Parte 2

Urti

Definizione del sistema da descrivere.

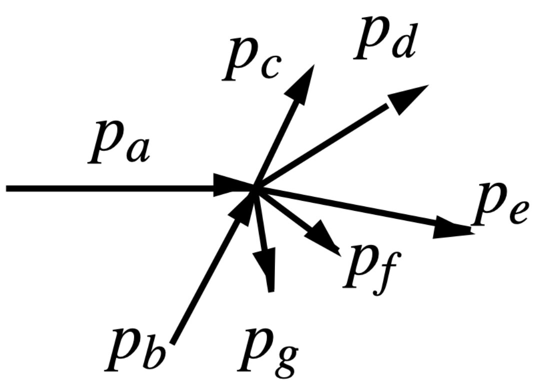
- Sistema di due corpi in cui agiscono solo forze interne.

- La situazione iniziale prevede che la distanza reciproca tra i due corpi sia infinita.
  (Una distanza tale che l'interazione tra i due corpi sia nulla.)

- Definita la situazione iniziale e l'interazione, lo scopo dello studio è quello di prevedere la situazione finale asintotica.

Notazioni usate.

$$a + b \longrightarrow c + d + \cdots$$

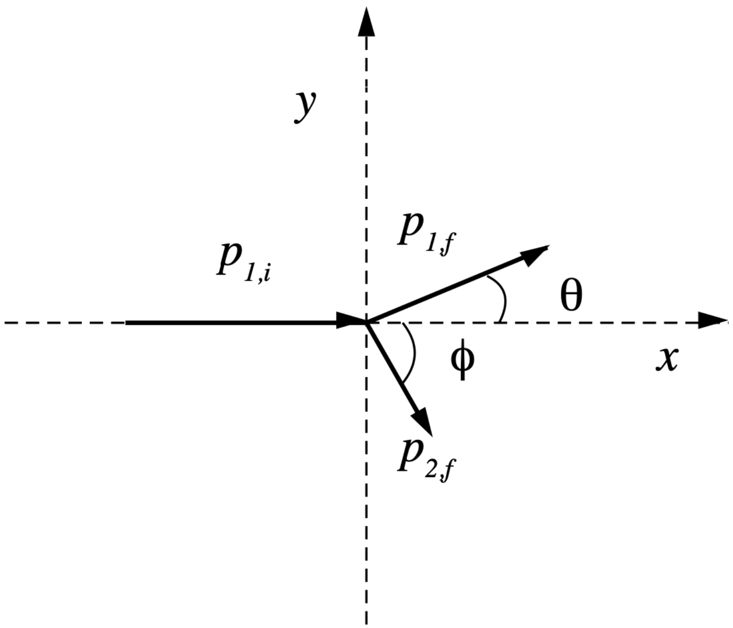


Il sistema è isolato, sono attive solo forze interne, quindi quantità di moto totale ed energia totale sono quantità conservate

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d + \vec{p}_e + \vec{p}_f + \cdots$$

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \epsilon_c + \epsilon_d + \epsilon_e + \epsilon_f + \cdots$$

Considero d'ora in poi il caso in cui sono presenti nello stato finale solo due particelle.
Sistema di riferimento del **Laboratorio** bersaglio fermo: $\vec{p}_2 = 0$.



Nella figura i p sono da considerarsi in grassetto, quindi vettori.

Identifico come piano di diffusione quello definito dai vettori $\vec{p}_{1,i}$ e $\vec{p}_{1,f}$, e l'asse x come quella definita dalla direzione di $\vec{p}_{1,i}$.
θ è detto angolo di diffusione.

Nel sistema di riferimento del laboratorio il processo avviene sul piano di diffusione.

$$\vec{p}_{1,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

Esplicitando l'equazione vettoriale per i tre assi cartesiani definiti come nella figura abbiamo

$$\begin{aligned} p_{1,i,x} &= p_{1,f,x} + p_{2,f,x} \quad ; \quad p_{1,i} = p_{1,f} \cos\theta + p_{2,f} \cos\phi \\ 0 &= p_{1,f,y} + p_{2,f,y} \quad ; \quad 0 = p_{1,f} \sin\theta - p_{2,f} \sin\phi \\ 0 &= 0 + p_{2,f,z} \end{aligned}$$

dove ho indicato con $p = |\vec{p}|$.

Nel sistema del laboratorio, se in un urto sono definiti $p_{1,i,y}$, $p_{1,f,y}$ e θ, l'angolo ϕ di rinculo della particella 2 è univocamente definito indipendentemente dalla massa e dal momento della particella 2.

Isolando il termine $p_{1,f,y}$ nelle equazioni precedenti e dividendo l'equazione della componente y con quella della componente x otteniamo.

$$\frac{p_{2,f}\sin\phi}{p_{2,f}\cos\phi} = \tan\phi = \frac{p_{1,f}\sin\theta}{p_{1,i} - p_{1,f}\cos\theta}$$

Sistema di riferimento del **Centro di Massa** (CM)

Definizioni.

Posizione del CM

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

Velocità e quantità di moto del CM

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M} \quad ; \quad \vec{P}_{\mathrm{CM}} = M\vec{V}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

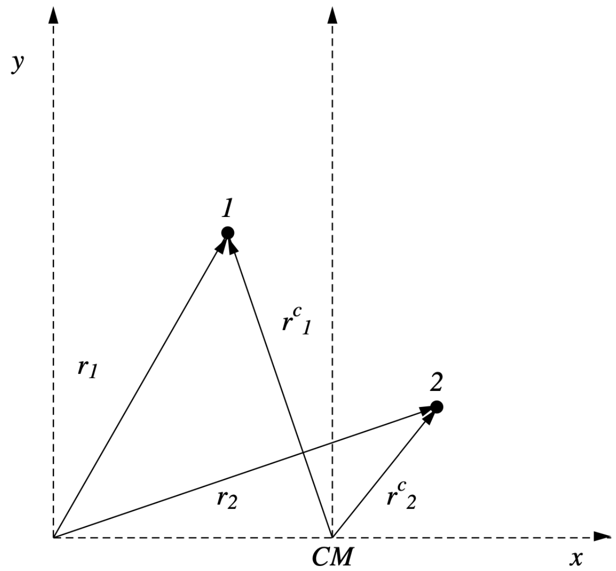
Distanza e velocità relative

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ ; \ \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Da cui si ricava

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{\mathrm{CM}} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_{\mathrm{CM}} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Poiché $\vec{P}_{\text{CM}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ è costante (sistema isolato) il sistema del CM posizionato in $\vec{R}_{\text{CM}}$ ($\vec{R}_{\text{CM}} = 0$) è un sistema inerziale.



Indico le quantità definite nel sistema del CM con un apice ^{c}.

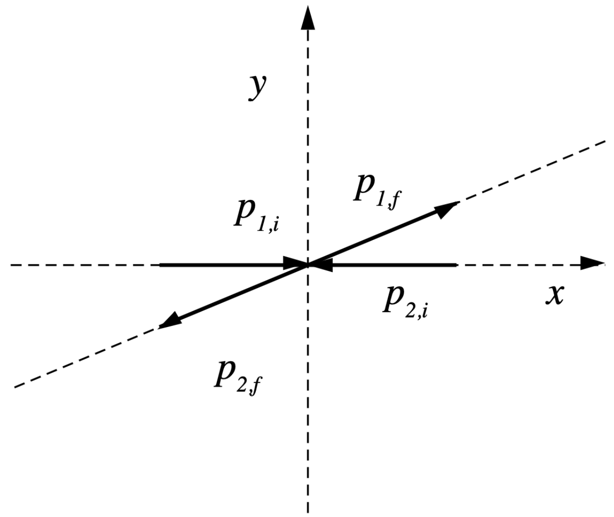
$$\vec{r}\,^c_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{\text{CM}} = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}\,^c_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{\text{CM}} = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{v}\,^c_1 = \frac{d\vec{r}\,^c_1}{dt} = \frac{m_2}{M}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_2}{M}\vec{v} \;\; ; \;\; \vec{v}\,^c_2 = \frac{d\vec{r}\,^c_2}{dt} = -\frac{m_1}{M}\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{m_1}{M}\vec{v}$$

$$\vec{p}\,^c_1 = m_1\vec{v}\,^c_1 = \frac{m_1 m_2}{M}\vec{v} = \mu\vec{v} \;\; ; \;\; \vec{p}\,^c_2 = m_2\vec{v}\,^c_2 = \frac{-m_1 m_2}{M}\vec{v} = -\mu\vec{v}$$

Massa ridotta $\mu = (m_1 m_2)/M$



Prima e dopo la diffusione, le due particelle si muovono nella stessa direzione con verso contrario.

L'energia cinetica interna nel sistema del CM è data dalla somma delle energie cinetiche delle due particelle.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^c &= \mathcal{T}_1^c + \mathcal{T}_2^c = \frac{1}{2}m_1(v_{\ 1}^{c})^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{\ 2}^{c})^2 = \frac{1}{2}\left(m_1\frac{m_2^2}{M^2}v^2 + m_2\frac{m_1^2}{M^2}v^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m_2\mu}{M}v^2 + \frac{m_1\mu}{M}v^2\right) = \frac{1}{2}\mu v^2\frac{m_1+m_2}{M} = \frac{1}{2}\mu v^2\end{aligned}$$

L'energia cinetica interna è quella di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa v.

Energetica

Dato che il sistema è isolato, l'energia del sistema è conservata nel processo di collisione. Indico con $\mathcal{T}_\alpha$ l'energia cinetica di ogni particella identificata con α. Oltre all'energia cinetica c'è anche l'energia interna del sistema legata sopratutto all'interazione tra le particelle interagenti (nel caso che considero solo due). Indico con V_{12} l'energia interna del sistema.

Nel processo di collisione tra due particelle da cui emergono solo due particelle esprimo la conservazione dell'energia totale del sistema come

$$E = \mathcal{T}_{1,i} + \mathcal{T}_{2,i} + V_{12,i} = \mathcal{T}_{1,f} + \mathcal{T}_{2,f} + V_{12,f}$$

Definisco il Q-valore come

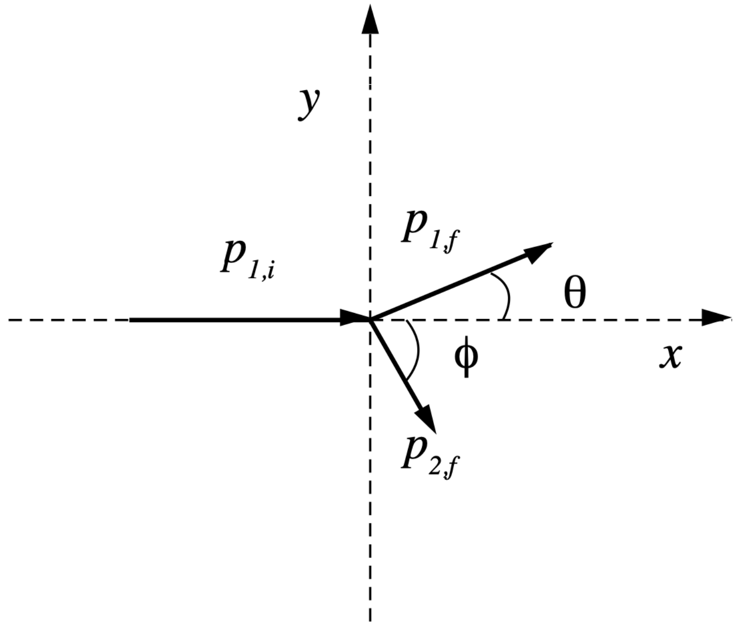
$$Q = \mathcal{T}_{1,f} + \mathcal{T}_{2,f} - (\mathcal{T}_{1,i} + \mathcal{T}_{2,i}) = V_{12,i} - V_{12,f}$$

- $Q = 0$ diffusione elastica.
  In questo caso **ANCHE** l'energia cinetica totale è conservata nel processo d'urto. C'è uno scambio della quantità quantità di moto e quindi dell'energia cinetica tra le due particelle, ma il valore dell'energia interna non viene modificato.

- $Q < 0$ diffusione endotermica
  Parte dell'energia cinetica iniziale è convertita per aumentare l'energia interna del sistema. Il sistema è in uno stato eccitato rispetto alla condizione iniziale.

- $Q > 0$ diffusione esotermica
  In questo caso l'energia cinetica delle particelle aumenta perché il sistema si trova in uno stato eccitato e l'urto produce una de-eccitazione e l'energia rilasciata si trasforma in energia cinetica del sistema.

Diffusione Elastica



In un urto elastico la conservazione dell'energia cinetica impone una condizione che lega i valori delle quantità
$\mathcal{T}_{1,i} = \vec{p}^{\,2}_{1,i}/2m_1$, $\mathcal{T}_{2,i}$, $\mathcal{T}_{1,f}$, $\mathcal{T}_{2,f}$, θ, ϕ.

Esempio *In un processo di diffusione elastica trovare il valore della massa m_2 del bersaglio note m_1, $\mathcal{T}_{1,i}$, $\mathcal{T}_{1,f}$ e l'angolo di diffusione θ nel sistema del laboratorio.*

Conservazione dell'energia cinetica:

$$\mathcal{T}_{1,i} = \mathcal{T}_{1,f} + \mathcal{T}_{2,f} \;\; ; \;\; \mathcal{T}_{2,f} = \frac{p^2_{2,f}}{2m_2} = \mathcal{T}_{1,i} - \mathcal{T}_{1,f} \tag{1}$$

dove ho usato la simbologia $p = |\vec{p}|$.
La conservazione della quantità di moto implica

$$\vec{p}_{1,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \;\; ; \;\; p^2_{2,f} = (\vec{p}_{1,i} - \vec{p}_{1,f})^2$$

quindi

$$\vec{p}^{\,2}_{1,i} + \vec{p}^{\,2}_{1,f} - 2p_{1,i}p_{1,f}\cos\theta = 2m_1(\mathcal{T}_{1,i} + \mathcal{T}_{1,f}) - 4m_1\sqrt{\mathcal{T}_{1,i}\mathcal{T}_{1,f}}\cos\theta$$

Usando la (1)

$$m_2 = \frac{p^2_{2,f}}{2(\mathcal{T}_{1,i} - \mathcal{T}_{1,f})} = m_1 \frac{\mathcal{T}_{1,i} + \mathcal{T}_{1,f} - 2\sqrt{\mathcal{T}_{1,i}\mathcal{T}_{1,f}}\cos\theta}{\mathcal{T}_{1,i} - \mathcal{T}_{1,f}}$$

Esempio *In un processo di diffusione elastica tra due particelle aventi la stessa massa m, nel sistema di riferimento del laboratorio, a quanto ammonta la somma degli angoli di diffusione θ e di rinculo ϕ?*

Definiamo l'asse x lungo la direzione della velocità $\vec{v}_{1,i}$ della particella incidente. La conservazione della quantità di moto, separando le componenti x e y, può essere scritta come (i moduli delle velocità non hanno la freccia, $|\vec{v}| \equiv v$):

$$\begin{aligned} mv_{1,i} &= mv_{1,f}\cos\theta + mv_{2,f}\cos\phi \quad (\text{asse}\, x) \\ 0 &= mv_{1,f}\sin\theta - mv_{2,f}\sin\phi \quad (\text{asse}\, y) \end{aligned}$$

e la conservazione dell'energia cinetica (il processo è elastico) come:

$$\frac{1}{2}mv_{1,i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1,f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2,f}^2$$

Quest'ultima equazione implica

$$v_{2,f} = \sqrt{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}$$

e sostituendola nell'equazione dell'asse y otteniamo

$$v_{1,f}\sin\theta = \sqrt{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}\,\sin\phi$$

da cui

$$\sin^2\phi = \frac{v_{1,f}^2\sin^2\theta}{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2} \Longrightarrow \cos^2\phi = 1 - \frac{v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}\sin^2\theta \tag{2}$$

Inserendola nell'equazione dell'asse x otteniamo

$$v_{1,i} - v_{1,f}\cos\theta = (v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2)^{1/2}\sqrt{1 - \frac{v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}\sin^2\theta}$$

$$v_{1,i}^2 + v_{1,f}^2\cos^2\theta - 2v_{1,i}v_{1,f}\cos\theta = (v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2)\left(1 - \frac{v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}\sin^2\theta\right) = v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2 - v_{1,f}^2\sin^2\theta$$

$$v_{1,f}^2\cos^2\theta - 2v_{1,i}v_{1,f}\cos\theta + v_{1,f}^2 + v_{1,f}^2\sin^2\theta = 0$$

$$2v_{1,f}(v_{1,f} - v_{1,i}\cos\theta) = 0 \Longrightarrow v_{1,f} = v_{1,i}\cos\theta$$

Dall'equazione (2) si ha

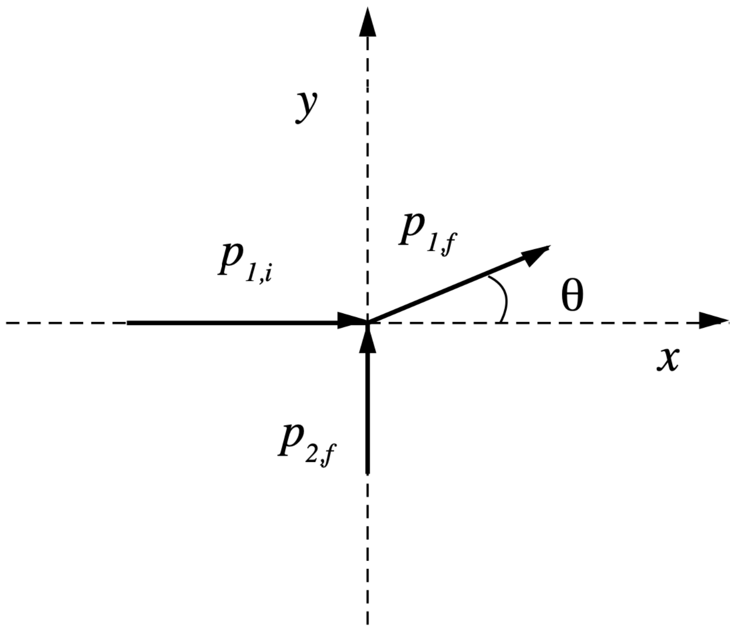
$$\cos^2\phi = 1 - \frac{v_{1,i}^2\cos^2\theta}{v_{1,i}^2 - v_{1,i}^2\cos^2\theta}\sin^2\theta = 1 - \frac{v_{1,i}^2\cos^2\theta}{v_{1,i}^2(1-\cos^2\theta)^2}\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$\cos\phi = \sin\theta$ implica che $\theta + \phi = \pi/2$. Infatti

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sqrt{1-\cos^2\phi} = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$$

In un urto elastico tra particelle di massa uguale, la somma degli angoli di diffusione forma un angolo retto.

Diffusione Anelastica



Esempio *Due particelle di massa m_1 e m_2 ed energia $\mathcal{T}_{1,i}$ e $\mathcal{T}_{2,i}$ collidono con un angolo di $\pi/2$ e fondono in un'unica particella. Trovare l'angolo θ rispetto alla direzione della particella 1 in cui si muove la nuova particella, l'energia cinetica $\mathcal{T}_f$ della particella, la perdita di energia $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}_i - \mathcal{T}_f$.*

Dalla conoscenza delle energie cinetiche è possibile trovare le velocità delle due particelle

$$v_{1,i} = \sqrt{\frac{2\mathcal{T}_{1,i}}{m_1}} \;\; ; \;\; v_{2,i} = \sqrt{\frac{2\mathcal{T}_{2,i}}{m_2}}$$

La conservazione della quantità di moto sui due assi cartesiani può essere espressa come

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,i} &= (m_1 + m_2) v_f \cos\theta \quad (\text{asse}\, x) \\ m_2 v_{2,i} &= (m_1 + m_2) v_f \sin\theta \quad (\text{asse}\, y) \end{aligned}$$

con v_f la velocità della nuova particella.

Dividendo la parte relativa all'asse y con quella relativa all'asse x si ha

$$\tan\theta = \frac{m_2 v_{2,i}}{m_1 v_{1,i}}$$

Noto l'angolo θ, da una delle due equazioni precedenti si può ottenere v_f.
Ad esempio, usando quella dell'asse y

$$v_f = \frac{m_2 v_{2,i}}{(m_1 + m_2)\sin\theta}$$

L'energia cinetica iniziale è

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{1,i} + \mathcal{T}_{2,i}$$

Quella finale è

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

da cui si ottiene $\Delta\mathcal{T}$.

Urto frontale

Si definisce frontale l'urto in cui i due corpi che collidono si muovono sulla stessa retta. Possiamo interpretarlo come una collisione con angolo di diffusione di π. In questo caso, la conservazione della quantità di moto può essere espressa come

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \Longrightarrow m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2(v_{2,f} - v_{2,i}) \quad (3)$$

e la conservazione dell'energia cinetica come

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \Longrightarrow m_1(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2) = m_2(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2)$$

Dividendo membro a membro l'ultima equazione con la prima ottengo

$$\frac{m_1(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2)}{m_1(v_{1,i} - v_{1,f})} = \frac{m_2(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2)}{m_2(v_{2,f} - v_{2,i})}$$

$$\frac{(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f})}{(v_{1,i} - v_{1,f})} = \frac{(v_{2,f} - v_{2,i})(v_{2,i} + v_{2,f})}{(v_{2,f} - v_{2,i})}$$

quindi

$$v_{1,i} + v_{1,f} = v_{2,i} + v_{2,f} \Longrightarrow v_{1,i} - v_{2,i} = v_{2,f} - v_{1,f} \Longrightarrow v_{2,f} = v_{1,i} + v_{1,f} - v_{2,i}$$

Inserendo questo nell'equazione (3) e risolvendo per $v_{1,f}$ si ha

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{4}$$

Analogamente, considerando

$$v_{1,f} = v_{2,f} + v_{2,i} - v_{1,i}$$

e inserendola in Eq. (3) per esprimere $v_{2,f}$ otteniamo

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{5}$$

Se $m_1 = m_2$ si ha che

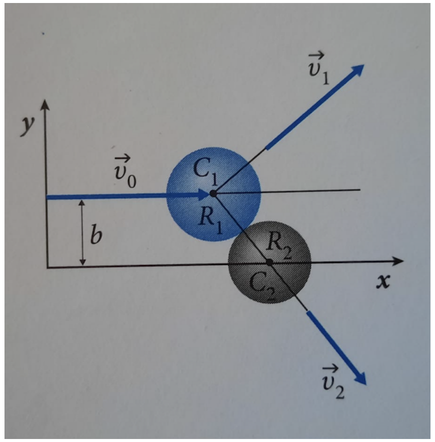
$$v_{1,f} = v_{2,i} \text{ e } v_{2,f} = v_{1,i}$$

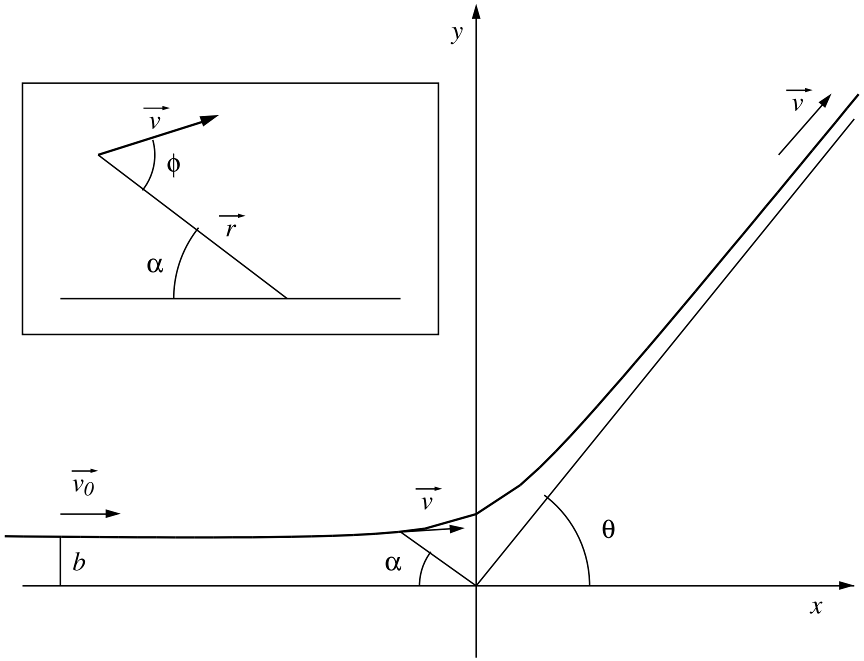
le due particelle si scambiano le velocità.

In Laboratorio $v_{2,i} = 0$ quindi

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \text{ e } v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}$$

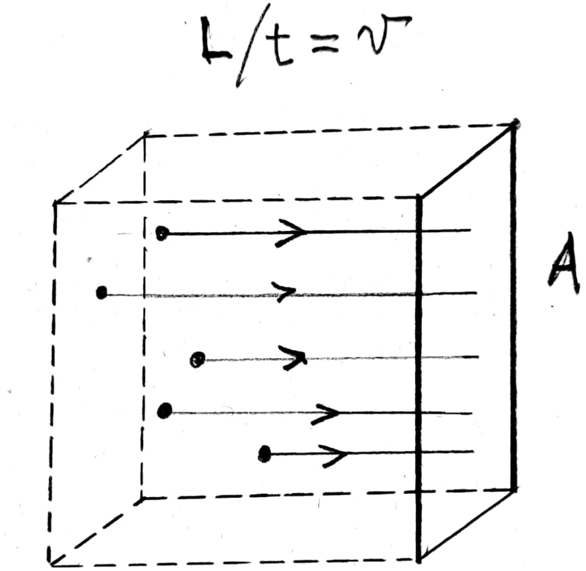
Parametro d’impatto





Per una collisione tra sfere rigide il parametro d’impatto è dato dalla somma dei raggi delle due sfere in collisione.

Sezione d'urto



Particelle di velocità $\vec{v}$ e densità $n_a = N_a/\mathcal{V}$ dove N_a è il numero di particelle e $\mathcal{V}$ è il volume dello spazio in cui si trovano.
Definisco il **flusso** come il numero di particelle che attraversano l'unità di superficie ortogonale a $\vec{v}$ nell'unità di tempo.

Il volume occupato nell'unità di tempo è $\mathcal{V}/t = \mathcal{A}L/t = \mathcal{A}v$, quindi il numero di particelle è dato da $n_a\mathcal{V}$ che deve essere diviso per la superficie $\mathcal{A}$ per avere il numero di particelle che attraversano l'unità di superficie

$$\Phi_a = n_a \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}t} = n_a |\vec{v}| = \frac{N_a}{\mathcal{V}} v \qquad\qquad [l^{-2}][t^{-1}]$$

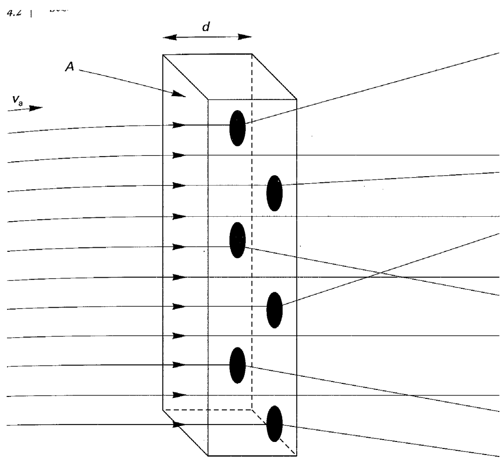
Il numero di particelle rivelate nell'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo è proporzionale al flusso e a Ω.

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \Sigma(\Omega)\Phi_a d\Omega$$

Dimensioni di $\Sigma(\Omega)$ $[superficie]/[sr]$

Ipotesi 1 Lo spessore è tale da evitare diffusione multipla.

Ipotesi 2 Densità n_a piccola da trascurare l'interazione tra particelle incidenti.



Il numero di particelle diffuse è proporzionale al numero di centri diffusori.

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \sigma(\Omega) N_b \Phi_a d\Omega$$

$\sigma(\Omega)$ sezione d'urto differenziale

$$\sigma(\Omega) = \frac{n^o \text{particelle diffuse per unità di tempo nell'angolo } d\Omega}{\text{flusso incidente} \qquad \mathrm{N_b}}$$

dimensioni $\sigma(\Omega)$ $[l^2]$[sr]

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega) d\Omega$$

La sezione d'urto è una quantità indipendente dal numero di particelle bersaglio e dal flusso delle particelle proiettile. È quindi una quantità che riferisce all'urto di una singola particella proiettile con un singolo bersaglio. Dipende dall'energia del proiettile, dall'interazione proiettile-bersaglio e dalle caratteristiche strutturali del proiettile e del bersaglio. Per questo motivo è usata per studiare la struttura di queste particelle e la loro interazione.