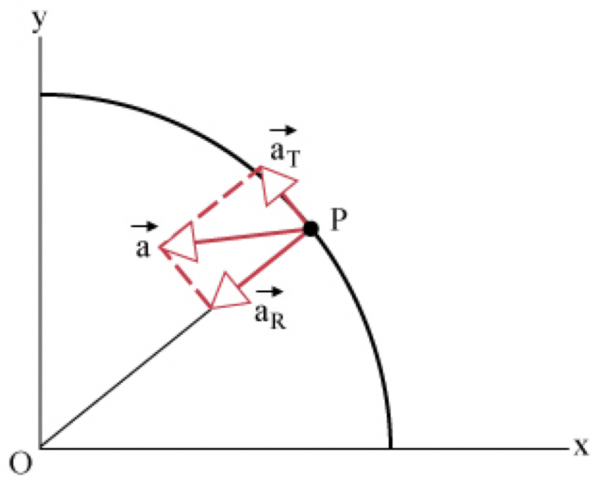
$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Poiché il moto si svolge su una circonferenza, $r \equiv |\vec{r}|$ è costante, quindi il primo termine dell'equazione precedente è nullo.

Dato che la direzione di $\vec{\omega}$ è ortogonale al piano del moto, la direzione di $\vec{v}$ è tangente alla curva che disegna la traettoria (il cerchio).
In questo caso

$$\vec{v} = \vec{v}_T = \omega r \hat{u}_T$$

dove $\hat{u}_T$ è un versore tangente alla circonferenza.

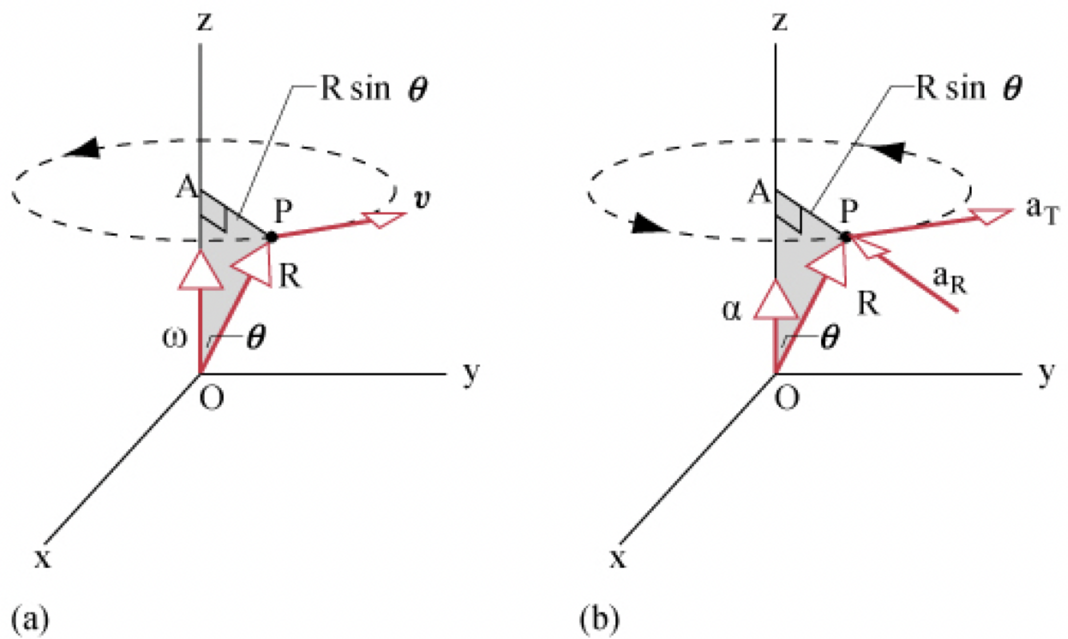


Si definisce l'accelerazione per il moto circolare come

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\
&= \alpha r \hat{u}_T + \vec{\omega} \times (\omega r \hat{u}_T) = \alpha r \hat{u}_T + \omega^2 r \hat{u}_R \\
&\equiv a_T \hat{u}_T + a_R \hat{u}_R
\end{aligned}
$$

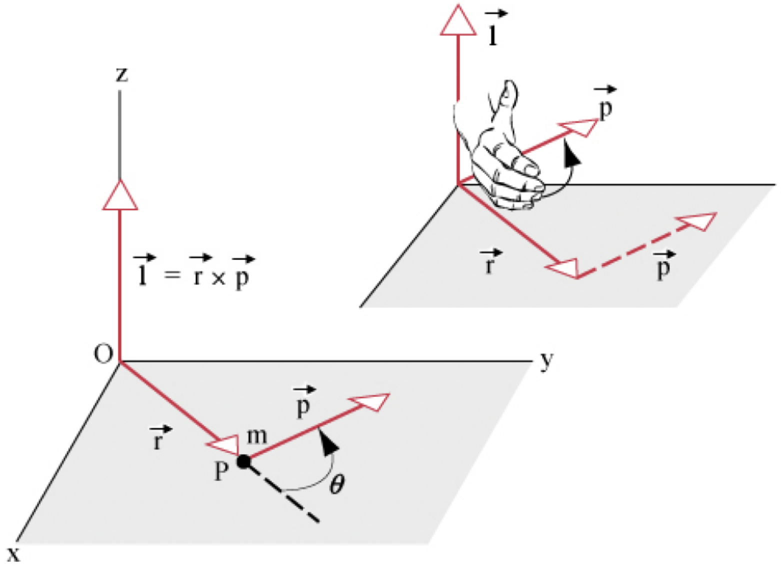
Le quantità $\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ sono nella direzione ortogonale al piano del moto e formano un angolo di $\pi/2$, rispettivamente, con $\hat{u}_R$ e $\hat{u}_T$.

$\vec{a}_T = a_T \hat{u}_T = \alpha r \hat{u}_T$ ha direzione tangente alla circonferenza, la traettoria descritta dal punto materiale, ed è legata al cambiamento del modulo della velocità. In caso di moto circolare uniforme è nulla.
$\vec{a}_R = a_R \hat{u}_R = \omega^2 r \hat{u}_R$ ha direzione verso il centro della circonferenza, e dipende dal cambiamento della direzione della velocità. È nulla nel moto rettilineo.



Tutto quanto può essere ripetuto usando un sistema di riferimento la cui origine non coincide con il centro della circonferenza.

Momento angolare



Il **momento angolare** o **momento della quantità di moto** è sempre definito rispetto ad un punto che chiamiamo *polo*. Nella figura di sopra il polo è indicato con O ed è l'origine del sistema di coordinate. Fissato un sistema di coordinate il polo può essere un generico punto dello spazio. Il momento angolare è definito rispetto a questo punto come

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \Rightarrow l = mvr \sin\theta$$

Orrore M. S. !!!

coincide con la usuale formulazione ([III.5]) del secondo principio della dinamica.

4.5. Momento angolare e momento della forza

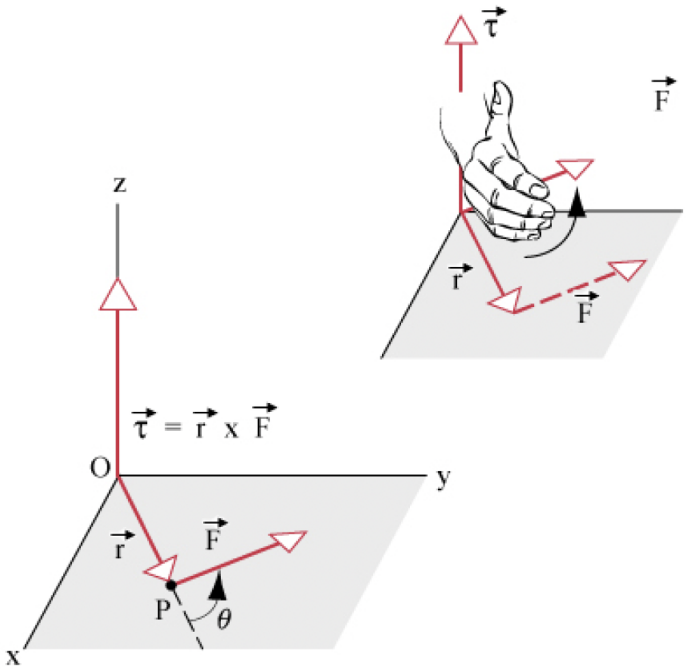
Consideriamo un punto materiale P che si muova in un sistema di riferimento inerziale. Sia $\vec{q} = m\vec{v}$ la sua quantità di moto, e scegliamo per nostra comodità un punto Ω di riferimento (gli esempi che discuteremo in questo e in altri capitoli ci chiariranno con quali criteri il punto Ω possa essere scelto). Si chiama *momento angolare* o *momento della quantità di moto* del punto P rispetto al polo Ω il vettore

$$\vec{p} = \Omega P \times \vec{q} \qquad \text{[IV.20]}$$

Ci proponiamo di stabilire quale sia l'equazione dinamica che governa l'evoluzione di $\vec{p}$. Partiamo dal secondo principio della dinamica (eq. [III.5]), che possiamo scrivere anche come:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{\ldots} \qquad \text{[IV.21]}$$

Momento torcente



Si definisce il **momento torcente, o meccanico** (in inglese *torque*) di una forza $\vec{F}$ rispetto ad un polo la quantità

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF \sin\theta$$

Dinamica e momento angolare

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$$

dove ho usato la seconda legge di Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = m\vec{a}$$

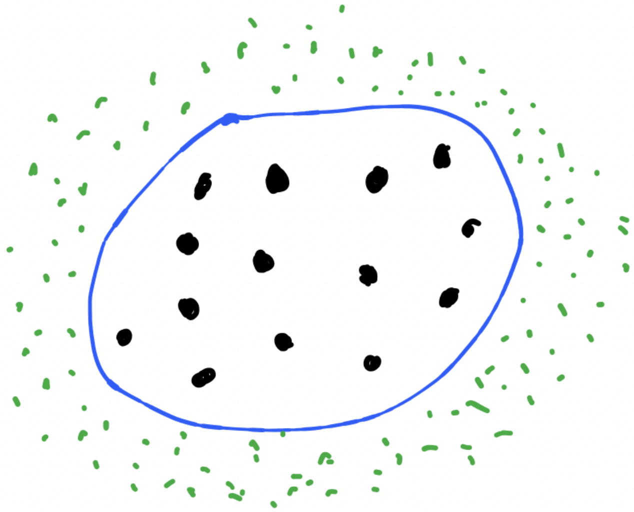
e ho indicato con $\vec{F}$ la risultante di tutte le forze che agiscono sul punto materiale P.

Quindi

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

Lezione 2

Sistema di particelle



Considero un insieme di A punti materiali (particelle). Nel caso della figura le particelle che considero sono contenute dalla linea azzurra, sistema che identifico come S. All'esterno di S ci possono essere altre entità (particelle). Il sistema esterno sarà identificato come E.

Definizioni

** Per ogni particella

m_i massa dell'i-esima particella

$\vec{r}_i$ posizione dell'i-esima particella

$\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ velocità dell'i-esima particella

$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ quantità di moto (impulso, momento) dell'i-esima particella

*** Per il sistema

$\sum_i \equiv \sum_{i=1}^{A}$

Massa totale $M = \sum_i m_i$

Posizione del Centro di Massa

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

Velocità del Centro di Massa

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$$

Momento totale del sistema $\vec{P}_S = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_{\mathrm{CM}}$

Un sistema di riferimento è detto inerziale quando $\vec{P}_S =$ costante.
Nel caso in cui si scelga il Centro di Massa come origine delle coordinate del sistema inerziale, si ha $\vec{P}_S = 0$.
Si distingue quindi il sistema del Laboratorio in cui $\vec{P} =$ costante e quello del CM in cui $\vec{P}_S = 0$.
È da notare che anche nel sistema del CM le particelle non sono, necessariamente, ferme. In altre parole, $\vec{p}_i \neq 0$ in generale. La somma di tutti i $\vec{p}_i$ è nulla.

Se $\vec{P}_S$ = costante il sistema è isolato. In realtà S è in contatto con l'esterno (E). Possiamo sempre considerare un E abbastanza ampio in modo tale che $S + E$ sia un sistema isolato. In questo caso

$$\vec{P}_S + \vec{P}_E = \text{const}$$

Questo implica che qualsiasi variazione di $\vec{P}_S$ debba essere compensata da un'analoga variazione di $\vec{P}_E$ in modo tale che

$$\Delta\vec{P}_S + \Delta\vec{P}_E = 0 \Rightarrow \sum_{i\in S} \Delta\vec{p}_i = -\sum_{k\in E} \Delta\vec{p}_k$$

dove gli indici indicano l'appartenenza al sistema interno S o esterno E. Ad ogni modifica dell'impulso del sistema S corrisponde uno scambio di impulso del sistema E.
Dalle equazioni precedenti possiamo ottenere l'espressione della forza che agisce sul sistema

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_S}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i\in S}\vec{p}_i = \sum_{i\in S}\vec{f}_i$$

La somma sulle forze interne è nulla.

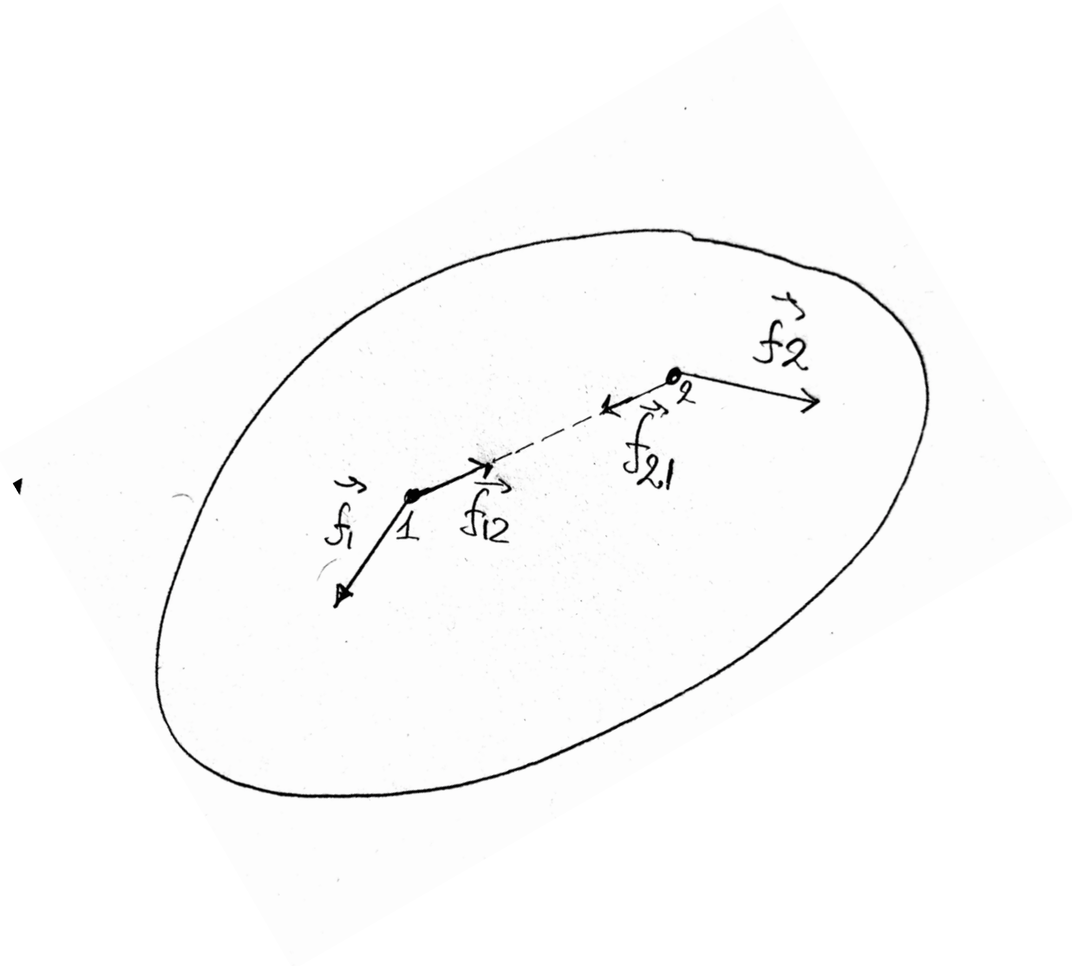
Indico con due indici le forze interne che agiscono sugli elementi i e j di S e con un solo indice la somma delle forze esterne che agiscono sull'elemento i.

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i \in S} \left(\vec{f}_i + \sum_{j \in S} \vec{f}_{ij} \right)$$

ma

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \vec{f}_{ij} = 0$$

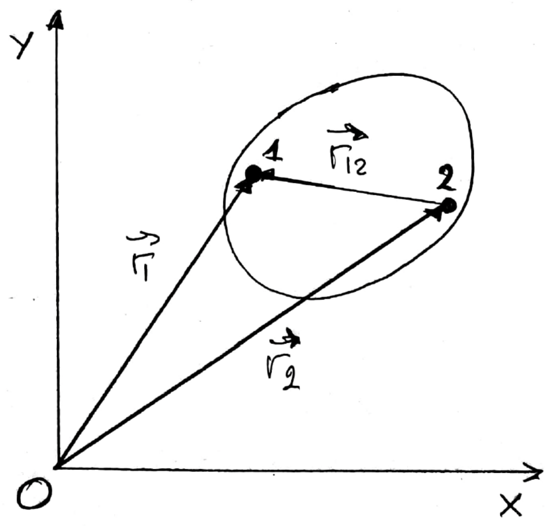
perché nella somma appare sia $\vec{f}_{ij}$ che $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$.



Esempio con due particelle.

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_S}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{\mathsf{CM}}}{dt} = M\vec{a}_{\mathsf{CM}}$$

Momento angolare di un sistema di particelle



Necessaria la definizione di polo

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{r}_i \times \left(\sum_{k \in S} \vec{f}_{ik} + \sum_{k \in E} \vec{f}_{ik} \right)$$

Caso di due particelle

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_1 \times \sum_{k \in E} \vec{f}_{1k} \\
\vec{\tau}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21} + \vec{r}_2 \times \sum_{k \in E} \vec{f}_{2k}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \sum_{k \in E} \vec{f}_{1k} + \vec{r}_2 \times \sum_{k \in E} \vec{f}_{2k} + \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12}}_{0}
$$

Questo perché $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ e $\vec{f}_{12}$ è parallelo a $\vec{r}_{21}$.

In generale: le forze interne non contribuiscono al momento torcente.

$$
\sum_{i \in S} \vec{\tau}_i = \sum_{i \in S} \vec{r}_i \times \sum_{k \in E} \vec{f}_{ik} + \underbrace{\sum_{i \in S} \sum_{k \in S} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{f}_{ik}}_{0}
$$

$$
\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i \in S} \vec{l}_i \right) = \sum_{i \in S} \vec{\tau}_i
$$

Se il sistema è isolato non c'è momento torcente perché, per definizione, tutte le interazioni con l'esterno sono nulle, quindi il momento angolare totale è conservato.

Energia di un sistema di particelle

Esempio con un sistema di due particelle.
Forze esterne

$$\vec{F}_1 = \sum_{k \in E} \vec{f}_{1k} \;\; ; \;\; \vec{F}_2 = \sum_{k \in E} \vec{f}_{2k}$$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} = \vec{F}_2 - \vec{f}_{12} \end{aligned}$$

Il lavoro fatto su 1 e 2 nel tempo dt che implica variazioni $d\vec{r}_1$ $d\vec{r}_2$.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

Sommando

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} \cdot \underbrace{(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)}_{d\vec{r}_{12}} \qquad (1)$$

$$d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \;\; ; \;\; d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t_0) - (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_2(t_0)) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) - (\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)) = \vec{r}_{12}(t) - \vec{r}_{12}(t_0) = d\vec{r}_{12}$$

Integrando da t_0 a t la parte sinistra della (1) ottengo

$$\int_{t_0}^{t} \left(m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_1 dt + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \cdot \vec{v}_2 dt \right) = \int_{v(t_0)}^{v(t)} (m_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2)$$
$$= \;\; \frac{1}{2} m_1 v_1^2 |_{v(t_0)}^{v(t)} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 |_{v(t_0)}^{v(t)} \equiv (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)|_{\mathcal{T}(t_0)}^{\mathcal{T}(t)}$$

L'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche di ogni particella.

Chiamo $A \equiv \{\vec{r}_1(t_0), \vec{r}_2(t_0)\}$ e $B \equiv \{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\}$ e integro la parte destra della (1)

$$\int_{A}^{B} \left(\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \right) \equiv \mathcal{W}_{AB}^{(1)\text{ext}} + \mathcal{W}_{AB}^{(2)\text{ext}} + \mathcal{W}_{AB}^{\text{int}} \qquad (2)$$

Quindi

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2|_{\mathcal{T}(t_0)}^{\mathcal{T}(t)} = \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} + \mathcal{W}_{AB}^{\text{int}} \qquad (3)$$

La variazione di energia cinetica è uguale alla somma dei lavori fatti dalle forze esterne sul sistema e dal lavoro delle forze interne.

Energia cinetica e sistema del CM

Le quantità senza apice sono definite nel sistema del laboratorio (L) e quelle con apice nel sistema del centro di massa (CM).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R} \;\; ; \;\; \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{\mathrm{CM}}$$

In L l'energia cinetica può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i') \\ &= \frac{1}{2}\left[2\vec{v}_{\mathrm{CM}} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{0} + \sum_i m_i v_{\mathrm{CM}}^2 + \sum_i m_i (v_i')^2\right] \\ &= \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (v_i')^2 \end{aligned}$$

perché $\sum_i m_i \vec{v}_i'$ è M per l'impulso totale del sistema nel CM, quindi zero per definizione di CM.

Forze conservative

Riscrivo l'Eq. (2) per un sistema con un numero generico di particelle

$$\sum_{i\in S}\int_A^B \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i + \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{k\in S}\int_A^B \vec{f}_{ik}\cdot d\vec{r}_{ik} \equiv \sum_{i\in s}\mathcal{W}_{AB}^{(i)\mathrm{ext}} + \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{k\in S}\mathcal{W}_{AB}^{(ik)\,\mathrm{int}}$$

dove il fattore 1/2 è inserito per evitare il doppio conteggio ed è implicito $\vec{f}_{kk}=0$. Ho indicato con A l'insieme delle posizioni di tutte le particelle nell'istante t_0 e con B quello delle posizione nell'istante t.

Se la somma delle forze esterne $\vec{F}_i$ che agiscono sulla particella i è descritta da un potenziale, il lavoro fatto dall'esterno su S è dato da

$$\sum_{i\in S}\int_A^B \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i = -\sum_{i\in S}\int_A^B \vec{\nabla}V_i\cdot d\vec{r}_i = -\sum_{i\in S} V_i|_A^B \tag{4}$$

Molto più generale il caso in cui le forze interne sono conservative. Questo significa che $\vec{f}_{ik}$ e, ovviamente, $\vec{f}_{ki}$ sono descrivibili in termini di una funzione potenziale, scalare, V_{ik} che dipende esclusivamente dalla posizione delle due particelle. Per invarianza traslazionale e rotazionale dello spazio, V_{ik} dipende solo dalla distanza tra le due particelle $V_{ik} = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|) = V(|\vec{r}_{ik}|)$. Questo mette in evidenza che le due forze sono uguali e opposte

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{\nabla}_i V_{ik} = +\vec{\nabla}_k V_{ik} = -\vec{f}_{ki}$$

e dirette lungo la retta che congiunge le due particelle.

Ricordo ad una dimensione $x_{12} = x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} f(|x_{12}|) &= \frac{dx_{12}}{dx_1} \frac{d}{dx_{12}} f(|x_{12}|) = \frac{d}{dx_{12}} f(|x_{12}|) \\ \frac{d}{dx_2} f(|x_{12}|) &= \frac{dx_{12}}{dx_2} \frac{d}{dx_{12}} f(|x_{12}|) = -\frac{d}{dx_{12}} f(|x_{12}|) \end{aligned}$$

Il lavoro fatto dalle forze interne è quindi

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} \int_A^B \vec{f}_{ik} \cdot d\vec{r}_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} \int_A^B \vec{\nabla}_{ik} V_{ik} \cdot d\vec{r}_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} V_{ik}|_A^B \quad (5)$$

Considerando le equazioni (4) e (5) posso definire l'**energia potenziale totale** del sistema ad un certo istante come

$$V = \sum_{i \in S} V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} V_{ik} \qquad (6)$$

La conservazione dell'energia cinetica (3) può essere scritta come

$$\mathcal{T}(t) - \mathcal{T}(t_0) = -V(B) + V(A) \;\; ; \;\; \mathcal{T}(t) + V(B) = \mathcal{T}(t_0) + V(A) \qquad (7)$$

che indica come l'energia totale del sistema, intesa come somma di energia cinetica più energia potenziale, sia conservata ad ogni istante.

Il secondo termine dell'equazione (6) è detto *energia potenziale interna* del sistema. In generale, questa energia non è uguale a zero e può variare nel tempo modificando la struttura interna del sistema.
Se l'energia potenziale interna è costante nel tempo, ci si trova in una situazione idealizzata e il sistema è detto **corpo rigido**. In questo caso, i vettori $\vec{r}_{ik}$, che indicano le posizioni reciproche delle particelle che compongono il sistema, sono costanti nel tempo. Ne consegue che $d\vec{r}_{ik}/dt \perp \vec{r}_{ik}$ e quindi a $\vec{f}_{ik}$. In un corpo rigido le forze interne non fanno lavoro e l'energia potenziale rimane costante. Dato che un potenziale è definito a meno di una costante, in un corpo rigido si può sempre definire l'energia potenziale interna uguale a zero.

Lezione 3

Il corpo rigido

La definizione di corpo rigido è data precedentemente.

Distribuzioni discrete di massa

Si tratta di sistemi in cui le distanze tra le parti che lo compongono sono molto maggiori delle dimensioni delle parti stesse che possono essere considerate come punti materiali massivi (particelle). Il numero di particelle è enormemente inferiore al numero di Avogadro ($\sim 6.022 \times 10^{23}$) quindi è conveniente considerare una distribuzione discreta delle masse.

Distribuzioni continue di massa

Le distanze con cui si descrive il corpo rigido sono molto maggiori delle distanze tra le particelle che lo compongono. Inoltre, il loro numero è paragonabile a quello di Avogadro. Diventa conveniente una descrizione di questi sistemi come composti da una distribuzione continua della materia.

Per sistemi con distribuzioni continue di massa le sommatorie sulle particelle si trasformano in integrali.
Indico con $dm(\vec{r})$ la quantità di massa contenuta nell'elemento infinitesimo di volume $d\mathcal{V}(\vec{r})$. La densità di materia è definita come

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{d\mathcal{V}(\vec{r})} \tag{8}$$

con le normalizzazioni

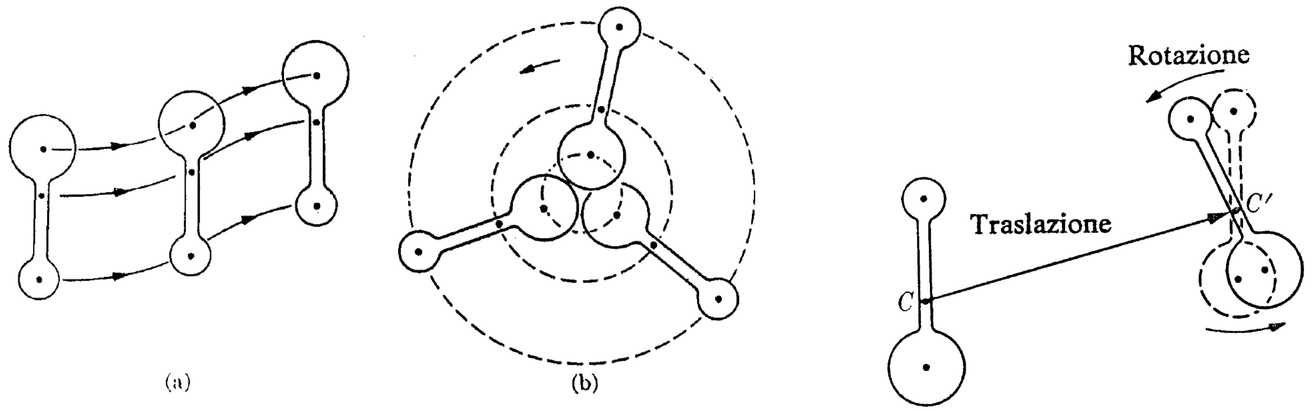
$$\int dm(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}) d\mathcal{V}(\vec{r}) = \int \rho(x,y,z) dxdydz = M$$

dove M è la massa del sistema. Gli integrali si estendono su tutto lo spazio.
La posizione del centro di massa è definita come

$$\vec{R} \equiv \{X, Y, Z\} = \left\{ \frac{\int x\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M}, \frac{\int y\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M}, \frac{\int z\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M} \right\}$$

e analogamente

$$\vec{v}_{CM} \equiv \{X, Y, Z\} = \left\{ \frac{\int v_x\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M}, \frac{\int v_y\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M}, \frac{\int v_z\rho(\vec{r})d\mathcal{V}(\vec{r})}{M} \right\}$$



Moti del corpo rigido

A. Traslazione.

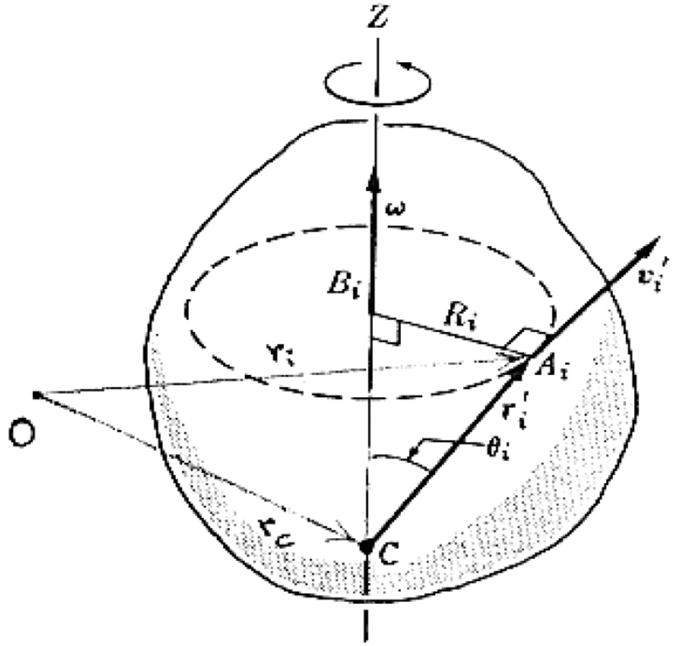
Tutte le particelle descrivono traiettorie parallele. Le rette che uniscono due punti qualsiasi del corpo rimangono sempre parallele alla loro direzione iniziale. Caso (a)

B. Rotazione.

Tutte le particelle descrivono traiettorie circolari attorno ad una retta chiamata asse di rotazione. Caso (b).

C. Rototraslazione.

Combinazione dei due moti.



Rotazione del corpo rigido attorno ad un asse passante per il centro di massa (C nella figura). L'osservatore è in un sistema di riferimento inerziale il cui centro di coordinate è O. La velocità del punto A_i rispetto all'osservatore può essere espressa come $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i$ dove $\vec{v}_C$ è la velocità del CM rispetto al sistema di riferimento dell'osservatore e $\vec{v}'_i$ la velocità del punto A_i nel sistema di riferimento del CM. Poiché nel sistema del CM non c'è traslazione si ha che

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c)$$

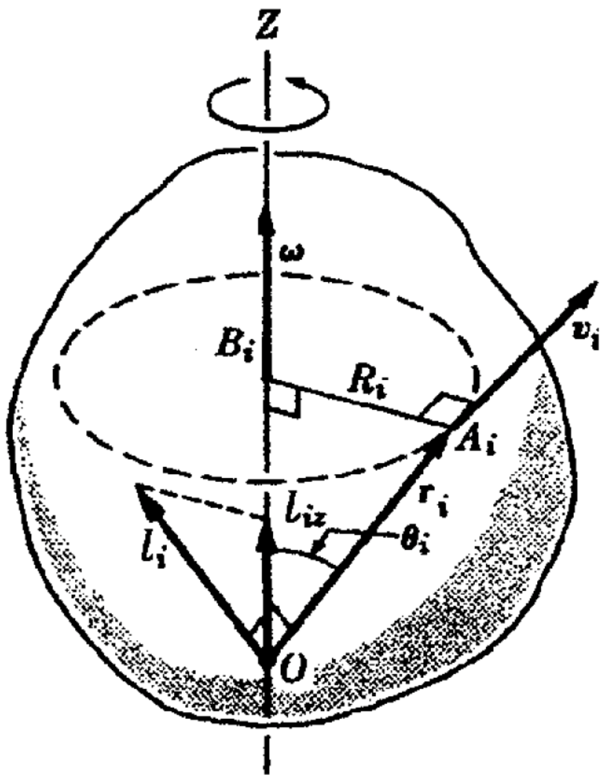
Considero la velocità relativa ad O di un altro punto del sistema A_k.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'_k = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_c)$$

La velocità relativa è

$$\vec{v}_i - \vec{v}_k = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

Questo perché $\vec{\omega}$ è lo stesso per tutti i punti le cui distanze relative rimangono costanti nel tempo.



Considero il sistema del CM come inerziale e pongo l'origine degli assi in O. Tolgo gli apici per semplificare la scrittura. Rotazione attorno ad un asse Z che passa per il CM. Il momento angolare del punto materiale i è dato da

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Geometria della situazione

$$\vec{l}_i \perp (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Rightarrow l_{iz} = l_i \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_i) = l_i \sin\theta_i$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i = \vec{r}_i \perp (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \Rightarrow l_i = m_i r_i v_i \Rightarrow l_{iz} = m_i r_i v_i \sin\theta_i \equiv m_i v_i R_i$$

$$v_i = \omega r_i \sin\theta_i = \omega_i R_i$$

Quindi

$$l_{iz} = m_i (r_i \sin\theta_i)^2 \omega = m_i R_i^2 \omega$$

Momento angolare *assiale* (lungo l'asse Z) del sistema

$$L_Z = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega \equiv I\omega$$

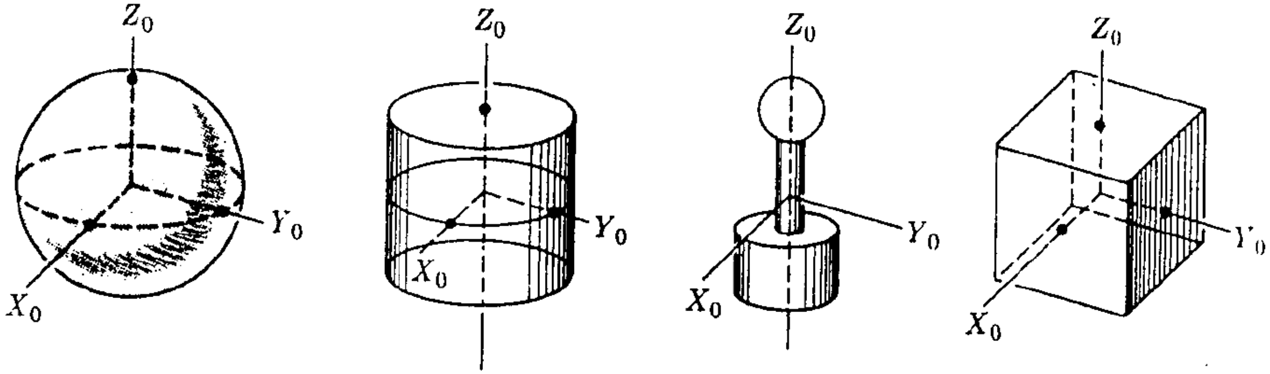
dove si è definito il momento d'inerzia

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

Per una distribuzione continua di materia

$$\rho(x,y,z) = \frac{dm(x,y,z)}{dx\,dy\,dz} \equiv \frac{dm}{d\mathcal{V}} \quad : \quad I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho d\mathcal{V}$$

In generale, il momento angolare totale $\vec{L}$ NON è parallelo all'asse di rotazione. Questo può avvenire per certi assi e questi assumono il nome di assi principali d'inerzia. È possibile dimostrare che per ogni corpo esistono 3 assi principali d'inerzia mutuamente ortogonali.

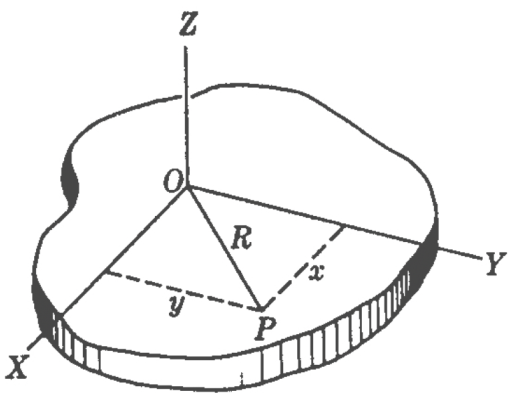


Quando il corpo possiede qualche simmetria, l'asse di simmetria è un asse principale d'inerzia.
Per una rotazione attorno all'asse principale d'inerzia $\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$ quindi si ha la relazione vettoriale.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Abbiamo definito $R_i = \sin\theta_i r_i$. Questo significa che il piano su cui giace $\vec{R}$ è sempre ortogonale alla direzione di L_Z. Per quanto riguarda il momento di inerzia si ha che

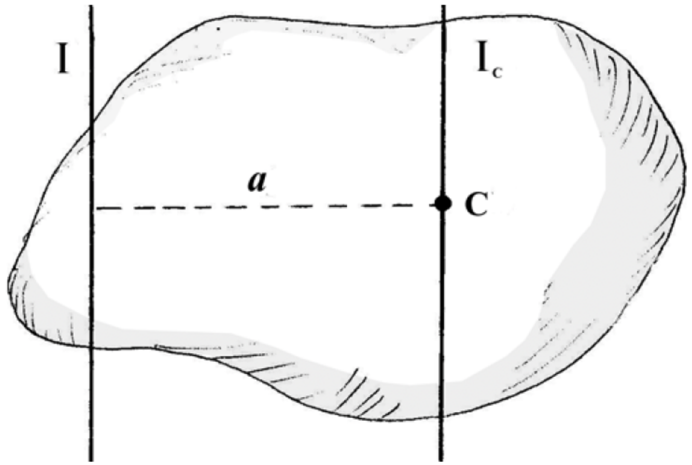
$$\begin{aligned} I_Z &= \int R^2 \rho \, d\mathcal{V} = \int (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ I_Y &= \int (x^2 + z^2) \rho \, d\mathcal{V} \; ; \; I_X = \int (y^2 + z^2) \rho \, d\mathcal{V} \end{aligned}$$



Per una lamina sottile la componente z della densità può considerarsi nulla $\rho(z) = 0$. Quindi $I_Y = \int x^2 \rho \, d\mathcal{V}$ e $I_X = \int y^2 \rho \, d\mathcal{V}$. Quindi

$$I_Z = \int (x^2 + y^2) \rho \, d\mathcal{V} = \int x^2 \rho \, d\mathcal{V} + \int y^2 \rho \, d\mathcal{V} = I_Y + I_X$$

Teorema di Steiner

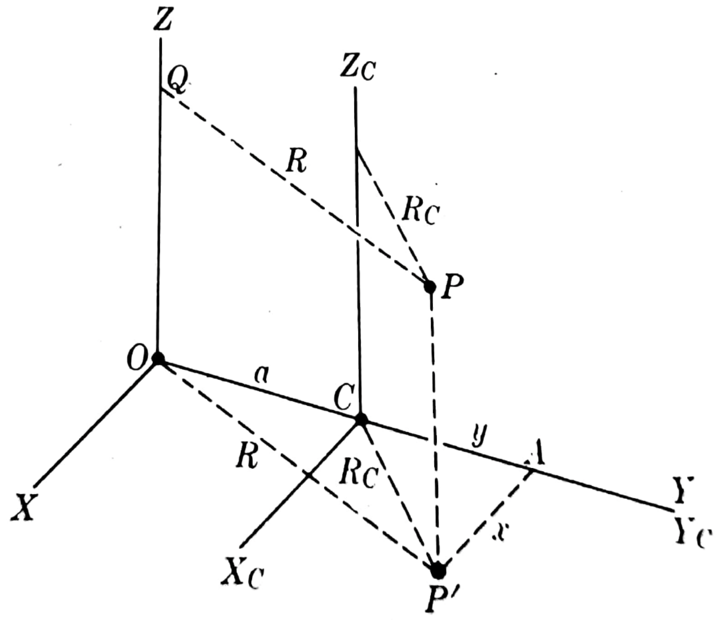


Il momento d'inerzia tra due assi di rotazione paralleli, uno passante per il CM, può essere espresso come

$$I = I_c + Ma^2$$

dove a è la distanza tra i due assi e I_C è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il CM.

Dimostrazione



Considero il sistema di coordinate della figura. Le variabili con C sono misurate nel sistema del CM. Per un singolo punto materiale ho

$$R_C^2 = x^2 + y^2$$

$$R^2 = x^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2ya = R_C^2 + 2ya + a^2$$

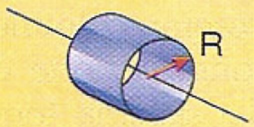
Il momento d'inerzia totale si ottiene sommando su tutti i punti

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (R_C^2 + 2y_i a + a^2) = \sum_i m_i R_C^2 + 2 \underbrace{\sum_i m_i y_i a}_{0} + a^2 \sum_i m_i = I_C + Ma^2$$

Il secondo termine è nullo perché corrisponde alla componente y della coordinata del CM che è l'origine del sistema di coordinate.

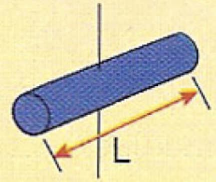
Guscio cilindrico, rispetto all'asse

$I = mR^2$



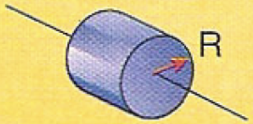
Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro

$I = \frac{1}{12}mL^2$



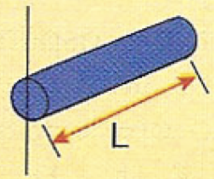
Cilindro pieno, rispetto all'asse

$I = \frac{1}{2}mR^2$



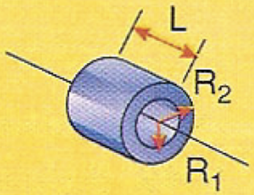
Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per una estremità

$I = \frac{1}{3}mL^2$



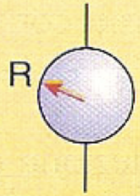
Cilindro cavo, rispetto all'asse

$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$



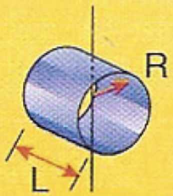
Guscio sferico sottile, rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{3}mR^2$



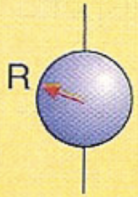
Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro

$I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$



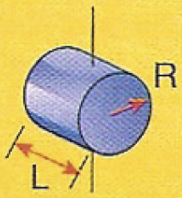
Sfera piena, rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{5}mR^2$



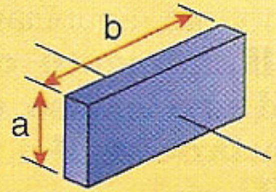
Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro

$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$



Parallelepipedo rettangolo pieno, rispetto a un asse passante per il centro, perpendicolare a una faccia

$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$



Per una distribuzione continua di materia è conveniente definire il raggio giratore K

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho d\mathcal{V} \equiv MK^2 \ ; \ \ K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Per sistemi omogenei, quelli in cui la densità è costante, K dipende solo dalla geometria. Infatti per questi sistemi

$$I = \int R^2 \rho d\mathcal{V} = \rho \int R^2 \, d\mathcal{V} = \rho \mathcal{F}$$

dove $\mathcal{F}$ è una fattore geometrico uguale per tutti i corpi con la stessa forma e le stesse dimensioni, ed è indipendente dal materiale di cui è composto il corpo. Quindi

$$I = MK^2 = \rho \mathcal{F} = \frac{M}{\mathcal{V}} \mathcal{F} \Rightarrow K^2 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{V}}$$

Dinamica del moto del corpo rigido

Moto del CM

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Il moto del centro di massa del corpo rigido è quello di un punto materiale di massa M a cui si può immaginare di applicare la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido.

Rotazione
Consideriamo come polo il CM,

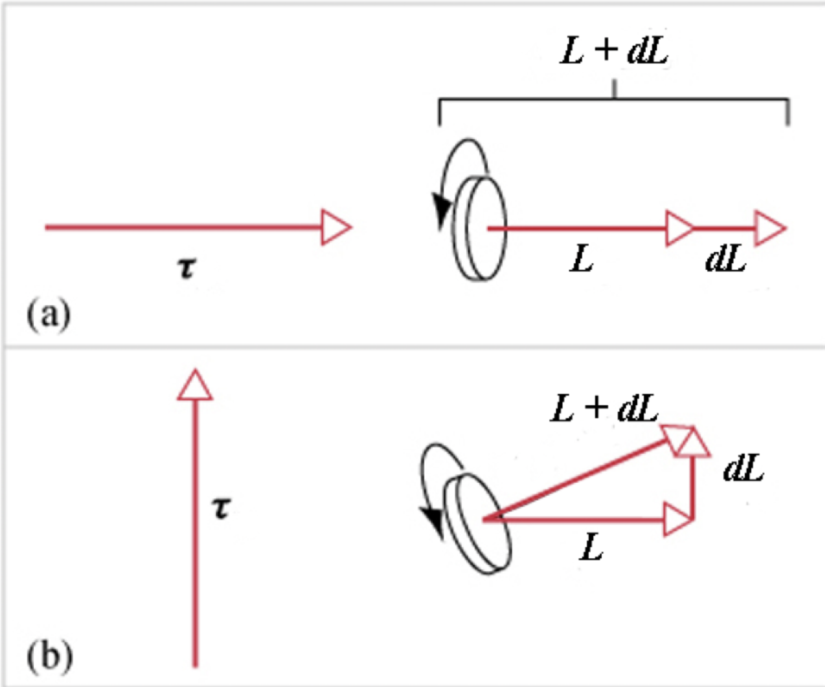
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

Questa equazione è valida se il polo è un generico punto che rimane fisso rispetto ad un sistema inerziale. Se $\vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$ il momento angolare è conservato.

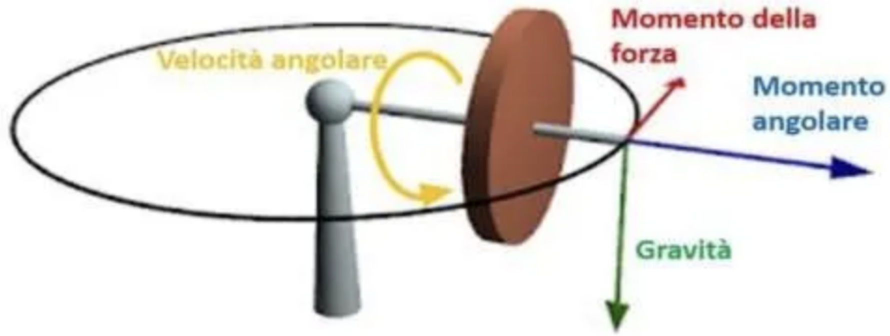
Nella letteratura italiana queste due equazioni sono dette *equazioni cardinali*.

Grandezze lineari		Grandezze angolari	
velocità	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	velocità angolare	$\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$
accelerazione	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	accelerazione angolare	$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$
massa	M	momento d'inerzia	I
quantità di moto (impulso)	$\vec{p} = M\vec{v}$	momento angolare	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
forza	$\vec{f} = d\vec{p}/dt$	momento torcente	$\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}\widehat{u}_P + L\frac{d\widehat{u}_P}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}\widehat{u}_P + L\frac{d\phi}{dt}\widehat{u}_N \; ; \quad \phi = \text{arctan}(dL/L)$$



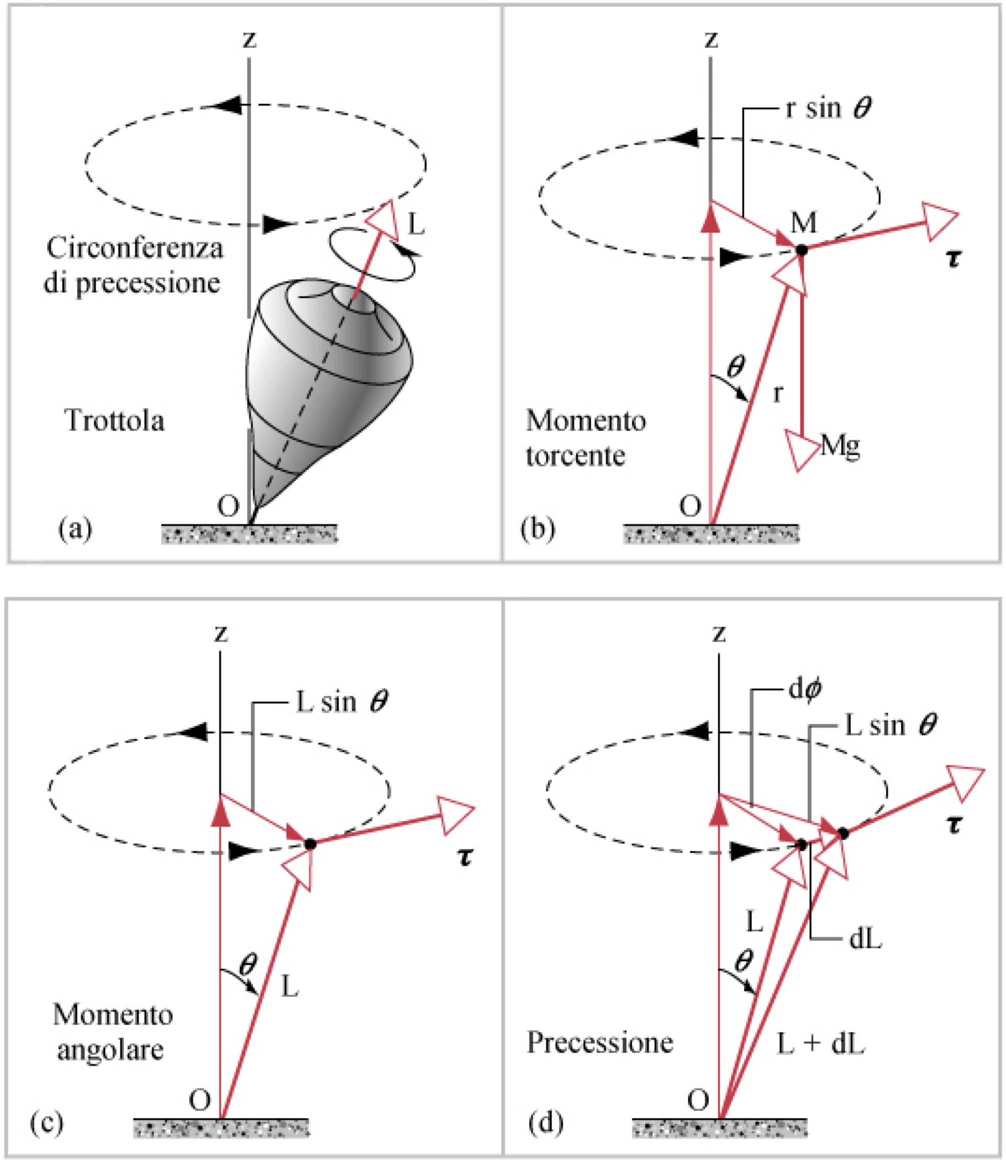
(a) Se il momento torcente è parallelo al momento angolare, esso modifica il modulo ma non la direzione di quest'ultimo.
(b) Se il momento torcente è perpendicolare al momento angolare, esso modifica la direzione ma non il modulo di quest'ultimo.



Gravità $= \vec{F}_G = M\vec{g}$; Velocità angolare $\vec{\omega}$; Momento angolare $\vec{L} = I\vec{\omega}$; Momento torcente della forza $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_G$. Dato che le direzioni di $\vec{r}$, $\vec{\omega}$, $\vec{F}_G$ sono ortogonali, $d\vec{L}/dt = 0$, e la relazione tra i moduli è

$$\tau = rMg = L\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{rMg}{L} = \frac{rMg}{I\omega}$$

Per $\omega \to \infty$ si ha che $d\phi/dt \to 0$ e quindi $L =$ costante. In questa situazione la direzione del momento angolare è costante, quindi la direzione dell'asse di rotazione non cambia, l'apparato non cade per effetto della gravità.

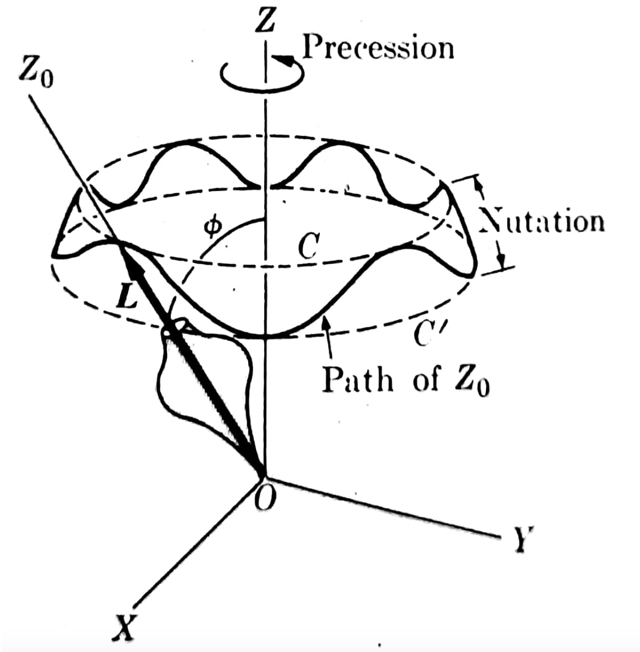


In generale $d\phi/dt \ll \omega$ ma non nullo. Questo produce un moto di precessione attorno all'azze Z. Meglio identificata nel caso della trottola.

A questo punto dobbiamo considerare il moto di precessione del CM rispetto all'asse Z. La velocità angolare del CM è data da $\vec{\omega} + d\phi/dt\hat{u}_Z$, quindi il momento angolare totale è

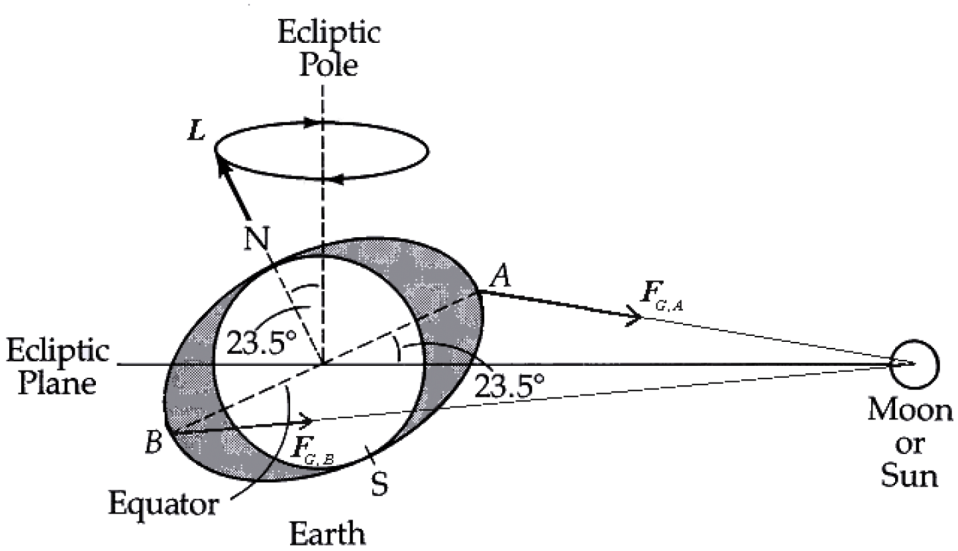
$$\vec{L} + \vec{L}_Z = I\vec{\omega} + M(R\sin\theta)^2 \frac{d\phi}{dt}\,\hat{u}_Z$$

dove M è la massa della trottola R è la posizione del CM e θ l'angolo con l'asse Z.



Il risultato di questa componente è un moto oscillatorio dell'asse di rotazione della trottola tra due piani ortogonali all'asse Z. Questo moto è detto nutazione.

Precessione degli equinozi



Il piano dell'equatore terrestre forma un angolo di $23^\circ 27'$ con il piano dell'orbita terrestre o *eclittica*. L'intersezione tra i due piani è detta *linea degli equinozi*. L'asse di rotazione terrestre è essenzialmente la retta passante per i poli. Questa retta precede attorno alla normale al piano dell'eclittica in direzione est-ovest con un periodo di 27725 anni che corrisponde ad una velocità angolare di circa $50.27''$ di arco per anno. Questo fenomeno fu scoperto nel 135 a.c. da Ipparco di Nicea.

La precessione è dovuta all'interazione della terra con Luna e Sole. La terra non è sferica ma ha la forma di un elissoide. Calcoli dettagliati hanno mostrato che questa forma geometrica, combinata con l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto all'eclittica, fa sì che l'interazione con Luna e Sole produca un momento sul CM della Terra. La direzione del momento è perpendicolare all'asse terrestre. L'asse di rotazione deve precedere. L'asse di rotazione subisce anche una nutazione con ampiezza di $9.2''$ e periodo di oscillazione di 19 anni.
Scoperta nel 1728 da James Bradley (astronomo inglese successore di Edmund Halley come astronomo reale).

Energetica del corpo rigido

L'energia cinetica di un sistema di particelle è data da

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse con velocità angolare $\vec{\omega}$ si ha $v_i = \omega R_i$ dove R_i è la distanza della particella i dall'asse di rotazione. Quindi

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} (m_i R_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

questa espressione è valida per qualsiasi asse. Nel caso la rotazione avvenga attorno ad un'asse principale, poichè in questo caso $\vec{L} = I\vec{\omega}$, si ha che

$$\mathcal{T} = \frac{L^2}{2I}$$

Un'espressione più generale può essere ottenuta considerando le componenti di $\vec{\omega}$ sui tre assi principali X, Y, Z. In questo caso abbiamo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(I_X \omega_X^2 + I_Y \omega_Y^2 + I_Z \omega_Z^2 \right)$$

Consideriamo il caso generale in cui il corpo rigido ruota attorno ad un asse passante per il suo CM e trasla rispetto ad un osservatore inerziale. L'energia cinetica totale è data dalla somma dell'energia cinetica del CM e dell'energia cinetica interna rispetto al sistema del CM. Nel caso di un corpo rigido la sola energia cinetica interna è data dall'energia rotazionale, quindi

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è il momento d'inerzia definito rispetto all'asse di rotazione che passa per il CM.

Per la definizione di corpo rigido l'energia potenziale rimane costante, quindi per la conservazione dell'energia (3) la variazione di energia è dovuta esclusivamente al lavoro svolto dalle forze esterne

$$\mathcal{T}\big|_{t_0}^{t} = \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} + \underbrace{\mathcal{W}_{AB}^{\text{int}}}_{0} \tag{9}$$

Se le forze esterne sono conservative allora il lavoro è dato dalla variazione del potenziale esterno $\mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} = -[V(B) - V(A)]$.
Possiamo esprimere la conservazione dell'energia come

$$E = \mathcal{T}(t) + V(B) = \mathcal{T}(t_0) + V(A)$$

e quindi

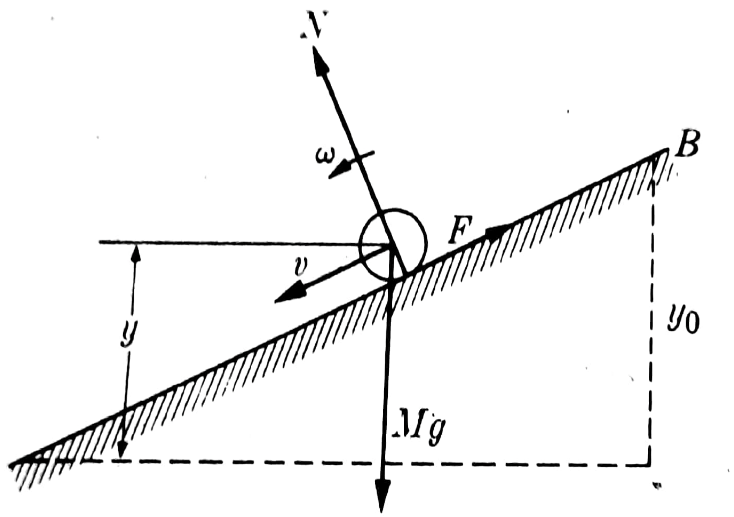
$$E = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + V = \text{costante} \tag{10}$$

Nel caso ci sia da considerare forze non conservative (attrito) si ha che

$$\mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} = -[V(B) - V(A)] + \mathcal{W}'$$

dove $\mathcal{W}'$ è il lavoro fatto dalle forze non conservative.

Cilindro che rotola su un piano inclinato



Un corpo rotondo (cilindro, sfera, anello) rotola su un piano inclinato partendo da un punto che si trova ad un'altezza y_0. Qual è la velocità quando arriva alla base del piano?

Si sfrutta la conservazione dell'energia. Al tempo t_0 cè solo l'energia potenziale

$$E = Mgy_0$$

Considerando che $\omega R = v_{\mathrm{CM}}$ (vedi pagina successiva), in ogni posizione intermedia l'energia è data dalla (10)

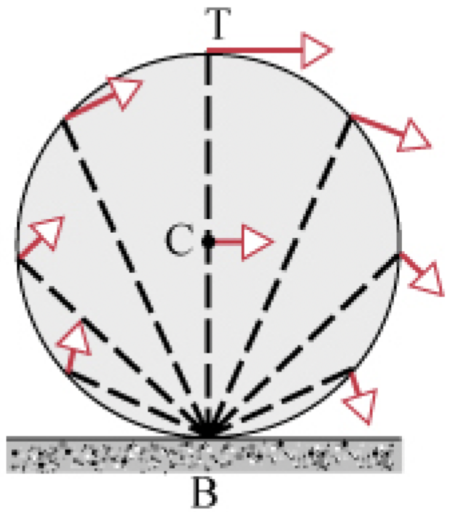
$$E = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v_{\mathrm{CM}}^2 + Mgy$$

Usando l'espressione del momento giratore si ha $I = MK^2$.

$$E = \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)v_{\mathrm{CM}}^2 + Mgy$$

Risolvendo per v_{CM}^2 si ha

$$v_{\mathrm{CM}}^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + K^2/R^2}$$



Il corpo in puro rotolamento ruota istante per istante intorno ad un asse passante per B (punto istantaneo di contatto) e perpendicolare al diametro BT. Tale asse è chiamato asse istantaneo di rotazione. La velocità angolare della rotazione del CM intorno a B è uguale alla velocità ω della rotazione intorno al centro di massa.