Parte 3

Fluidi

Stati della materia

Solido - Le molecole che compongono il sistema rimangono in posizioni relative fisse. L'agitazione termica fa muovere ogni molecola attorno alla sua posizione d'equilibrio, ma questi spostamenti sono molto piccoli rispetto alle distanze tra una molecola e l'altra. Macroscopicamente, si osserva che un solido possiede forma e volume propri.
Liquido - Le dimensioni dei moti di agitazione termica sono confrontabili con le distanze tra le molecole che compongono il sistema. Le interazioni tra le molecole sono sufficientemente forti da mantenere mediamente costanti queste distanze. Macroscopicamente, i liquidi non hanno forma propria, ma assumono quella imposta dal recipiente che li contiene, ma il volume rimane costante.
Gas - In questo caso agitazione termica domina sull'interazione molecolare. L'energia cinetica di ogni molecola è molto più grande dell'energia di interazione con le altre molecole. Ogni molecola si muove liberamente senza legami con le altre. Macroscopicamente il gas non ha forma e volume propri, ma acquisisce quelli imposti dal contenitore.

Liquidi e gas sono definiti fluidi

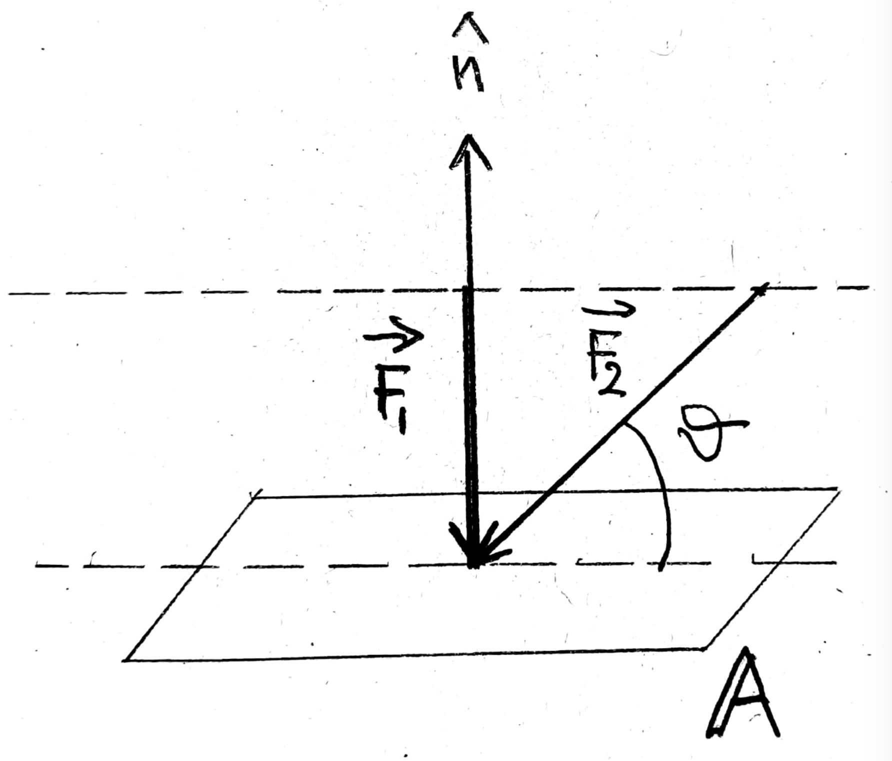
Alcune caratteristiche dei sistemi macroscopici

Densità (di materia) - Definita come il rapporto tra massa del sistema e il volume che la contiene. Poiché la densità può cambiare da punto a punto, definiamo una densità puntuale come una funzione di $\vec{r}$. Se $\Delta\mathcal{V}(\vec{r})$ è il volume infinitesimo che contiene la quantità di materia $\Delta m(\vec{r})$ definiamo la densità in funzione di $\vec{r}$ come

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\mathcal{V}\to 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta\mathcal{V}(\vec{r})} \quad .$$

In un sistema omogeneo $\rho(\vec{r}) = \text{const.}$

La densità dipende da parametri ambientali come la temperatura e la pressione.



Pressione - Consideriamo una superficie $\mathcal{A}$. Definiamo *pressione* il rapporto tra la componente normale della forza esercitata sulla superficie e l'area della superficie. Nel caso della figura la pressione dovuta alla forza $\vec{F}_1$ è $\mathcal{P}_1 = |\vec{F}_1|/\mathcal{A}$, e quella esercitata dalla forza $\vec{F}_2$ è $\mathcal{P}_2 = |\vec{F}_2 \sin\theta|/\mathcal{A}$. Poiché ho costruito la figura in modo che sia $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2 \sin\theta|$ ho che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Le componenti della forza ortogonali a $\hat{n}$ non contribuiscono alla pressione.

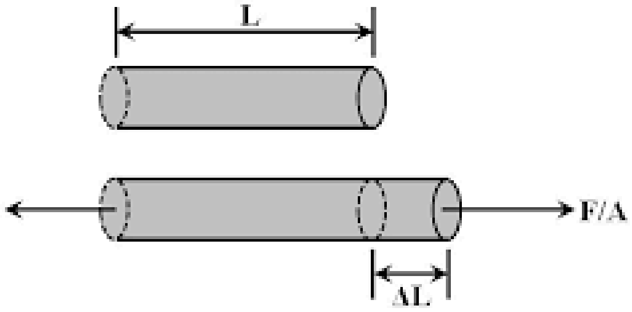
Facendo considerazioni analoghe a quelle fatte per la densità, possiamo definire una pressione per ogni punto del sistema come

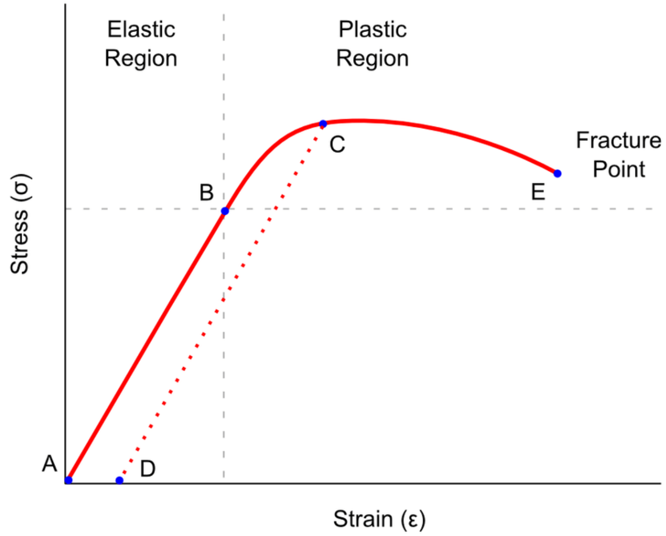
$$\mathcal{P}(\vec{r}) = \lim_{\mathcal{A}\to 0} \frac{F_n(\vec{r})}{\mathcal{A}(\vec{r})} \ ,$$

dove ho indicato con F_n la componente della forza nella direzione della normale alla superficie.

La pressione è una quantità scalare

Forze esterne che agiscono sul sistema





La figura a sinistra mostra una barra sottoposta all'azione di due forze poste alle estremità aventi stesso modulo, stessa direzione e verso opposto. Questo provoca una tensione sulla barra.

Se modifichiamo il modulo delle forze per un valore ΔF la lunghezza della barra si modifica di ΔL. Definiamo la sollecitazione $(stress)$ come $\Delta F/\mathcal{A}$, dove $\mathcal{A}$ è l'area della sezione della sbarra. La deformazione $(strain)$ è definita come $\Delta L/L$.

La figura a destra mostra la relazione tra sollecitazione e deformazione . C'è un prima zona in cui le relazione tra queste due quantità è lineare. Il punto B è il limite elastico, sollecitazioni più intense provocano una modifica permanente del sistema. Il punto E è il punto di frattura.

È utile definire una quantità detta modulo di Young come:

$$\mathbb{Y} = \frac{stress}{strain} \equiv \frac{F/\mathcal{A}}{\Delta L/L}$$

Le dimensioni sono quelle di una forza per unità di superficie, come quelle della pressione. Le unità di misura nel SI sono N m$^{-2} \equiv$ Pa (Pascal).

Un corpo immerso in un fluido è soggetto alla pressione che il fluido esercita sulla sua superficie $\mathcal{A}$. Questa pressione agisce su tutte le parti del corpo e ne modifica il volume di una quantità $\Delta\mathcal{V}$. Si definisce il modulo di compressione come

$$\mathcal{B} = -\frac{\Delta F_n/\mathcal{A}}{\Delta\mathcal{V}/\mathcal{V}} = -\frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta\mathcal{V}/\mathcal{V}}$$

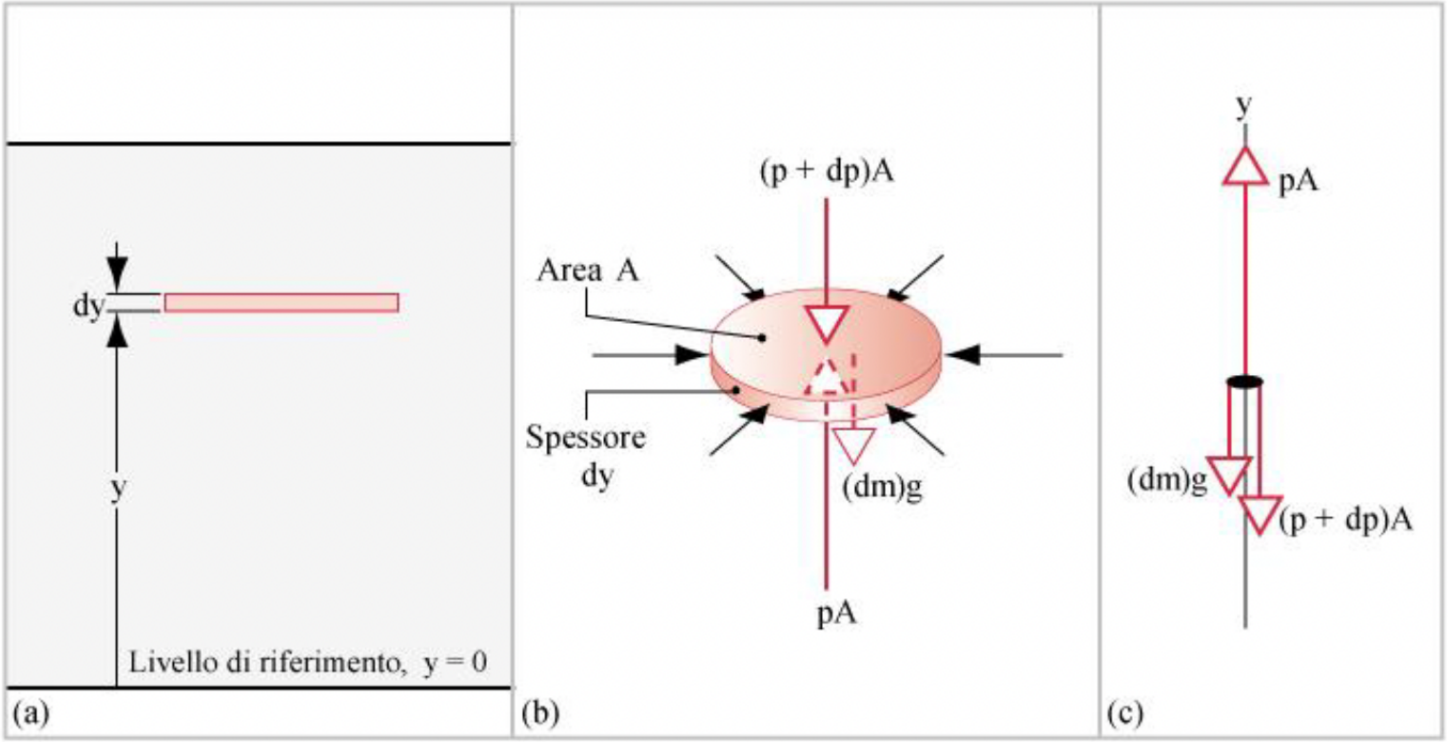
dove F_n è la componente della forza normale alla superficie $\mathcal{A}$. Il segno negativo è dovuto al fatto che un aumento della pressione produce una diminuzione del volume. La compressibilità k è definita come l'inverso del modulo di compressione $k = 1/\mathcal{B}$.

Tabella di alcuni valori di $\mathbb{Y}$ e $\mathcal{B}$ in G N m$^{-2} \equiv 10^9$ N m^{-2}

Materiale	$\mathbb{Y}$	$\mathcal{B}$
Acciaio	200	160
Acqua		200
Alluminio	70	70
Ferro	190	100
Mercurio		27
Ottone	90	61
Piombo	16	7.7
Rame	110	140
Tungsteno	360	200

Questi valori sono misurati a temperatura ambiente (20° C) e alla pressione atmosferica.

Idrostatica



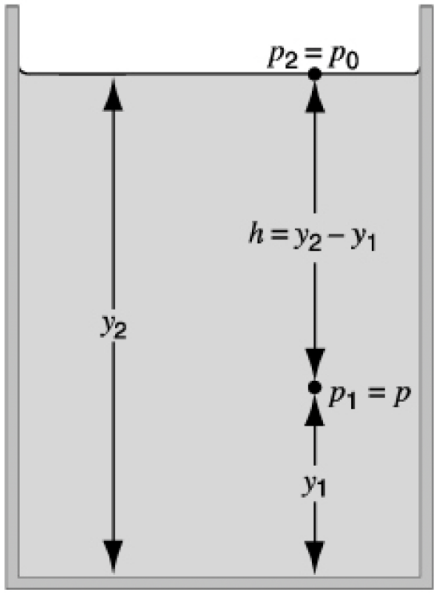
Studiamo un fluido in una situazione di equilibrio **statico** in un campo gravitazionale. Consideriamo un volume infinitesimo posizionato ad un'altezza y rispetto ad un livello di riferimento. Lo spessore di questo volume è dy. L'equilibrio statico implica che la somma di tutte le forze che agiscono su questo volume di fluido sia nulla. Questo, ovviamente, vale sia per le componenti lungo l'asse y (verticali) che quelle lungo gli assi ortogonali a y (orizzontali).

Le forze relative alla componente y sono

$$\mathcal{P}\mathcal{A} - (\mathcal{P} + d\mathcal{P})\mathcal{A} - dm\, g = 0 \; ,$$

dove $\mathcal{P}\mathcal{A}$ è la forza esercitata dal liquido sottostante il volume preso in considerazione, $(\mathcal{P}+d\mathcal{P})\mathcal{A}$ è la forza esercitata dal liquido sopra il volume e $dm\, g$ la forza peso. Per un liquido omogeneo si ha $\rho =$ const e $dm = \rho\mathcal{A}dy$ e quindi otteniamo

$$-d\mathcal{P}\mathcal{A} - \rho\mathcal{A}dyg = 0 \Longrightarrow d\mathcal{P} = -\rho g dy$$



Integrando

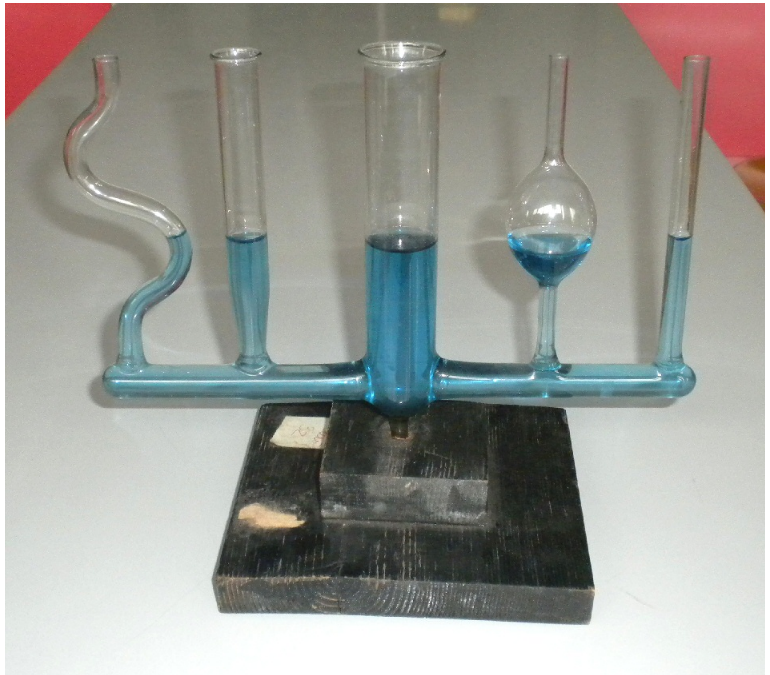
$$\int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} d\mathcal{P} = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \Longrightarrow \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

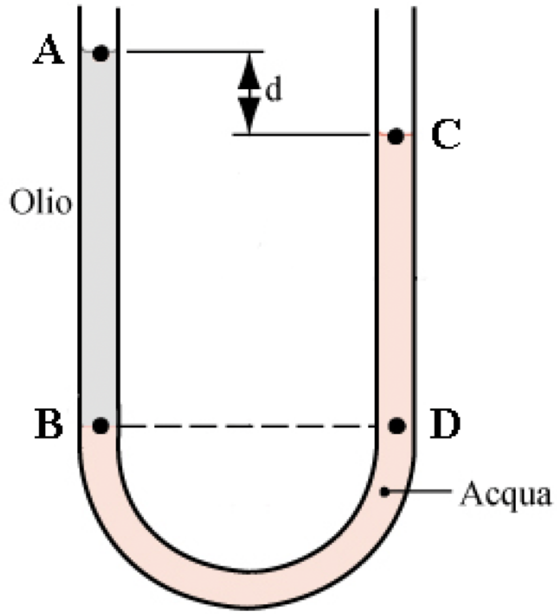
dove abbiamo considerato ρ e g costanti. Se scegliamo $\mathcal{P}_2$ alla superficie del liquido, $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_0$, e $h = y_2 - y_1$ abbiamo

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 + \rho g h$$

che è l'espressione nota come legge di Stevino.

La scelta dell'asse y lungo la direzione della forza di gravità, il verso è opposto, implica che, nel sistema di riferimento in cui il liquido è in quiete non ci sono componenti di forze esterne al sistema che operano sul piano x, z. Il valore della pressione in ogni punto di una superficie ortogonale all'asse y è sempre lo stesso. Le superfici ortogonali a y sono *isobariche*. *In un sistema di vasi comunicanti che contengono uno stesso liquido le superfici libere sono tutte allo stesso livello.*





Consideriamo un tubo a U, come nella figura, con le estremità aperte e contenente due liquidi che non si mescolano e hanno diversa densità. Il sistema è stazionario, questo significa che in ogni sezione del tubo, la pressione esercitata dal liquido che si trova sopra la sezione è esattamente compensata da quella che si trova sotto. I punti B e D sono alla stessa altezza e collegati dal tubo. Questo significa che le pressioni sotto le sezioni di tubo indicate da B e D sono le stesse. Ovviamente anche quelle prodotte dalle colonne di liquido sopra le due sezioni sono identiche $\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_D$.

Per la legge di Stevino abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_B &= \mathcal{P}_A + \rho_1 g(y_A - y_B) \equiv \mathcal{P}_A + \rho_1 g\, h_{A,B} \\ \mathcal{P}_D &= \mathcal{P}_C + \rho_2 g(y_C - y_D) \equiv \mathcal{P}_C + \rho_2 g\, h_{C,D}\end{aligned}$$

Chiamiamo $\mathcal{P}_0$ la pressione esercitata dalla colonna d'aria nel punto A. Abbiamo $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_0 + \rho_{\text{aria}} g d$

Quindi

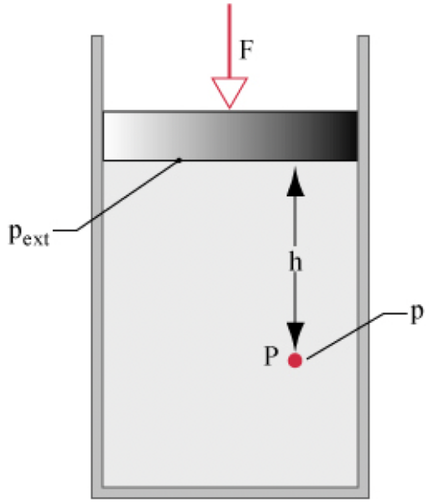
$$\mathcal{P}_0 + \rho_1\, g\, h_{A,B} = \mathcal{P}_0 + \rho_{\text{aria}}\, g\, d + \rho_2\, g\, h_{C,D}$$

Il termine $\rho_{\text{aria}}\, g\, d$ è molto più piccolo di $\mathcal{P}_0$ e può essere trascurato, quindi, semplificando l'equazione, abbiamo la relazione

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_{C,D}}{h_{A,B}} \Longleftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} h_{A,B} = h_{C,D}$$

Siccome $\rho_2 > \rho_1$, segue che $h_{A,B} > h_{C,D}$ ossia: *la superficie libera del liquido meno denso è posta ad un livello più alto rispetto a quella del liquido più denso.*

Principio di Pascal



Consideriamo un fluido incomprimibile contenuto in un recipiente sigillato da un pistone. Applicando al pistone una forza esterna si aumenta la pressione sul fluido. Usando la legge di Stevino, possiamo esprimere la pressione nel punto P come

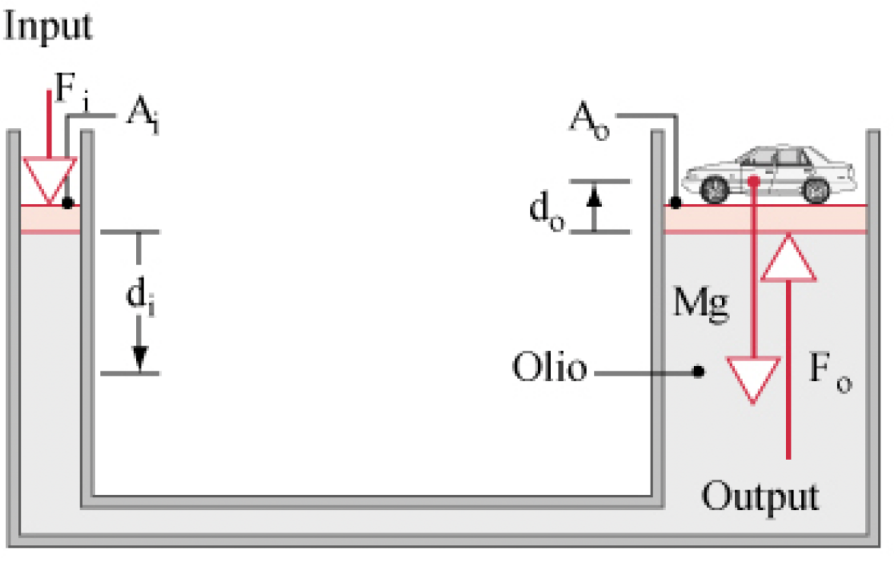
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \rho\, g\, h$$

Una variazione della pressione sul pistone produce una variazione della pressione nel punto P del tipo

$$\Delta\mathcal{P} = \Delta\mathcal{P}_{\text{ext}} + \underbrace{\Delta(\rho\, g\, h)}_{0} = \Delta\mathcal{P}_{\text{ext}}$$

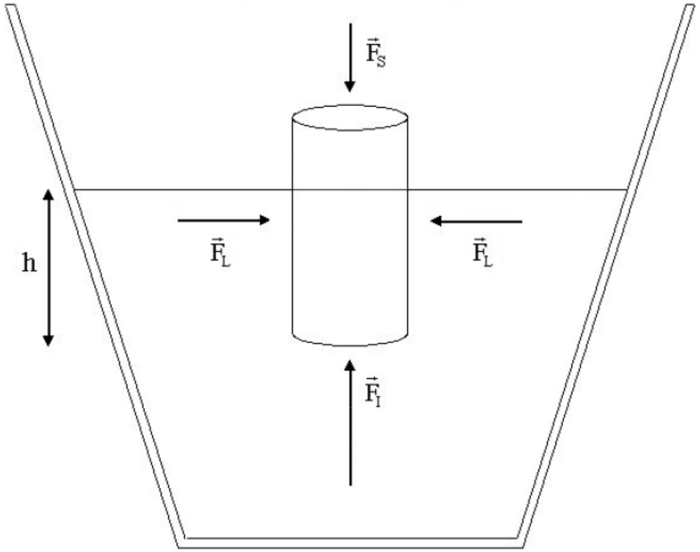
Il termine è nullo perché stiamo considerando un fluido omogeneo $\rho =$ const e **incomprimibile**, quindi $\Delta h = 0$.
La variazione di pressione all'interno del fluido è uguale alla variazione della pressione applicata esternamente.

Poichè il punto P è del tutto arbitrario l'espressione precedente è del tutto generale ed esprime il **Principio di Pascal**:
La pressione applicata ad un fluido racchiuso in un recipiente si trasmette invariata ad ogni parte del fluido ed alle pareti del recipiente.



Sul principio di Pascal si basa la leva idraulica.
I fluidi reali non sono totalmente incomprimibili e bisogna anche considerare le dispersioni dovute a piccole forze di attrito (piccole se confrontate con quelle in gioco nella leva idraulica).

Principio di Archimede



Consideriamo un corpo di forma cilindrica, con le basi di area $\mathcal{A}$ poste orizzontalmente, parzialmente immerso in un liquido omogeneo di densità ρ. Poiché le superfici orizzontali sono isobariche, le componenti delle pressioni su queste superfici hanno globalmente componente nulla.

Le componenti delle forze sull'asse y sono: sulla faccia superiore

$$F_S = -\mathcal{P}_0 \mathcal{A},$$

dove $\mathcal{P}_0$ è la pressione atmosferica, e sulla faccia inferiore, per la legge di Stevino

$$F_I = \mathcal{P}_I \mathcal{A} = (\mathcal{P}_0 + \rho\, g\, h)\mathcal{A}.$$

La forza totale è data da

$$F_S + F_I = \rho\, g\, h\, \mathcal{A} = \rho\, g\, \mathcal{V} = mg$$

Il risultato è indipendente dalla forma del corpo immerso.

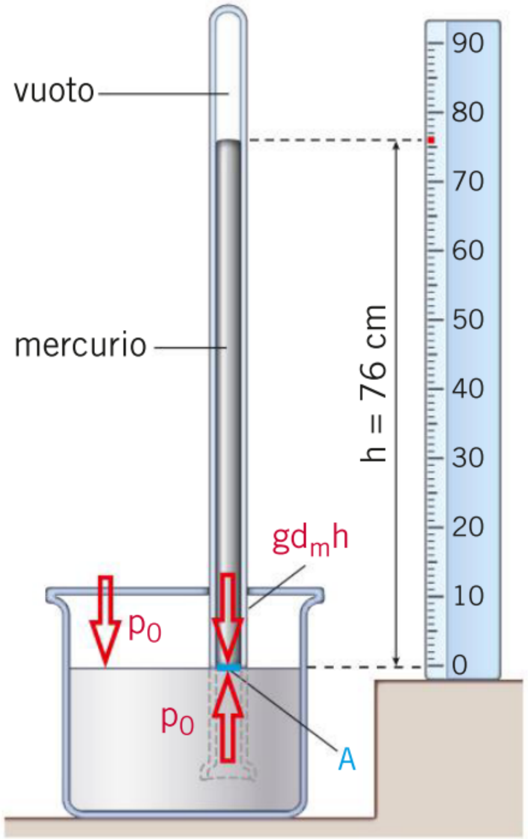
Principio di Archimede

Qualsiasi corpo totalmente o parzialmente immerso in un fluido è spinto verso l'alto da una forza di modulo pari al peso del fluido spostato dal corpo.

La spinta di Archimede è applicata nel cosiddetto **centro di spinta**, definito come il baricentro del fluido spostato dalla parte sommersa di un oggetto galleggiante.

Centro di spinta e baricentro di un corpo coincidono solo nel caso di un corpo omogeneo interamente sommerso.

Pressione atmosferica



Considerando il fluido come la colonna d'aria che forma l'atmosfera è possibile misurare la pressione di questa colonna d'aria con un'esperienza analoga a quella fatta da Evangelista Torricelli nella prima metà del 1600.

Una colonna di mercurio è posta in una vasca contenente mercurio ed esposta alla pressione atmosferica $\mathcal{P}_0$. Per la legge di Stevino e il principio di Pascal la situazione si stabilizza quando

$$\rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, h = \mathcal{P}_0 \quad ,$$

dove ρ_{Hg} è la densità del mercurio (indicata con d_m nella figura). Sperimentalmente si ha $h = 76$ cm a livello del mare e alla temperatura di 20° C. Inserendo i valori misurati di ρ_{Hg}, g e h si ottiene

$$\mathcal{P}_0 = \left(13.596 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0.760\mathrm{m}) = 1.013 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Unità di misura della pressione

simbolo	nel SI (Pa)	note
$N / m^2 \equiv Pa$	1	SI
atm	$1.012 \cdot 10^5$	atmosfera
bar	$1.0 \cdot 10^5$	
torr $\equiv$ mm Hg	$1.33 \cdot 10^2$	760 torr $=$ 1 atm
psi	$6.893 \cdot 10^3$	pound per square inch

La legge di Stevino è stata ottenuta supponendo che nell'intervallo di variazione dell'altezza h la densità sia costante. Questa approssimazione non è più valida per l'atmosfera se si considerano altezze dell'ordine dei km. La forma differenziale della legge si Stevino è

$$d\mathcal{P}(y) = -\rho(y) g dy$$

dove la densità dipende dall'altezza y. Possiamo trovare un'espressione che lega pressione e densità usando la legge dei gas perfetti $\mathcal{P}\mathcal{V} = nRT$, e inserendo $\rho = m/\mathcal{V}$ abbiamo

$$\frac{\mathcal{P}(y)}{\rho(y)} = \frac{n}{m} RT(y) \ .$$

Se consideriamo piccole differenze di altezza y in modo tale che la temperatura sia essenzialmente costante, il rapporto tra pressione e densità rimane costante ad ogni altezza. Se $\mathcal{P}_0$ e ρ_0 sono i valori a livello del mare abbiamo che

$$\frac{\mathcal{P}(y)}{\rho(y)} = \frac{\mathcal{P}_0}{\rho_0} \Longrightarrow \rho(y) = \rho_0 \frac{\mathcal{P}(y)}{\mathcal{P}_0}$$

Questo significa che una piccola variazione della pressione dovuta al piccolo cambio d'altezza può essere espressa come

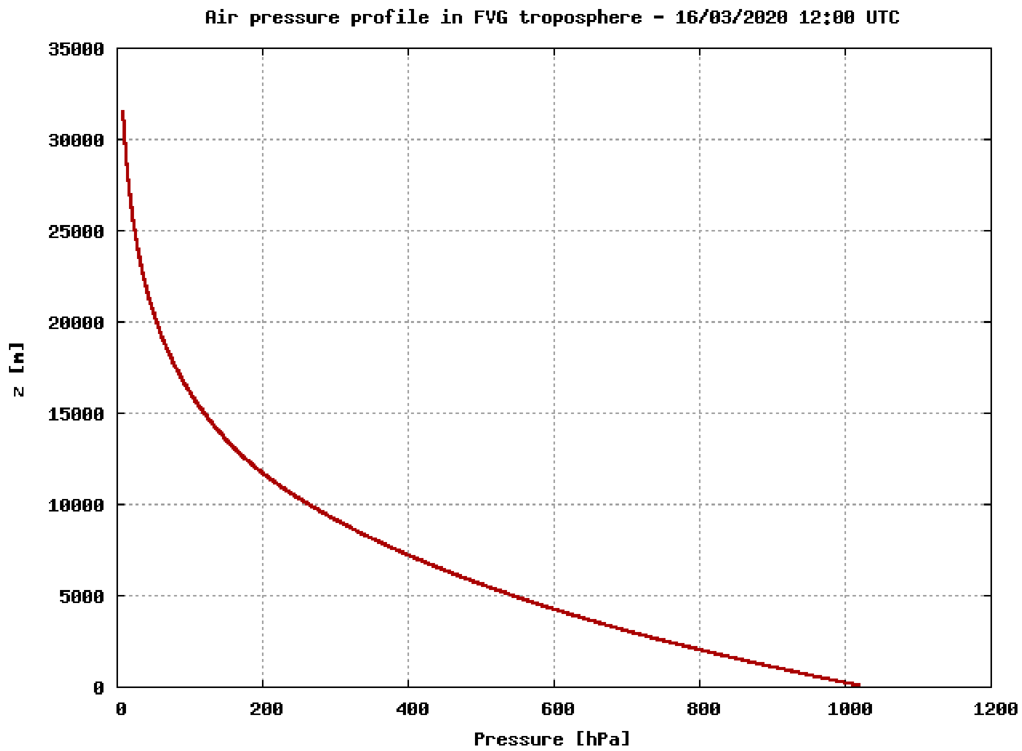
$$d\mathcal{P} = -\rho(y)\, g\, dy = -\rho_0\, g\, \frac{\mathcal{P}(y)}{\mathcal{P}_0} dy \quad .$$

Questa equazione differenziale è risolvibile separando le variabili

$$\frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = -\frac{\rho_0\, g}{\mathcal{P}_0} dy \longrightarrow \int \frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = -\frac{\rho_0\, g}{\mathcal{P}_0} \int dy$$

$$\ln \mathcal{P} = -\frac{\rho_0\, g}{\mathcal{P}_0}\, y + \mathrm{const} \longrightarrow \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{\rho_0\, g}{\mathcal{P}_0}\, y}$$

dove la costante è stata definita imponendo che $\mathcal{P}(y = 0) = \mathcal{P}_0$.



Misure di pressione, eseguite in verticale per mezzo di un pallone sonda lanciato dalle zone centrali della pianura friulana. Il lancio è avvenuto il 16 marzo 2020, alle ore 12:00 Universal Time Coordinates (UTC, in Italia UTC+1 durante l'ora solare, UTC+2 durante l'ora legale). La risoluzione spaziale delle misure è di 10 m, mentre la precisione delle misure corrisponde a 0.1 hPa (100 Pa).

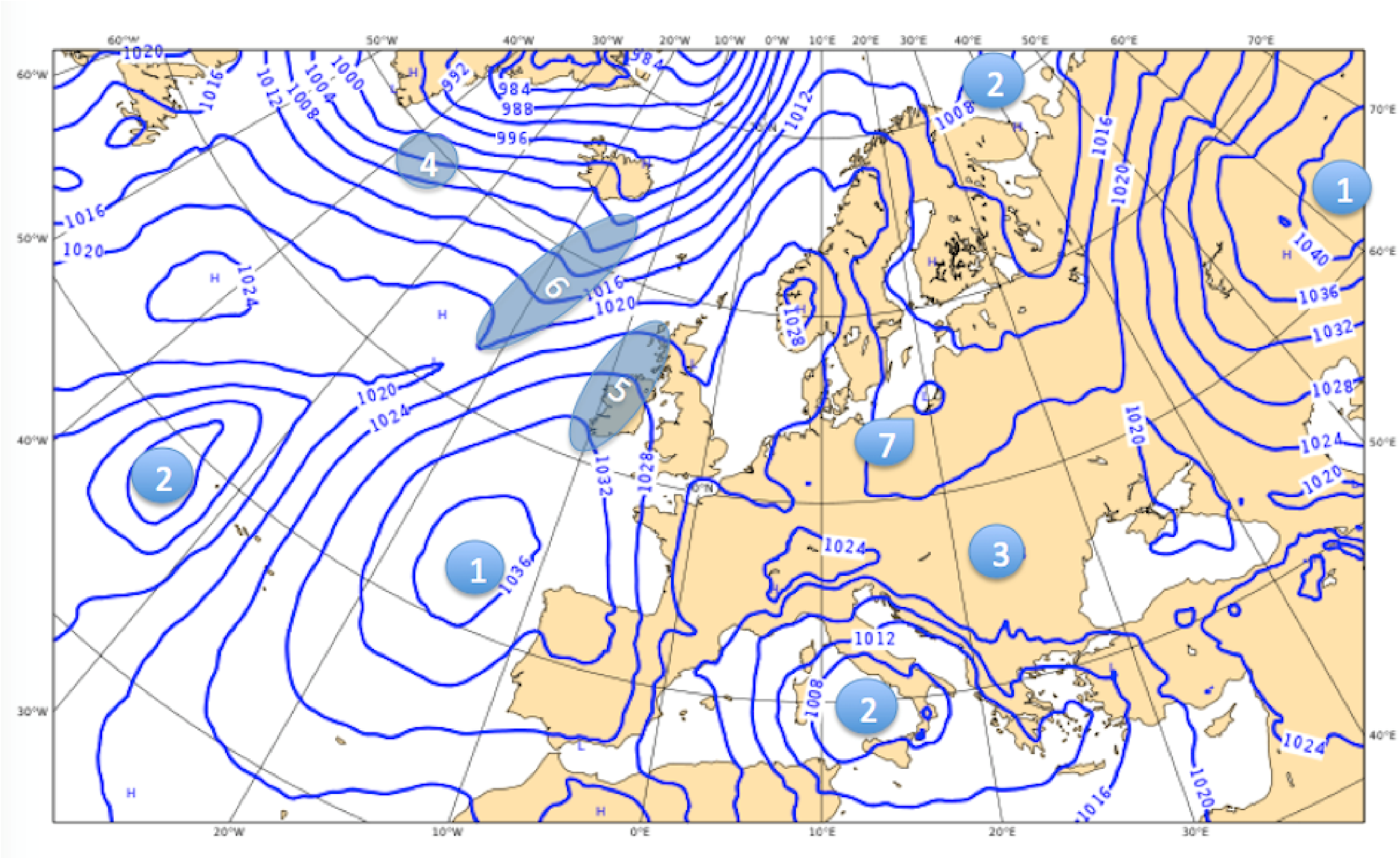
Idrodinamica

Approccio lagrangiano
L'idea è quella di generalizzare la meccanica della singola particella ad un sistema composto da tante particelle. Il fluido è decomposto in piccole parti (definite *particelle*) ed è descritto seguendo il moto di ogni singola parte, eventualmente in interazione con le altre.

Approccio euleriano
Si suddivide lo spazio occupato dal fluido in un reticolo. In ogni punto di questo reticolo si analizza l'evoluzione temporale delle quantità che caratterizzano il fluido, come densità, velocità, pressione.

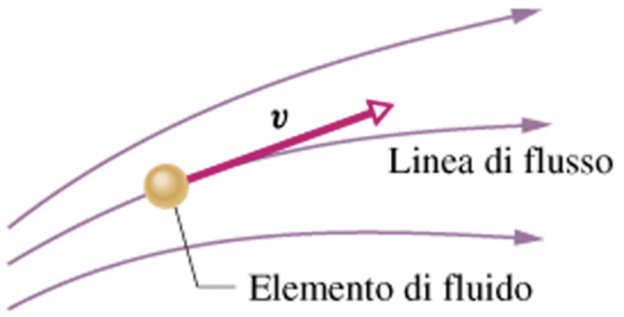
Quest'ultimo è l'approccio che utilizzeremo

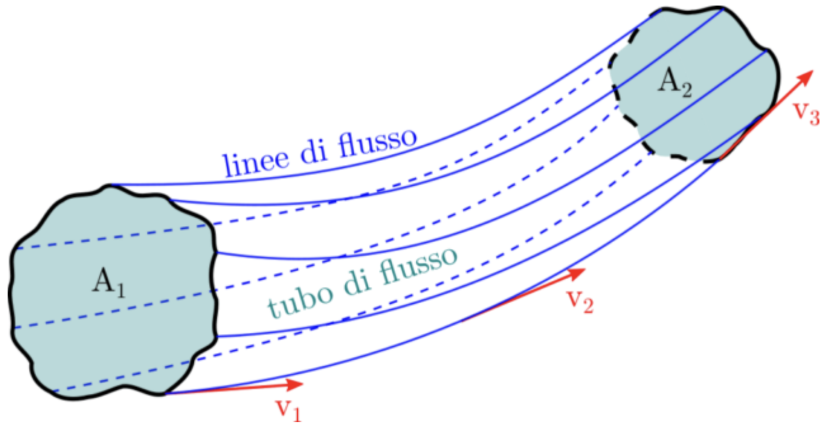
Per le quantità scalari si fa una mappa dei valori ad un tempo fissato.



I numeri esprimono il valore della pressione in millibar.
Le linee isobariche non si incrociano mai perchè questo vorrebbe dire che nel punto di incontro ci sarebbero due valori differenti di pressione.

Per quantità vettoriali, come la velocità, si usa una rappresentazione grafica basata su **linee di flusso** che poi formeranno **tubi di flusso**.





La linea di flusso può essere costruita nel modo seguente. Consideriamo la velocità $\vec{v}(\vec{r})$ del fluido nel punto $\vec{r}$. Proseguiamo nella direzione di $\vec{v}(\vec{r})$ spostandoci da $\vec{r}$ a $\vec{r}+d\vec{r}$ ed identifichiamo $\vec{v}(\vec{r}+d\vec{r})$ allo stesso tempo t. Procedendo in questo modo, ed unendo tutti i punti, si forma la **linea di flusso** alla quale, in ogni punto, le velocità sono tangenti. In un regime non turbolento, le linee di flusso non possono incrociarsi perchè nel punto di contatto il flusso avrebbe due velocità differenti. Un insieme di linee forma un **tubo di flusso**. Dato che le linee di flusso non si possono intersecare, la superficie laterale di un tubo di flusso, che è costituita da linee di flusso, si comporta come una tubatura reale. *La quantità di fluido che entra da una estremità di un tubo di flusso deve uscire dall'altra estremità*. La linea di flusso prende in considerazione la direzione della velocità. Per indicare il valore del modulo si usa la convenzione che l'addensamento delle linee indica un incremento del modulo.

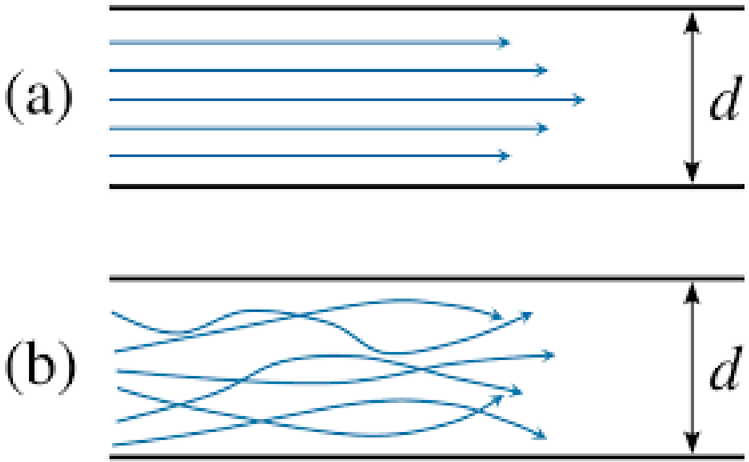
Alcune proprietà dei fluidi

Fluido incomprimibile - Quando il suo volume totale non varia sotto l'azione di forze esterne.

Fluido omogeneo - Quando il valore della densità è sempre lo stesso in ogni punto del volume occupato dal fluido. Nel caso in cui il valore della densità non variasse nel tempo, il sistema non solo è omogeneo, ma anche incomprimibile.

Fuido viscoso - Quando il moto di un qualsiasi elemento del fluido è ostacolato dalla presenze degli altri elementi, e/o, anche, dal contatto con le pareti del contenitore.

Flusso stazionario - Quando in un fluido in moto le proprietà che lo caratterizzano, densità, pressione, velocità, anche se differenti in ogni punto del volume occupato, non variano nel tempo. In questo caso, le linee di flusso non cambiano nel tempo.



Flusso laminare - Le linee di flusso si modificano nel tempo, ma ancora non si intersecano.
Flusso turbolento - Nel fluido si generano vortici, le linee di flusso si intersecano e alcune si richiudono su se stesse.

Il passaggio dal regime laminare a quello turbolento avviene per un valore critico della velocità relativa rispetto ai vincoli (le pareti di una tubatura, una barca sulla superficie del fluido, un pesce, un aereoplano ...).

Consideriamo d'ora in poi un fluido ideale, cioè incomprimibile, omogeneo e non viscoso.

Equazione di continuità (della massa)

Consideriamo un tubo di flusso del liquido in movimento. Le linee di flusso che definiscono la superficie del tubo sono, per definizione, impermeabili. Nessun parte del liquido può uscire da questa superficie perché tutte le velocità sono tangenziali alle linee di flusso, quindi non ci sono componenti ortogonali. Consideriamo una superficie $\mathcal{A}_1$ ovunque ortogonale alle linee di flusso (*sezione normale del tubo*). Nel tempo infinitesimo dt la massa di fluido che attraversa questa superficie è

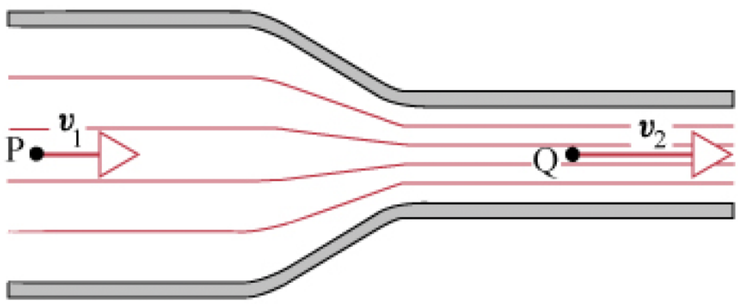
$$dm = \rho d\mathcal{V} = \rho \mathcal{A}_1 v_1 dt$$

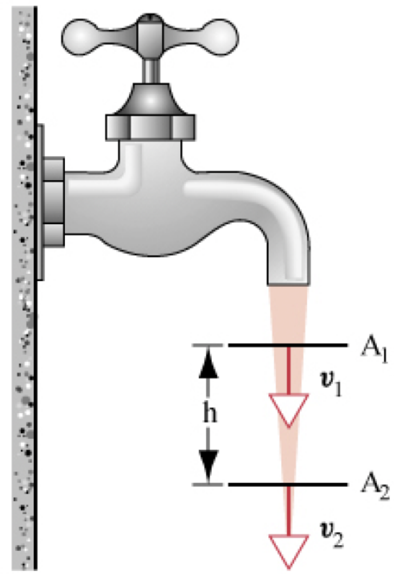
dove v_1 è il modulo della velocità ortogonale a $\mathcal{A}_1$ Per costruzione il volume contenente il fluido nel tempo dt è $\mathcal{V} = \mathcal{A}_1 v dt$. Il fluido è incomprimibile e le superfici laterali impermeabili, quindi la quantità di fluido che passa nel tempo dt attraversa la sezione normale $\mathcal{A}_1$ è identica a quella che passa nello stesso tempo in ogni superficie normale, ad esempio $\mathcal{A}_2$,

$$\rho \mathcal{A}_1 v_1 dt = \rho \mathcal{A}_2 v_2 dt \Longrightarrow \mathcal{A}_1 v_1 = \mathcal{A}_2 v_2$$

e generalizzando abbiamo l'*equazione di continuità*

$$\mathcal{A} v = \text{const}$$

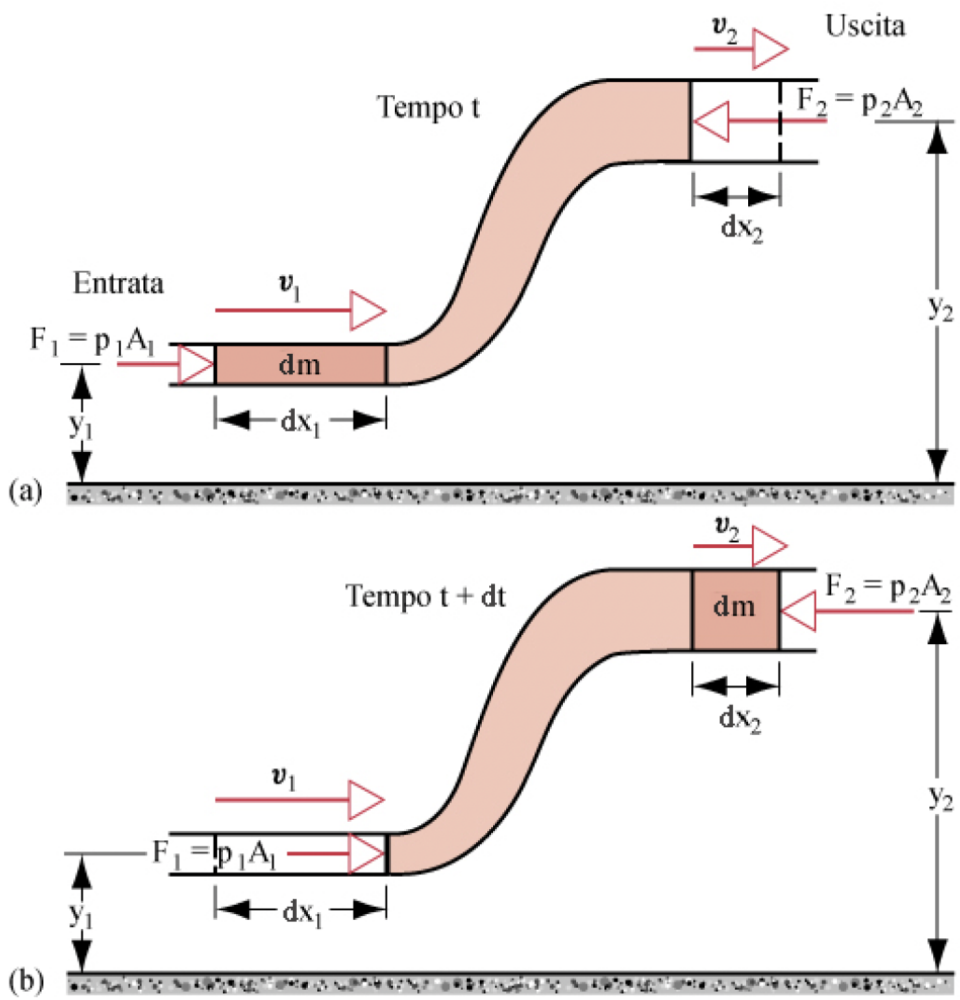




In regime stazionario la velocità di scorrimento in un tubo è inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo stesso.

Per flusso costante di acqua che esce da un rubinetto il getto diventa sempre più sottile perché aumenta la velocità a causa dell'attrazione gravitazionale.

Equazione di Bernoulli



Consideriamo una tubatura del tipo indicato dalla figura e un liquido ideale che la percorre dall'entrata all'uscita. Nella parte d'entrata la pressione atmosferica produce una spinta coerente con la velocità del liquido. Il lavoro svolto nel tempo dt è

$$dW_1 = d\vec{F}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} dt = \mathcal{P}_1 d\mathcal{A}_1 v_1 dt$$

la pressione è esercitata su un'area ortogonale in ogni punto alla velocità del liquido. Nella zona d'uscita il moto del liquido è opposto rispetto al verso della forza esercitata sulla sezione normale del tubo, da cui il segno negativo

$$dW_2 = -d\vec{F}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} dt = -\mathcal{P}_2 d\mathcal{A}_2 v_2 dt$$

Poiché le sezioni d'entrata e d'uscita non sono alla stessa altezza, bisogna considerare il lavoro fatto per portare la massa

$$dm = \rho\, d\mathcal{A}_1\, v_1\, dt = \rho\, d\mathcal{A}_2\, v_2\, dt$$

dall'altezza y_1 all'altezza y_2, cioè

$$dW_g = -dm\, g\, (y_2 - y_1)$$

Il lavoro totale è dato da

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 = \mathcal{P}_1 d\mathcal{A}_1 v_1 dt - \mathcal{P}_2 d\mathcal{A}_2 v_2 dt - dm\, g\,(y_2 - y_1) \ .$$

In assenza di forze dissipative, come noi abbiamo ipotizzato, il lavoro svolto è uguale alla variazione tra l'energia cinetica totale della massa dm che nell'intervallo di tempo dt si muove lungo il tubo. Poichè il moto del fluido è stazionario questa differenza non dipende dall'istante t in cui si inizia la misura, ma soltanto dalle velocità d'entrata e d'uscita

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} dm\, v_2^2 - \frac{1}{2} dm\, v_1^2 \ .$$

Eguagliando il lavoro svolto con la variazione di energia cinetica e considerando la conservazione della massa $dm = \rho\, d\mathcal{A}\, v\, dt$ possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_1 \frac{dm}{\rho} - \mathcal{P}_2 \frac{dm}{\rho} + dm\, g\,(y_1 - y_2) = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$$

e quindi

$$g\, y_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = g\, y_2 + \frac{\mathcal{P}_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 = \mathrm{const}$$

espressione detta *Equazione di Bernoulli*.

Casi particolari.

a) Il fluido non scorre ($v_1 = v_2 = 0$). Situazione statica.

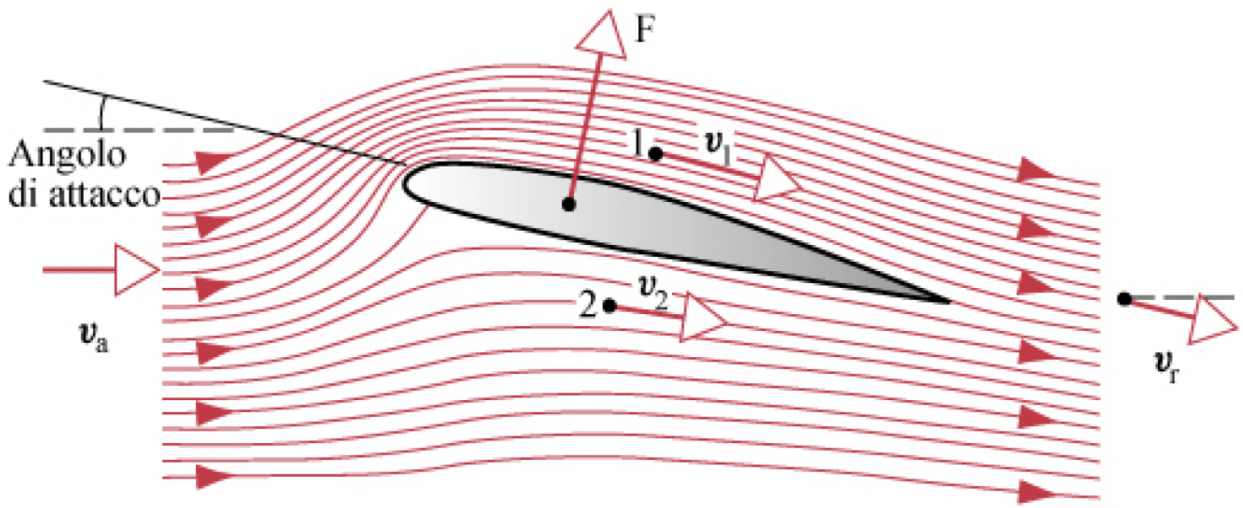
$$g y_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho} = g y_2 + \frac{\mathcal{P}_2}{\rho} \Longrightarrow \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \rho\, g\,(y_2 - y_1)$$

Legge di Stevino

b) Il fluido scorre orizzontalmente

$$\mathcal{P}_1 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = \mathcal{P}_2 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2$$

nei punti in cui la pressione è inferiore la velocità è maggiore.



Una descrizione (grossolana) del funzionamento di un'ala può essere fatta considerando la legge di conservazione della massa e l'equazione di Bernoulli.
Il profilo e la posizione dell'ala rispetto al flusso dell'aria sono fatti per diminuire la sezione normale sopra l'ala e aumentarla sotto. Per la conservazione della massa $\mathcal{A}_1 v_1 = \mathcal{A}_2 v_2$ la velocità sopra l'ala aumenta, e per la legge di Bernoulli questo implica che la pressione $\mathcal{P}_1$ diminuisca. Avviene il contrario sotto l'ala. La differenza tra le pressioni sopra e sotto l'ala produce una forza normale alla direzione del flusso d'aria, la portanza

$$|\vec{F}| = \mathcal{A}(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v_2^2 - v_1^2)$$

dove $\mathcal{A}$ è l'area dell'ala. Questa è la forza che sostiene l'ala contrastando la forza peso.