Dipartimento di Matematica e Fisica
"Ennio De Giorgi"

INFN

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
SEZIONE DI LECCE

Jazz Math

Alcuni concetti di Matematica utili per affrontare i corsi di Fisica Generale

Giampaolo Co'

Dipartimento di Matematica e Fisica, "Ennio De Giorgi"
Università del Salento
e
INFN, Sezione di Lecce

Premessa

Queste note raccolgono alcuni concetti di Matematica che sono utilizzati nei corsi universitari di Fisica. Il meccanismo accademico normalmente accoppia temporalmente i corsi di matematica che presentano queste idee con quelli di fisica in cui questi concetti sono utilizzati. Ne risulta un ovvio problema, i fisici parlano ad un pubblico che ritengono abbia delle conoscenze di matematica che invece, ancora, non possiedono.

Pensiamo si possa iniziare a studiare fisica utilizzando alcune tecniche matematiche anche prima che queste siano presentate nella loro corretta formalizzazione. Per fare un parallelo con l'educazione musicale, è un po' come affermare che per cominciare a suonare uno strumento è sufficiente conoscere i rudimenti del solfeggio, come succedeva ai pionieri del *jazz* (questa è la chiave di lettura del titolo di queste note). In ogni caso, la teoria musicale è necessaria per formare un vero musicista e non relegarlo al semplice ruolo di strimpellatore. Analogamente, la formazione di un fisico richiede la conoscenza formalizzata dei concetti matematici che utilizza, questo per passare dal livello di praticone a quello dello scienziato, pienamente consapevole di quello che fa.

Lo scopo di queste note non, quindi, è quello di sostituire i corsi di matematica, ma, piuttosto, quello di fornire quelle conoscenze matematiche di base che permettono di avere un immediato approccio ai concetti della fisica, con la prospettiva che ne seguirà la formalizzazione dell'apparato matematico.

L'origine di queste note è piuttosto curiosa. Nell'anno accademico 2024/2025 ho tenuto un corso di scrittura tecnico-scientifica, e ho chiesto agli studenti di fisica che lo hanno frequentato di scrivere dei capitoli sui vari argomenti matematici pensando ai loro colleghi del primo anno. Io ho rimaneggiato quanto hanno scritto in modo da rendere il testo il più possibile omogeneo. In questo lavoro mi considero l'editore scientifico del progetto. I veri autori sono indicati all'inizio di ogni capitolo. Ogni merito va a loro, mentre gli eventuali errori, ed omissioni, sono da attribuire all'editore.

Lecce, settembre 2025
Giampaolo Co'

Indice

Capitolo 1

NUMERI

(con il contributo di Giulia Cortese e Kassandra Martena)

1.1 Numeri reali

Il concetto di numero è una delle nozioni fondamentali della matematica. Può essere definito come un ente astratto atto a indicare la quantità degli elementi di un insieme (**numero cardinale**), il posto di un elemento in una successione (**numero ordinale**), o comunque utilizzato come contrassegno per individuare con precisione un elemento tra molti o una specifica classe di elementi.

I numeri **interi** e **frazionari**, sia quelli positivi che negativi, includendo il numero zero, si chiamano **numeri razionali**. Ogni numero razionale può essere espresso come quoziente di due numeri interi. Ci sono numeri che non possono essere espressi come frazione di numeri interi e questi sono chiamati **numeri irrazionali**. Ad esempio sono numeri irrazionali $\sqrt{2}$ o π. L'insieme di tutti i numeri razionali e irrazionali è detto l'insieme dei **numeri reali**.

L'insieme dei numeri reali è ordinato, significa che dati due numeri reali x, y solo una di queste relazioni è valida

$$x < y \qquad x = y \qquad x > y \ .$$

Si definisce **valore assoluto di un numero reale** x e si denota con $|x|$ il numero reale non negativo che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} |x| &= x \ \text{ se } \ x \geq 0 \\ |x| &= -x \ \text{ se } \ x < 0 \ . \end{aligned}$$

1.2 Numeri complessi

I numeri complessi sono stati introdotti per risolvere equazioni algebriche che non avevano soluzione nell'insieme dei numeri reali.

Prendiamo come esempio un caso semplice: $x^2 + 1 = 0$. Tale equazione non ha soluzioni reali, dal momento che non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato restituisca come valore -1. Per questa ragione si è introdotta la cosiddetta **unità immaginaria** che viene indicata con la lettera i. Per definizione si ha:

$$i^2 = -1$$

1.2.1 Definizione

Si dice **numero complesso** un numero che contiene una **parte reale** e una **parte immaginaria**. Un modo di esprimere un numero complesso in **forma algebrica** è $z = a + ib$, dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria. I numeri reali a e b sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di z, in simboli si scrive: $a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z)$.

Il numero complesso può anche essere espresso come $z = (a, b)$, una coppia ordinata di numeri reali. Questa forma è detta **forma geometrica**.

1.2.2 Il piano complesso

Associando al numero complesso $z = a + ib$ la coppia di coordinate (a, b), è possibile rappresentare il numero complesso nel piano cartesiano, denominato **piano complesso** o **piano di Argand-Gauss**. In questo piano l'asse x rappresenta la parte reale e l'asse y la parte immaginaria (Fig. 1.2.2).

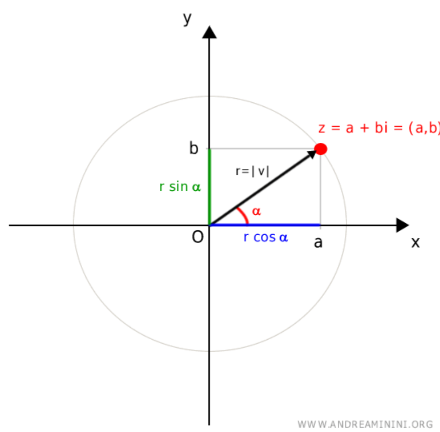


Figura 1.1: Rappresentazione sul piano complesso del numero complesso $z = a + ib$.

La **forma trigonometrica di** z si ottiene usando le relazioni $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\alpha$ dove r è il modulo z

$$r \equiv |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

quindi

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1.1}$$

Una relazione importante è la **formula di Eulero** che collega le funzioni trigonometriche di sin e cos con la funzione esponenziale complessa,

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \ \ ,$$

dove è stato usato il numero irrazionale di Nepero definito come

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828182845904523536\cdots \ \ .$$

con n **fattoriale** di un numero intero positivo n (scritto $n!$) definito come il prodotto di tutti i numeri interi positivi da 1 a n.

Quindi il numero complesso z può essere espresso come

$$z = re^{i\alpha}$$

1.2.3 Operazioni con i numeri complessi

Consideriamo due numeri complessi

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_1 + ib_1 = r_1\left[\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right] \quad ,\\
z_2 &= a_1 + ib_1 = r_2\left[\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Nell'insieme dei numeri complessi sono definite le seguenti operazioni:

1. **somma**:
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad ,$$

2. **prodotto**:
$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = r_1r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \quad ,$$

3. **quoziente**: (per $z_2 \neq 0$):
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} == \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \quad .$$

Queste operazioni permettono di definire il **reciproco** di $z \neq 0$, che è un numero complesso w tale che $z \cdot w = 1$,

Si definisce il **coniugato** di $z = a + ib$ il numero complesso $\bar{z} = a - ib$, le cui proprietà sono:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $z\bar{z} = |z|^2$

Capitolo 2

TRIGONOMETRIA

(con il contributo di Giulia Cortese e Kassandra Martena)

2.1 Angolo

Due rette che si incrociano nel piano lo dividono in quattro settori, ognuno identificato da un angolo (Fig. 2.1).

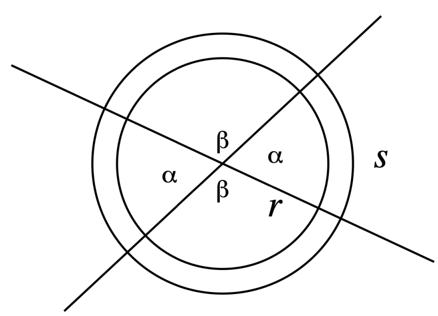


Figura 2.1:

L'ampiezza dell'angolo si ottiene considerando una circonferenza centrata nel punto in cui le rette si incrociano e dividendo la lunghezza dell'arco delimitato dalle due rette, s nell'esempio della figura 2.1, per il raggio della circonferenza

$$\alpha = \frac{\text{lunghezza arco}}{\text{raggio}} = \frac{s}{r} \quad .$$

Evidentemente questo rapporto è indipendente dalle dimensioni della circonferenza e fornisce il valore dell'angolo in **radianti**. I radianti sono numeri reali privi di dimensione.

Nell'uso quotidiano l'ampiezza di un angolo è espressa in **gradi sessagesimali** (°) che si ottengono dividendo l'intera circonferenza in 360 parti uguali e contando quante di queste parti sono sottese dall'angolo considerato.

Per passare da gradi a radianti (o viceversa), si rammenta la seguente proporzione:

$$\alpha_r : 2\pi = \alpha_g : 360^\circ$$

dove con α_r e con α_g si sono indicati rispettivamente l'angolo espresso in *radianti* ed espresso in *gradi*.

2.2 Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche associano ad un numero reale adimensionale un altro numero reale. È immediato considerare l'argomento di una funzione trigonometrica come un angolo espresso in radianti.

Le principali funzioni trigonometriche sono: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** e **cosecante**. In questa sezione però ci occuperemo esclusivamente delle prime tre poichè sono le più utilizzate.

2.2.1 La funzione seno

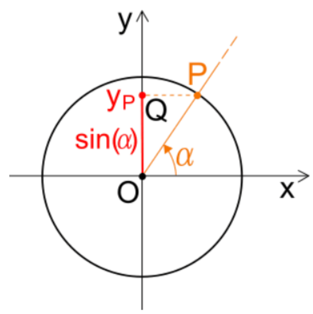


Figura 2.2: $\sin\alpha$ rappresentato nella circonferenza goniometrica.

Per visualizzare la funzione seno è utile considerare una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine degli assi del piano cartesiano. Questa è detta **circonferenza goniometrica**.

Usando la circonferenza della figura 2.2 definiamo **il seno dell'angolo** α come:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = y_P \quad ,$$

e poiché si tratta di una circonferenza goniometrica $\overline{OP} = R = 1$, quindi

$$\sin\alpha = \overline{OQ} = y_P \quad .$$

La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione reale limitata nell'intervallo dei valori compresi tra -1 e 1. Questo significa che è possibile calcolare il seno di qualsiasi numero reale, mentre il valore della funzione, ossia il valore del seno, sarà sempre un numero compreso tra -1 e 1.

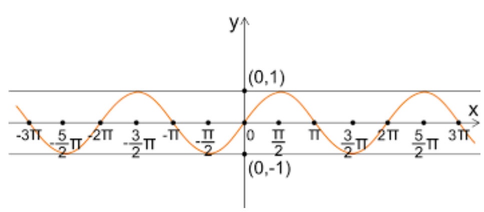


Figura 2.3: Grafico della funzione $y(x) = \sin x$.

Proprietà della funzione seno.

- È una **funzione limitata**, per cui: $-1 \leq \sin x \leq 1$
- È una **funzione dispari**, per cui: $\sin(-x) = -\sin x$

2.2.2 Funzione coseno

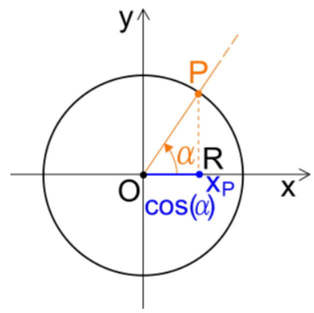


Figura 2.4: $\cos\alpha$ rappresentato nella circonferenza goniometrica.

Analogamente a quanto fatto per la funzione seno, considerando la **circonferenza goniometrica**, vedi Fig. 2.4, definiamo **il coseno dell'angolo** α come:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = x_P \quad ,$$

dove: $\overline{OP} = R = 1$.

Come nel caso del seno, è possibile calcolare il coseno di qualsiasi numero reale ed il suo risultato sarà sempre un numero compreso tra -1 e 1.

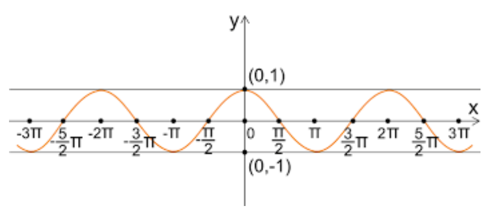


Figura 2.5: il grafico rappresenta la funzione $y(x) = \cos x$.

Proprietà della funzione coseno.

- È una **funzione limitata**, per cui: $-1 \leq \cos x \leq 1$
- È una **funzione pari**, per cui: $\cos(-x) = \cos x$

NOTA: Le funzioni sin e cos sono **periodiche**, cioè assumono gli stessi valori periodicamente. Il periodo di queste funzioni è pari a: 2π, valgono quindi le relazioni:

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x \tag{2.1}$$

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad , \tag{2.2}$$

dove n è un numero intero.

Usando il teorema di Pitagora è possibile dimostrare che, dato un angolo α qualsiasi, tra il suo seno e il suo coseno sussiste la seguente relazione:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.3}$$

2.2.3 Funzione tangente

Si definisce **tangente** dell'angolo α il rapporto tra il suo seno e il suo coseno:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad .$$

La funzione $y(x) = \tan x$ è definita per tutti i numeri reali che può assumere x, fatta eccezione per quelli della forma $\frac{\pi}{2} + n\pi$, n numero intero. In questi punti poichè il coseno è nullo, la funzione tangente ha un asintoto verticale. La funzione tangente può assumere qualsiasi valore reale.

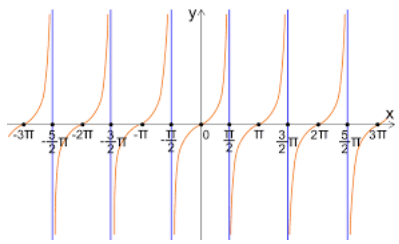


Figura 2.6: Grafico della funzione $y(x) = \tan x$.

Proprietà della funzione tangente.

- Presenta **asintoti verticali** in corrispondenza di:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ,$$

  con n numero intero.

- È una **funzione dispari**, per cui:

$$\tan(-x) = -\tan x \quad .$$

- È una **funzione periodica** di periodo $P = \pi$. Per cui:

$$\tan(\alpha + n\pi) = \tan\alpha \quad ,$$

dove n è un numero intero.

2.3 Funzioni trigonometriche inverse

Per ogni funzione trigonometrica precedentemente elencata, esiste la sua **inversa** che associa ad un numero reale un altro numero reale che può essere interpretato come un angolo espresso in radianti. Anche in questo caso, analizzeremo soltanto le funzioni inverse di seno, coseno e tangente, ovvero le funzioni **arcoseno**, **arcocoseno** e **arcotangente**.

2.3.1 Funzione arcoseno

Dato un numero reale compreso tra -1 e 1, la funzione **arcoseno** restituisce l'angolo $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (espresso in radianti) il cui seno è proprio quel valore.

2.3.2 La funzione arcocoseno

Analogalamente a quanto fatto per la funzione sin si definisce **arcocoseno** in modo che, dato un numero reale compreso tra -1 e 1, la funzione arcocoseno restituisce l'angolo $0 \leq \alpha \leq \pi$ (espresso in radianti) il cui coseno è proprio quel valore.

2.3.3 La funzione arcotangente

Dato un valore di x compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ l'**arcotangente** restituisce un numero reale corrispondente al quale la tangente vale x. La funzione arcotangente ha due asintoti orizzontali corrispondenti ai valori

$$y = \pm\frac{\pi}{2}$$

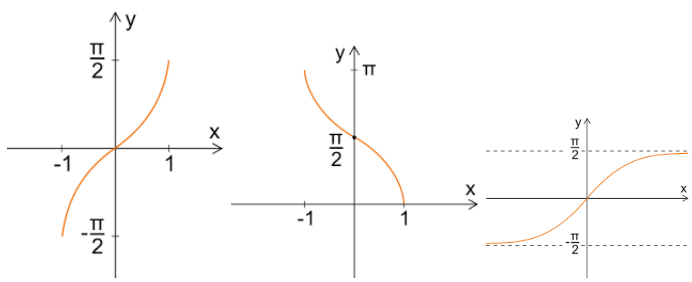


Figura 2.7: Grafici delle funzioni arcsin(x) (a sinistra), arccos(x) (al centro), arctan(x) a destra.

È possibile dimostrare varie relazioni che collegano le funzioni trigonometriche. Alcune di queste sono riassunte nella Tabella 2.1 posta alla fine del capitolo.

2.4 Teoremi sui triangoli

La trigonometria si occupa di studiare la relazione tra angoli e lati dei triangoli. Utilizzando le definizioni delle funzioni seno, coseno e tangente è possibile dimostrare un'ampia varietà di teoremi che racchiudono queste relazioni.

2.8

Consideriamo un triangolo generico come quello mostrato nella figura 2.8, dove abbiamo indicato con a, b e c le lunghezze dei vari lati del triangolo. Valgono le seguenti relazioni.

- **Teorema del seno**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{2.4}$$

Consideriamo il caso di triangolo rettangolo, in cui $\gamma = \pi/4$ è l'angolo retto $\sin\gamma = 1$, la formula si semplifica in:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c \equiv \mathtt{i} = \frac{\mathtt{c}_1}{\sin\alpha} = \frac{\mathtt{c}_2}{\sin\beta}$$

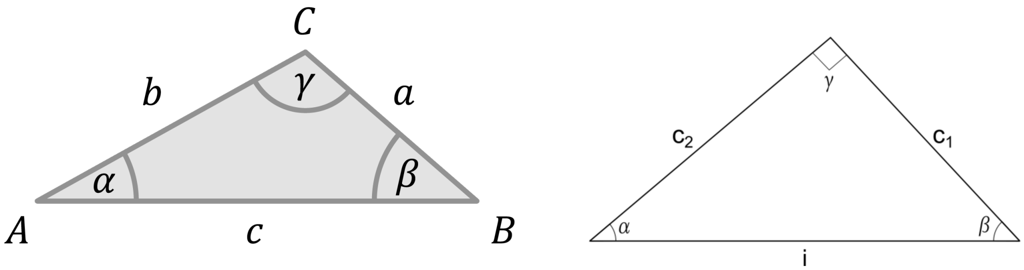


Figura 2.8: Triangolo generico a sinistra, e rettangolo a destra.

dove abbiamo usato i simboli della parte destra della figura 2.8 con $\mathtt{i}$ per ipotenusa e $\mathtt{c}_1$ e $\mathtt{c}_2$ per indicare i due cateti. Dalle relazioni precedenti si ottengono direttamente le definizioni delle funzioni goniometriche nel triangolo rettangolo:

$$\sin\alpha = \frac{\mathtt{c}_1}{i}, \quad \sin\beta = \frac{\mathtt{c}_2}{i}$$

- **Teorema del coseno** Per un triangolo generico (a sinistra in figura 2.8) si ha che

  $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{2.5}$$

  Nel caso particolare di triangolo rettangolo (a destra in figura 2.8)

  $$\mathtt{i}^2 = \mathtt{c}_1^2 + \mathtt{c}_2^2$$

  che corrisponde al **Teorema di Pitagora**.

Sia dato un triangolo rettangolo e un suo angolo acuto α (a destra in figura 2.8). Le funzioni goniometriche si definiscono come segue:

- Il **seno** di α è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa:

  $$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{\mathtt{c}_1}{\mathtt{i}}$$

- Il **coseno** di α è il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo α e l'ipotenusa:

  $$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{\mathtt{c}_2}{\mathtt{i}}$$

- La **tangente** di α è il rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente:

  $$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{\mathtt{c}_1}{\mathtt{c}_2}$$

2.5 Estensione allo spazio in 3 dimensioni

Tutta la trigonometria è legata alla geometria nel piano. Una interessante estensione allo spazio in tre dimensioni è quella dell'angolo. Nel piano la misura in radianti di un angolo è data dal rapporto tra l'arco

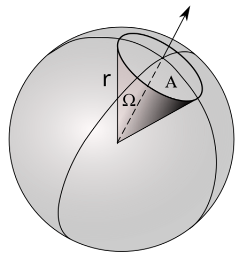


Figura 2.9: steradiante

di una circonferenza limitata di due segmenti che formano l'angolo e il raggio della circonferenza stessa. È possibile estendere questa definizione allo spazio. Consideriamo una sfera ed un cono il cui vertice sia posizionato al centro della sfera. Si definisce angolo solido la parte di spazio limitata da questo cono, ed è misurato in **steradianti**. Lo steradiante è definito come il rapporto tra l'area della sfera limitata dal cono e il quadrato del raggio della sfera. Considerando la figura 2.9 il valore dell'angolo solido Ω in steradianti è

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad .$$

Il massimo valore che può assumere un angolo solido è quello sotteso dall'area di tutta una sfera, che comprende quindi tutto lo spazio. Poichè il valore della superficie di una sfera di raggio r è $4\pi r^2$ il valore massimo dell'angolo solido, in steradianti, è

$$\Omega_{\max} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad .$$

2.6 Relazioni trigonometriche

Formule per il seno	
Tipo di formula	**Espressione**
Formule di addizione e sottrazione	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
Formule di duplicazione	$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
Formule di bisezione	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
Formule di prostaferesi	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
Formule di Werner	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
Formule per il coseno	
Tipo di formula	**Espressione**
Formule di addizione e sottrazione	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
Formule di duplicazione	$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2\alpha$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
Formule di bisezione	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
Formule di prostaferesi	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
Formule di Werner	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

Tabella 2.1: Tabella riassuntiva delle formule di addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione, prostaferesi e Werner per seno e coseno

angoli/funzioni	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0
cot	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

Tabella 2.2: Tabella riassuntiva con i principali angoli notevoli

Angoli complementari	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$
Angoli supplementari	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
Angoli esplementari	$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
Angoli opposti	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

Tabella 2.3: Tabella riassuntiva per gli archi associati

Capitolo 3

SISTEMI DI COORDINATE

(con il contributo di Giulia Cortese)

3.1 Coordinate nel piano (2D)

3.1.1 Coordinate cartesiane

Il **sistema di coordinate cartesiane** è il più comune. In due dimensioni un punto P è rappresentato da una coppia ordinata di numeri (x, y), dove ciascun numero, detto coordinata, indica la distanza del punto dagli assi x e y, detti rispettvamente **asse delle ascisse** e **asse delle ordinate**. Il punto d'incontro degli assi ortogonali ed orientati è chiamato **origine** e si indica con O.

3.1.2 Coordinate polari

Un'altra possibilità di definire la posizione di un punto nel piano è quella di utilizzare il **sistema di coordinate polari**, dove un punto generico P viene individuato per mezzo di:

- una distanza ρ dall'origine O;
- un angolo θ che la semiretta OP forma con una direzione di riferimento (tipicamente l'asse x positivo).

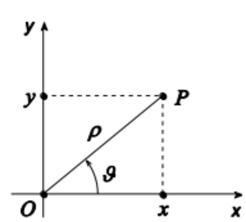


Figura 3.1: Sistema di coordinate polari.

Nella figura 3.1 sono confrontate le coordinate cartesiane del punto P con le corrispondenti coordinate polari. Note le coordinate cartesiane x e y, è possibile determinare le coordinate polari ρ e θ mediante le seguenti relazioni:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ,$$

e l'argomento θ verifica le relazioni

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} .$$

Viceversa, date le coordinate polari ρ e θ, si possono ricavare le coordinate cartesiane dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} .$$

3.2 Coordinate nello spazio (3D)

3.2.1 Coordinate cartesiane in 3D

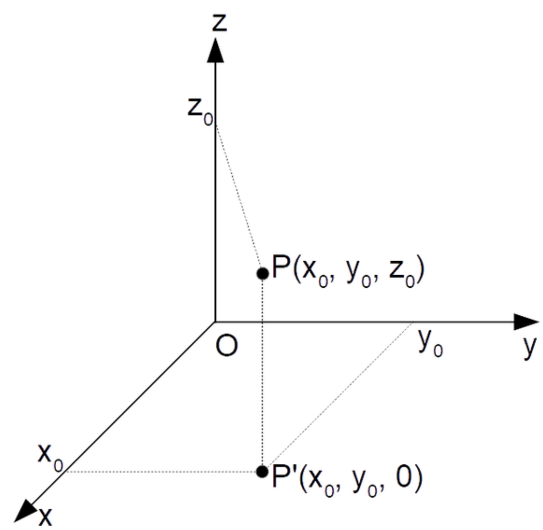


Figura 3.2: Sistema di coordinate cartesiane che individuano il punto P.

L'estensione a tre dimensioni delle coordinate cartesiane definite in due dimensioni è immediata. Per indicare la posizione di un punto nello spazio, al posto di una coppia ordinata si usa una triade di numeri reali, normalmente indicati con (x, y, z), dove ciascun numero indica la distanza del punto dagli assi ortogonali x e y e z.

3.2.2 Coordinate cilindriche

In tre dimensioni, **le coordinate cilindriche** (r, θ, z) sono una conseguenza dell'estensione delle coordinate polari (passiamo a tre dimensioni). In questo sistema, la posizione di un punto P nello spazio è descritta tramite:

- le coordinate polari ρ e ϕ della proiezione P' di P sul piano xy;
- la coordinata z, che rappresenta la distanza del punto P dal piano xy.

Nella figura 3.3 sono illustrate le coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z) del punto P a partire dalla sua proiezione P' sul piano orizzontale. Le coordinate cilindriche si ottengono dalle coordinate cartesiane (x, y, z) tramite

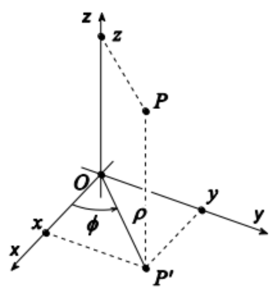


Figura 3.3: sistema di coordinate cilindriche.

le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} .$$

Se, invece, sono note le coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z), è possibile ricavare le coordinate cartesiane come segue:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} .$$

3.2.3 Coordinate sferiche

Dato uno spazio tridimensionale, **sistema di coordinate sferiche** permette di identificare un punto tramite una distanza e due angoli. In particolare:

- ρ è la distanza del punto P dall'origine O;
- θ è l'angolo compreso tra l'asse z e il segmento OP;
- ϕ è l'angolo compreso tra l'asse x e la proiezione OP' del segmento OP sul piano xy.

Le coordinate sferiche (ρ, θ, ϕ) del punto P possono essere espresse in funzione delle coordinate cartesiane (x, y, z) mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases} .$$

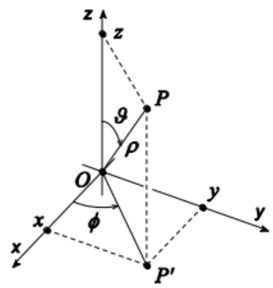


Figura 3.4: sistema di coordinate sferiche.

Viceversa, date le coordinate sferiche, si ottengono le coordinate cartesiane tramite le relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} .$$

Capitolo 4

CALCOLO COMBINATORIO

(con il contributo di Natan Margiotta e Giovanni Maria Polo)

4.1 Introduzione

Lo scopo di quello che si definisce calcolo combinatorio è lo studio di come contare il numero di possibili raggruppamenti di oggetti, in base a diverse regole e condizioni. Il calcolo combinatorio si occupa di capire quanti modi diversi esistono per scegliere o ordinare elementi di un insieme, senza doverli elencare tutti.

Due entità matematiche utili per il calcolo combinatorio sono:

- **Fattoriale**
  Il **fattoriale** di un numero intero positivo n (scritto $n!$) è il prodotto di tutti i numeri interi positivi da 1 a n. Ad esempio, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Per convenzione si pone $0! = 1$.

- **Coefficiente binomiale**
  Siano n e k due numeri naturali. Si definisce **coefficiente binomiale** n **su** k, il seguente rapporto tra fattoriali
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad . \tag{4.1}$$
  come vedremo questo numero corrisponde al il numero di modi in cui k elementi distinti possono essere scelti tra n elementi distinti, quindi $k \leq n$. In caso $n < k$ si pone a zero il coefficiente binomiale.

4.2 Permutazioni

Le permutazioni sono raggruppamenti di elementi in cui l'ordine conta. Ad esempio, le permutazioni di AB sono AB e BA. Il numero di permutazioni di n elementi è $n!$.

4.2.1 Permutazioni semplici

Si tratta di tutte le possibili disposizioni di n elementi distinti presi tutti insieme. In altre parole possiamo definire una permutazione semplice come il risultato di uno scambio dell'ordine degli elementi di un insieme. Il numero di queste permutazioni è $n!$. Ad esempio le lettere della parola "ode" possono essere permutate in $3! = 6$ maniere differenti: o,d,e ; o,e,d ; d,e,o ; d,o,e ; e,o,d ; e,d,o.

4.2.2 Permutazioni con ripetizione

Sono permutazioni di elementi non tutti diversi tra loro. In altre parole, una permutazione con ripetizione è uno dei possibili modi per ordinare un certo numero di elementi, di cui alcuni ripetuti.
Consideriamo n elementi, di cui alcuni indistinguibili, e supponiamo n_1 sia di un tipo, che n_2 sia di un altro tipo e così via fino a n_k, con la condizione che $n_1 \;+\; n_2 \;+\; \ldots \;+\; n_k \;=\; n$.
Il **numero di permutazioni con ripetizione** degli n elementi così assegnati è dato da

$$P_n^{n_1\ ,\ n2\ ,\ \ldots\ ,\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \ \cdot\ n_2! \ \cdot\ \ldots\ \cdot\ n_k!} \quad . \tag{4.2}$$

Per fare un esempio calcoliamo il numero di anagrammi che si possono formare usando le lettere della parola "cassa". Consideriamo la formula (4.2), in questo caso risulta $n = 5$ con $n_1 = 1$, la lettera c, $n_2 = 2$ la lettera s $n_3 = 2$, la lettera a quindi

$$P_5^{1\ ,\ 2\ ,\ 2} = \frac{5!}{1!\ \cdot\ 2!\ \cdot\ 2!} = \frac{120}{2\ \cdot\ 2} = 30 \quad .$$

4.3 Disposizioni

Le disposizioni sono raggruppamenti di elementi in cui l'ordine conta, ma si considerano solo alcuni elementi di un insieme più ampio. Ad esempio, le disposizioni di 2 elementi scelti tra 3, per esempio (A, B, C) sono: AB, BA, AC, CA, BC, CB.

4.3.1 Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici, dette anche, disposizioni senza ripetizione, considerano il numero di sequenze ordinate di k elementi distinti estratti tra n elementi distinti, con $n \geq k$. In questo contesto **ordinare** significa scegliere una sequenza precisa degli elementi, non solo scegliere quali elementi, ma anche in quale posizione metterli.

Il numero di disposizioni semplici è pari a

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.3}$$

In una corsa ci sono 10 atleti in gara. Quante possibili classifiche dei primi tre ci possono essere

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \quad .$$

4.3.2 Disposizioni con ripetizione

Si definisce **disposizione con ripetizione** una sequenza ordinata di k elementi estratti da n elementi distinti, con la probabilità che ogni elemento possa ripetersi fino a k volte nella stessa sequenza. Il numero di disposizioni con ripetizione è

$$D'_{n,k} \;=\; n^k. \tag{4.4}$$

Ad esempio, consideriamo 3 lettere: A,B,C e vogliamo formare delle parole di 2 lettere, dove le lettere possono ripetersi. Il numero totale di disposizione con ripetizione è $3^2 \;=\; 9$. Le disposizioni possibili sono: AA ; AB ; AC ; BA ; BB ; BC ; CA ; CB ; CC.

4.4 Combinazioni

Le combinazioni sono raggruppamenti di oggetti in cui l'ordine non conta.

4.4.1 Combinazioni semplici

La combinazione semplice, dette anche senza ripetizione, è definita come una sequenza di k elementi distinti estratti da n elementi distinti, senza considerare l'ordine di estrazione. Ovviamente $n \geq k$. Il numero di combinazioni semplici è data da

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} \tag{4.5}$$

Ad esempio consideriamo il numero di combinazioni semplici di classe 4 dell'insieme costituito dalle vocali della parola "euforia". Tale insieme è costituito dai seguenti elementi: "a,e,i,o,u". Ognuna delle combinazioni che dobbiamo costruire è un insieme di 4 elementi dell'insieme di partenza e ogni sequenza è diversa dall'altra solo se è diverso almeno un elemento. Applicando la (4.5) si ottiene il numero

$$C_{5,3} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\ (5-4)!} = 5.$$

Le combinazioni semplici di classe 4 dell'insieme sono: "aeio ; aeiu ; aeou ; aiou ; eiou".

4.4.2 Combinazioni con ripetizioni

Si definisce **combinazione con ripetizione** una sequenza di k elementi estratti tra n elementi distinti, con la possibilità che ogni elemento possa ripetersi fino a k volte all'interno della stessa sequenza e **indipendentemente** dall'ordine.
Il numero di combinazioni con ripetizioni è

$$C^{'}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\ (n-1)!} \tag{4.6}$$

Quali e quante sono le combinazioni con ripetizione di classe 3 degli elementi dell'insieme composto dalle lettere "s , t" ? Le combinazioni con ripetizione di classe degli elementi di tale insieme sono tutti i gruppi di 3 elementi composti con "s, t", che differiscono tra loro per almeno un elemento e in cui ciascun elemento può essere ripetuto fino ad un massimo di 3 volte. Applicando la (4.6) otteniamo

$$C^{'}_{2,3} = \binom{2+3-1}{3} = \frac{(2+3-1)!}{3!\ (2-1)!} = 4$$

Le possibilità sono: sss ; sst ; stt ; ttt.

Tipo	**Formula**
Permutazioni semplici	$P_n = n!$
Permutazioni con ripetizione	$P = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$
Disposizioni semplici	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Disposizioni con ripetizione	$D_{n,k} = n^k$
Combinazioni semplici	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Combinazioni con ripetizione	$C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Tabella 4.1: Riepilogo compatto del calcolo combinatorio

Capitolo 5

MATRICI, DETERMINANTI E SISTEMI DI EQUAZIONI LINERARI

(con il contributo di Gabriele Convertini, Saverio Matera, Niccolò Papa, Alberto Rocca)

5.1 Matrici

5.1.1 Definizioni

Definiamo **vettore** una n-upla ordinata di numeri. In questo capitolo ci riferiremo esclusivamente a numeri reali. Un vettore $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ può essere rappresentato come una colonna di numeri

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad . \tag{5.1}$$

Definiamo **matrice** ad n righe ed m colonne , o piú brevemente matrice $n \times m$, una m-upla ordinata di n-uple ordinate, rappresentata da una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.2}$$

dove gli elementi a_{ij} sono detti **coefficienti** della matrice $A = (a_{ij})$ e, per convenzione, il primo indice si riferisce alle righe ed il secondo alle colonne. Ovviamente un vettore può essere considerato come una matrice colonna.

5.1.2 Tipi di matrice

Esistono diversi tipi di matrice:

- **Matrice rettangolare:** ha un numero di righe diverso dal numero di colonne, quindi $n \neq m$.
- **Matrice quadrata:** ha lo stesso numero di righe e colonne, cioè $n = m$.
- **Matrice triangolare superiore:** è una matrice quadrata in cui tutti i coefficienti al di sotto della diagonale principale (cioè per cui $i > j$) sono nulli.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrice triangolare inferiore:** è una matrice quadrata in cui tutti i coefficienti al di sopra della diagonale principale (cioè per cui $i < j$) sono nulli.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrice diagonale:** è una matrice quadrata in cui tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale (cioè per cui $i \neq j$) sono nulli.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

- **Matrice identità:** è un caso particolare di matrice diagonale, indicata con I_n, che ha 1 su tutti gli elementi della diagonale principale e 0 altrove. È l'elemento neutro nella moltiplicazione tra matrici:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice simmetrica:** è una matrice quadrata tale che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j.
- **Matrice antisimmetrica:** è una matrice quadrata tale che tutti i suoi elementi godono della proprietà $a_{ij} = -a_{ji}$, quindi tutti gli elementi sulla diagonale principale sono nulli:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrice nulla:** è una matrice in cui tutti gli elementi sono zero. È l'elemento neutro per l'addizione di matrici.

5.1.3 Operazioni tra matrici

È possibile definire delle operazioni tra matrici.

1. **Somma tra matrici**
   Due matrici A, B si possono sommare solo se hanno le stesse dimensioni. La somma è definita elemento per elemento:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

   Proprietà:

   - **Commutativa:** $A+B=B+A$.
   - **Associativa:** $(A+B)+C=A+(B+C)$.
   - **Esistenza elemento neutro:** esiste una matrice nulla 0 tale che $A+0=A$.
   - **Esistenza dell'opposto:** per ogni matrice A esiste una matrice $-A$ tale che $A+(-A)=0$.

2. **Moltiplicazione per uno scalare**
   Sia λ un numero e A una matrice:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} = (\lambda A)_{ij} = \lambda\ A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

   Proprietà:

   - **Distributiva sulla somma di matrici:** $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
   - **Distributiva sulla somma di scalari:** $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
   - **Associativa:** $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

3. **Prodotto tra matrici**
   Il prodotto tra matrici è definito solo se il numero di colonne della prima matrice coincide con il numero di righe della seconda.
   $AB=C$ implica che:

$$c_{ij} = \sum_h a_{ih}b_{hj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

   Proprietà:

   - **Associativa:** $(AB)C=A(BC)$
   - **Distributiva:** $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
   - **Associativa rispetto uno scalare:** $(\lambda A)B=\lambda(AB)$
   - **Non commutativa in generale:** $AB \neq BA$
   - **Esistenza elemento neutro del prodotto:** $AI_n = I_nA = A$, dove abbiamo indicato con I_n la matrice identità a n dimensioni.

Può esistere anche l'inverso per il prodotto, dato dal prodotto di una matrice per la sua inversa (infatti, come vedremo nella prossima sezione, non è detto che una matrice si possa invertire). Il risultato sarebbe:

$$AA^{-1} = I_n$$

4. **Trasposizione**

   La **trasposta** di una matrice A è ottenuta scambiando righe e colonne di A , e si denota con A^T :

   $$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

   Proprietà:

   - $(A^T)^T = A$
   - $(A + B)^T = A^T + B^T$
   - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
   - $(AB)^T = B^T A^T$

5.1.4 Operazioni tra matrici quadrate

Per una matrice quadrata valgono ovviamente tutte le operazioni definite precedentemente, inoltre è possibile definire le seguenti operazioni.

1. **Traccia di una matrice**

   La traccia di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale principale, dove si ha $i = j$:

   $$Tr(A) = \sum_i^n a_{ii}$$

   Proprietà:

   - $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
   - $Tr(\lambda A) = \lambda \cdot Tr(A)$
   - $Tr(AB) = Tr(BA)$

2. **Matrice inversa**
   Una matrice A è invertibile se esiste una matrice A^{-1} tale che:

   $$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad ,$$

   con la condizione che A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, dove $\det(A)$ rappresenta il determinante di A, di cui discuteremo nella prossima sezione. In tal caso l'inversa si calcola come:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \quad ,$$

   dove la matrice $\operatorname{adj}(A)$ è detta **aggiunta classica**, ed è la trasposta della matrice dei **cofattori** di A. Ogni elemento di questa matrice, $\operatorname{cof}_{ij}(A)$ si calcola come segue:

   $$\operatorname{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad ,$$

   dove A_{ij} è la sottomatrice ottenuta da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque risulta:

   $$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^T \quad .$$

   Proprietà:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5.2 Determinante

5.2.1 Definizione e proprietà

Data una matrice quadrata A definiamo uno scalare $\det(A)$ **determinante** di A. Spesso viene usata la notazione $|A|$, e in generale:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \quad \text{indica il determinante della matrice} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad .$$

Per una matrice A composta da n righe e n colonne, il determinante può essere definito in termini costruttivi come

$$\det(A) := \sum_{p \in P_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} \quad , \tag{5.3}$$

dove P_n è l'insieme di tutte le permutazioni p dell'insieme $\{1, 2, \cdots, n\}$, $\mathrm{sgn}(p) = 1$ se la permutazione p è pari e -1 se è dispari, e $p(i)$ indica l'i-esimo elemento della permutazione. Il numero di termini della somma è $n!$.

Ad esempio nel caso $n = 2$ abbiamo che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{2} a_{i[1,2]} - \prod_{i=1}^{2} a_{i[2,1]} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad .$$

Dalla definizione (5.3) si hanno i seguenti risultati.

Determinante 1×1

Se $A = (a)$ è una matrice 1×1, allora il determinante coincide banalmente con il suo unico elemento:

$$\det(A) = a$$

Determinante 2×2

Per una matrice del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

il determinante si calcola direttamente come:

$$\det(A) = ad - bc$$

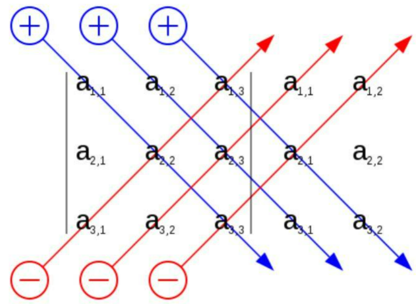


Figura 5.1: Rappresentazione grafica della regola di Sarrus

Determinante 3×3 – Metodo di Sarrus

Per matrici 3×3 si può usare una regola mnemonica nota come **regola di Sarrus**, che funziona solo per questa dimensione. Si scrivono le prime due colonne della matrice accanto ad essa, ottenendo così cinque colonne in tutto, vedi Fig. 5.1. Poi si sommano i prodotti delle diagonali che scendono da sinistra a destra e si sottraggono quelli delle diagonali che salgono:

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})\end{aligned}$$

Regola di Laplace:

Uno dei metodi generali più usati Per calcolare il determinante di matrici è lo sviluppo di Laplace. Esso riduce il calcolo di un determinante di ordine n al calcolo di n determinanti di ordine $n-1$. Funziona così:

1. Si sceglie una colonna j arbitraria della matrice.

2. Una volta fissata la colonna j, si sommano i determinanti delle sottomatrici minori $A_{(ij)}$ ottenute togliendo la riga i e la colonna j dalla matrice A secondo la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{(ij)}) \quad .$$

Lo sviluppo di Laplace funziona anche selezionando una riga della matrice anziché una colonna. La formula è leggermente diversa perché in questo caso bisogna far scorrere le colonne j da 1 a n.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{(ij)}) \quad .$$

Il risultato finale è sempre lo stesso.

5.2.2 Proprietà del determinante

- **Effetto dello scambio di due righe (o colonne):**
  Se si scambiano due righe (o colonne), il determinante cambia segno.

- **Moltiplicazione di una riga (o colonna) per uno scalare:**
  Se si moltiplica una riga (o colonna) per uno scalare λ, allora il determinante viene moltiplicato per λ.

- **Linearità rispetto a ogni riga (o colonna):**
  Il determinante è lineare in ciascuna riga (o colonna) se le altre righe sono tenute fisse. In simboli, per una matrice A in cui la riga i-esima è sostituita da una combinazione lineare:

$$\det(..., \lambda\vec{v}, \mu\vec{w}, ...) = \lambda \det(..., \vec{v}, ...) + \mu \det(..., \vec{w}, ...) \quad .$$

- **Alternanza:**
  Dalle proprietà precedenti si ha che se due righe o due colonne della matrice sono uguali, o proporzionali, allora:

$$\det(A) = 0 \quad .$$

  È strettamente vero anche il contrario, cioè:

$$\det(A) = 0, \Longleftrightarrow \text{ci sono righe (o colonne) linearmente dipendenti}$$

- **Normalizzazione:**

$$\det(I_n) = 1 \quad .$$

- **Determinante di matrice triangolare:**
  Il determinante di una matrice triangolare (superiore o inferiore) è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

- **Determinante del prodotto:**

$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B) \quad .$$

- **Determinante della trasposta:**

$$\det(A^T) = \det(A) \quad .$$

  Il determinante è invariante per trasposizione.

- **Determinante di matrice invertibile:**
  Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

5.2.3 Rango di una matrice

Data una matrice A, si chiama minore della matrice A una sottomatrice quadrata, cioè una matrice che si ottiene da A cancellando alcune righe (anche nessuna) ed alcune colonne (anche nessuna) in modo che il numero di righe rimanenti sia uguale al numero di colonne rimanenti. Diremo che un minore M di A è non nullo se $\det(M) \neq 0$. Chiameremo rango di A l'ordine massimo dei suoi minori non nulli, ovvero $\mathrm{rg}(A) = k$ se esiste un minore non nullo di ordine k e se tutti i minori di ordine $k + 1$ (se esistono) sono nulli.

5.3 Sistemi di equazioni lineari

5.3.1 Introduzione

Un sistema di n equazioni in m incognite si presenta nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

dove ogni equazione è una combinazione lineare delle incognite $x_1, \ldots, x_m$ con i rispettivi coefficienti a_{ij} , uguale a un termine noto b_i. Lo studio dei sistemi lineari ha come scopo la determinazione dell'esistenza, dell'unicità e dell'esplicitazione delle soluzioni. A seconda della relazione tra le equazioni, si distinguono tre casi:

- **Compatibile determinato**: esiste una ed una sola soluzione.
- **Compatibile indeterminato**: esistono infinite soluzioni.
- **Incompatibile**: non esiste alcuna soluzione.

5.3.2 Forma matriciale

Come era intuibile dalla sua rappresentazione, possiamo riscrivere il sistema in forma matriciale :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

con

$$A = [a_{ij}]_{n\times m} \ , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \ , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \ ,$$

dove:

- A è detta **matrice dei coefficienti**.
- $\vec{x}$ è il **vettore colonna delle incognite**.
- $\vec{b}$ è il **vettore dei termini noti**.

5.3.3 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ è **compatibile** (cioè ammette almeno una soluzione) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A coincide con il rango della matrice completa **completa** ottenuta affiancando alla matrice A il vettore colonna $\vec{b}$ formando una nuova matrice:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} {}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \ .$$

Quindi

- Se $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|\vec{b}]) = m$, il sistema è **determinato** (ha un'unica soluzione).
- Se $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|\vec{b}]) < m$, il sistema è **indeterminato** (ha infinite soluzioni, parametrizzabili).
- Se $\text{rg}(A) < \text{rg}([A|\vec{b}])$, il sistema è **incompatibile** (nessuna soluzione).

5.3.4 Regola di Cramer

La Regola di Cramer consente di risolvere un sistema lineare quadrato ($n = m$) se la matrice dei coefficienti è invertibile, ovvero $\det A \neq 0$.
In tal caso la soluzione unica è:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, m$$

dove A_j è la matrice ottenuta sostituendo la j-esima colonna di A con $\vec{b}$.

5.4 Problema agli autovalori

Consideriamo il problema di trovare le soluzioni di un sistema di equazioni rappresentabile come

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \text{o} \quad (A - \lambda I_n)\vec{x} = 0 \ . \tag{5.4}$$

dove A una matrice quadrata di dimensione $n \times n$, $\lambda \neq 0$ un numero. Le incognite sono inserite nel vettore $\vec{x}$. I valori di λ che soddisfano la (5.4), sono detti **autovalori** e i corrispondenti $\vec{x}$ sono gli **autovettori**.

Secondo quanto discusso nella Sezione 5.3, si tratta di risolvere un sistema lineare omogeneo di n incognite e n equazioni. Soluzioni diversa dalla ovvia $\vec{x} = 0$, si hanno quando $\det A = 0$.

Definiamo il **polinomio caratteristico** come:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{5.5}$$

dove λ è una variabile scalare e I rappresenta la matrice identità. Le soluzioni dell'equazione 5.4 si ottengono trovando le radici del polinomio caratteristico, ovvero risolvendo l'**equazione caratteristica**:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{5.6}$$

Una volta ottenuti gli autovalori λ_n, devono essere inseriti, uno alla volta, nell'equazione (5.4) per ottenere i rispettivi autovettori. Dato che il sistema è omogeneo, in altre parole il rango di A è minore di n, il numero delle soluzioni è infinito. Questo significa che le componenti di ogni vettore $\vec{x}_n$ non sono linearmente indipendenti. Normalmente si definisce l'autovettore considerandone la normalizzazione. Ad esempio l'i-esimo autovettore può essere normalizzato come

$$(\vec{x}^i)^T\vec{x}^i \equiv (x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i)\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = 1 \ .$$

Capitolo 6

FUNZIONI

(con il contributo di Thomas De Paolis e Marco Raganato)

6.1 Definizioni

Quando la variazione di una grandezza, diciamo y, dipende dalla variazione di un'altra grandezza, diciamo x, possiamo affermare che le due grandezze sono legate da una relazione funzionale. La figura 6.1 rappresenta il concetto di funzione. Gli elementi x che compongono l'insieme **A** sono in relazione agli elementi y che compongono l'insieme **B**. Questa relazione può essere espressa in vari modi, ad esempio $y = f(x)$ o più semplicemente $y(x)$.

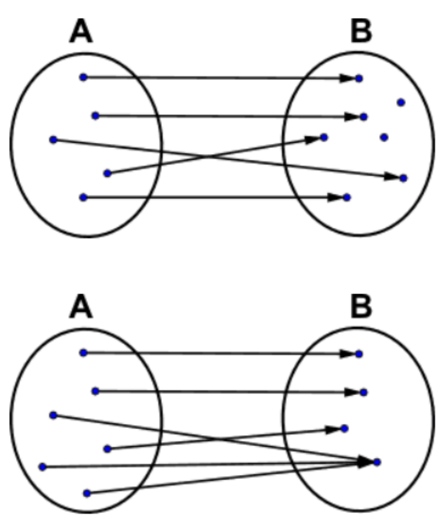


Figura 6.1: Esempi di funzione.

L'insieme dei valori x per i quali il valore della funzione y è dato da $f(x)$ è detto **dominio** o **campo di esistenza della funzione**. Normalmente la variabile x viene detta **indipendente**. L'insieme dei valori di y è detto **codominio**. La variabile y è detta **dipendente**

È possibile che per un valore di x corrisponda più di un valore di y. Queste relazioni non sono strettamente definite come funzioni anche se sono chiamate **funzioni polidrome**. Non considereremo questi casi se non quando dichiarato esplicitamente. Ci limitiamo a considerare soltanto **funzioni monodrome** che associano ad un valore di x un solo valore di y.

Definiamo **insieme immagine** come quello composto da tutti gli y appartenenti a $\mathbf{B}$ tale che per ogni valore di x si ha $f(x) = y$.

Una funzione $f(x)$ che associa elementi di $\mathbf{A}$ a quelli di $\mathbf{B}$ viene detta:

- **suriettiva** se l'immagine di $f(x)$ corrisponde a $\mathbf{B}$
- **iniettiva** se, per due elementi diversi di A, $x_1 \neq x_2$ si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

6.2 Operazioni con le funzioni

Consideriamo due funzioni f e g definite sullo stesso dominio. Possiamo definire le seguenti funzioni.

- **Funzione somma**.
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad .$$
- **Funzione moltiplicazione**.
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \;; .$$
- **Funzione reciproca**. Per ogni valore di x tale che $f(x) \neq 0$
$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \quad .$$
- **Funzione composta**. Consideriamo una funzione $f(x)$ con dominio $\mathbf{A}$ e immagine $\mathbf{B}$ e un'altra funzione g che associa gli elementi di $\mathbf{B}$ a quelli di un altro insieme $\mathbf{C}$. Definiamo funzione composta
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
- **Funzione invertibile** Una funzione $y = f(x)$ si dice **invertibile** se esiste una funzione $x = g(y)$ per ogni x di $\mathbf{A}$ e y di $\mathbf{B}$. La funzione g inversa di f si denota con f^{-1}. Questo porta confusione con la funzione reciproca indicata nello stesso modo.

6.3 Funzioni Reali

Le **Funzioni Reali di variabile reale** sono funzioni in cui dominio e codominio sono rispettivamente un sott'insieme dell'insieme ordinato dei numeri reali. Considereremo alcune proprietà delle funzioni reali.

- Considerando $x_1 \neq x_2$ possiamo definire la funzione $f(x)$ come:
  - **crescente** se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$;
  - **strettamente crescente** $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$;
  - **decrescente** $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$;
  - **strettamente decrescente** $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$;

  Una funzione è detta monotòna se è crescente o decrescente, mentre è detta strettamente monotòna se è strettamente crescente o strettamente decrescente. Una funzione strettamente monotòna è iniettiva.

- Si dice che $f(x)$ è **limitata** se esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni x appartenente al dominio di $f(x)$.
- $f(x)$ è **pari** se per ogni x e $-x$ appartenenti al dominio risulta $f(x) = f(-x)$;
- $f(x)$ è **dispari** per ogni x e $-x$ appartenenti al dominio risulta $-f(x) = f(-x)$;
- $f(x)$ è periodica se esiste un numero T numero reale positivo detto periodo tale che $x \pm T$ appartenga al dominio e si abbia
$$f(x \pm T) = f(x) \quad .$$

6.4 Funzioni elementari

Le funzioni elementari sono le funzioni di base attraverso cui, con operazioni algebriche e composizione di funzioni, si possono ottenere funzioni più complesse. Esse sono definite attraverso espressioni analitiche che permettono di ottenere il valore della funzione per ogni valore della variabile indipendente.

In questa sezione considereremo esclusivamente funzioni il cui dominio è legato all'insieme dei numeri reali e che producono numeri reali.

- **Polinomi e funzioni razionali**
Le funzioni razionali formano una classe di funzioni che implicano solo operazioni algebriche. Chiamiamo polinomio di grado n, con n numero naturale, l'espressione:
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad ,$$
dove a_n sono numeri reali detti coefficienti del polinomio.
Tra i polinomi esistono sottoclassi importanti come:
  - le **potenze intere** $f(x) = x^n$, che corrispondono al caso in cui i coefficienti a_n sono tutti nulli tranne l'n-esimo;
  - le funzioni **lineari** ovvero le funzioni del tipo $f(x) = a_1 x + a_0$
  - le funzioni **razionali** espresse come rapporto di polinomi:
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
definite per ogni valore di x tale che $Q(x) \neq 0$.
- **Radici aritmetiche e potenze razionali**
La funzione radice n-esima è definita nel seguente modo:
$$y(x) = f(x) = \sqrt[n]{x}$$
dove n è un numero intero positivo. Per n pari il dominio è ristretto a valori positivi di x, mentre non c'è alcuna restrizione del dominio per valori dispari di n.
- **Esponenziali e logaritmi**
Si definisce **funzione esponenziale di base** a la funzione $y = a^x$ con $a > 0$. Da questa definizione si possono dedurre alcune proprietà:

1. $a^x > 0$,
2. $a^x > 0$ è strettamente decrescente per $0 \leq a \leq 1$,
3. $a^x > 0$ è strettamente crescente per $a > 1$.

Tale funzione è biettiva, quindi è possibile definire la sua inversa, **la funzione logaritmo**.

Si definisce **logaritmo in base** a la funzione inversa di a^x,

$$y = \log_a(x) \quad \text{implica} \quad a^y = x \quad .$$

Il logaritmo è l'esponente y che si dà alla base a per ottenere l'argomento x. Il dominio del logaritmo è limitato a $x > 0$ perché la funzione esponenziale è strettamente positiva.

Considerando il numero irrazionale di Nepero e si definiscono la **funzione esponenziale** e il **logaritmo naturale** come una funzione esponenziale in base e, ed un logaritmo in base e

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x && \text{funzione esponenziale} \\ g(x) &= \ln(x) && \text{logaritmo naturale} \end{aligned}$$

- **Funzioni iperboliche**
  La funzione esponenziale permette di definire le **Funzioni iperboliche**
  il **coseno iperbolico**
  $$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ,$$
  il **seno iperbolico**
  $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ,$$
  la **tangente iperbolica**
  $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$
  La relazione fondamentale tra le funzioni iperboliche è:
  $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad .$$

- **Funzioni trigonometriche**
  Le funzioni trigonometriche $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$, e le loro proprietà sono descritte nel Cap. 2.

6.5 Funzioni a più variabili

Abbiamo considerato finora relazioni che legano due numeri tra di loro. Nello specifico delle funzioni che abbiamo maggiormente considerato si tratta di relazioni tra un numero reale x del dominio e un altro numero reale, y, del codominio.

Con **Funzioni a più variabili** si intendono delle funzioni in cui almeno uno tra dominio e codominio è un sottoinsieme di un campo reale a più dimensioni. Quindi ci sono queste possibilità:

- **Funzioni reali di variabile vettoriale**
  Si tratta di funzioni che dipendono da più di una variabile indipendente ma che producono un solo valore, che noi ipotizziamo sia un numero reale. Possiamo esprimere queste funzioni come
  $$y(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad ,$$
  dove il simobolo di vettore $\vec{x}$ indica l'insieme delle variabili indipendenti $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Ovviamente, n è un numero intero.

- **Funzioni vettoriali di variabile vettoriale**
  Questo è il caso più generale e definisce funzioni che dipendono da da più di una variabile indipendente e che producono più di un numero reale.

  $$\vec{y}(\vec{x}) = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

  dove k, intero, può essere diverso da n.

  Casi particolari sono

  $$\vec{y}(\vec{x}) = (f(x_1, x_2, \cdots, x_n), f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

  e addirittura

  $$\vec{y}(\vec{x}) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \ \ .$$

Capitolo 7

LIMITI

(con il contributo di Thomas De Paolis e Linda Maria Giannuzzi)

A meno che non venga esplicitamente affermato il contrario, in questo capitolo considereremo sempre funzioni reali (sezione 6.3), cioè funzioni tali che dominio e codominio siano rispettivamente un sott'insieme dell'insieme ordinato dei numeri reali.

7.1 Definizione di limite di una funzione

Consideriamo una funzione reale $f(x)$ e un punto x_0 appartenente al suo dominio. Affermiamo che *la funzione $f(x)$ ha come limite il numero reale ℓ quando x tende a x_0* se per ogni numero positivo ϵ, piccolo a piacere, si può trovare un numero reale positivo σ tale che per tutti gli x diversi da x_0 tali che

$$|x - x_0| < \sigma \ , \tag{7.1}$$

sia soddisfatta la diseguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \ . \tag{7.2}$$

Se ciò accade si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ . \tag{7.3}$$

Poiché nella (7.1) è presente un valore assoluto, è irrilevante che sia $x > x_0$ o $x < x_0$. È comunque possibile definire limiti da sinistra, per valori di $x < x_0$, e da destra per valori di limiti ottenuti per $x > x_0$. Questi sono indicati rispettivamente come

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \text{per} \qquad x < x_0 \tag{7.4}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \text{per} \qquad x > x_0 \ . \tag{7.5}$$

7.2 Proprietà dei limiti

Sia $f(x)$ una funzione tale che esista $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, allora valgono le seguenti proprietà dei limiti.

- **Permanenza del segno**
  1. Se $\ell > 0$, allora esiste un intervallo di valori di x attorno a x_0 per cui risulta $f(x) > 0$.
  2. Se esiste un intervallo di valori di x attorno a x_0 per cui risulta $f(x) > 0$, allora $\ell \geq 0$.

- **Limitatezza locale**

    i. Se ℓ è un numero reale, esiste un piccolo intervallo attorno a x_0 tale che per ogni valore di x il valore assoluto di $f(x)$ sia minore di un numero reale positivo M.

7.3 Teoremi sui limiti

Siano$f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \ ,$$

allora sono dimostrabili i seguenti teoremi.

1. **Teorema della somma**
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + m$$

2. **Teorema del prodotto**
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$$

3. **Teorema del quoziente**
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \quad (\text{con } m \neq 0)$$

4. **Primo teorema del confronto**

    (a) Se $\ell > m$, allora in un piccolo intorno attorno a x_0 si ha che $f(x) > g(x)$.

    (b) Se in un piccolo intorno attorno a x_0 si ha che $f(x) > g(x)$, allora $\ell \geq m$.

5. **Secondo teorema del confronto**
   Siano f, g, h tre funzioni tali che

    (a) in un piccolo intorno attorno a x_0 si ha $f(x) > g(x) > h(x)$,

    (b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$,

   allora si ha che $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

6. **Teorema sul limite della funzione composta**
   Siano x_0 e y_0 due numeri reali. Se:

    (a) esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$,

    (b) esiste $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$,

   allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$.

7.3.1 Alcuni limiti notevoli

In molti casi il calcolo del limite ottenuto sostituendo il valore di x_0 nella funzione di cui si vuole calcolare il limite conduce a forme indeterminate del tipo $[\infty/\infty]$, $[0/0]$ $\left[0 \cdot \infty\right]$, $\left[\infty - \infty\right]$. Presentiamo qui sotto i valori di alcuni limiti notevoli ottenuti usando tecniche differenti rispetto all'ingenua sostituzione di x_0 nella funzione.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
7. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$
9. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
10. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

7.4 Funzioni continue

7.4.1 Definizione

Dopo aver introdotto il concetto di **limite** è possibile parlare di **continuità di una funzione**. Una funzione reale $f(x)$ è continua nel punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi possiamo asserire che una funzione è continua in un punto x_0 se è possibile calcolare il limite della funzione in quel punto semplicemente calcolando il valore che vi assume la funzione.

Dato che abbiamo definito il limite destro e sinistro di una funzione in un punto, è possibile definire anche la continuità **destra** e **sinistra**, rispettivamente:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \ .$$

Una funzione è continua in un intervallo se lo è per ogni punto dell'intervallo.

7.4.2 Punti di discontinuità

Un punto è considerato un **di discontinuità** se la funzione non è continua in quel punto. Vi sono tre tipi di punti di discontinuità:

1. Si dice che x_0 è un punto di discontinuità **eliminabile** se esiste finito il limite di $f(x)$ in tale punto, ma risulta:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$
Viene detto eliminabile perché la funzione non è definita in tale punto ma è possibile rendere la funzione continua in tutto l'insieme di definizione assegnando come valore della funzione in tale punto il valore che assume il limite. Ad esempio, una funzione definita in un intervallo tranne che in $x_0 = 0$ può essere **estesa per continuità** imponendo che in $x_0 = 0$ la funzione valga quanto il limite destro e sinistro della funzione in quel punto (se tali limiti sono finiti).

2. Si dice che x_0 è un punto di discontinuità di **prima specie** se esistono finiti i limiti sinistro e destro della funzione in quel punto ma :
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
In tale circostanza si dice che c'è un **salto** della funzione in x_0 e il salto è uguale alla differenza dei valori dei limiti.

3. Si dice che un x_0 è un punto di discontinuità di **seconda specie** se almeno uno dei due limiti sinistro e destro in quel punto è infinito oppure non esiste.

7.4.3 Teoremi sulle funzioni continue

Vi sono diversi risultati ottenibili dalla proprietà di continuità di una funzione, in particolare molti di questi risultati si possono ottenere se la funzione considerata è definita in un'intervallo chiuso e limitato.

- **Teorema della continuità delle funzioni composte**
  Se $y = f(x)$ è continua e anche la funzione $g(y)$ è continua allora la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è continua.
- **Teorema di Weierstrass**
  Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, allora f è limitata e ammette massimo e minimo assoluti.
- **Teorema degli zeri**
  Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e $(f(a)\ f(b)) < 0$, allora esiste un numero dispari di punti x_i dell'intervallo $[a, b]$ tali che $f(x_i) = 0$.
- **Teorema dei valori intermedi**
  Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, allora è limitata e ha massimo e minimo assoluti. In questo intervallo $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra massimo e minimo.
- **Teorema sulla continuità della funzione inversa**
  Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e strettamente monotona, allora $f(x)$ è biunivoca sull'intervallo $[a, b]$, quindi ammette un funzione inversa $f^{-1}(X)$ che è continua.

Capitolo 8

DERIVATE

(con il contributo di Marco Fiorito e Giorgia Forte)

Anche in questo capitolo considereremo sempre funzioni reali, a meno che non venga esplicitamente detto il contrario.

8.1 Rapporto Incrementale

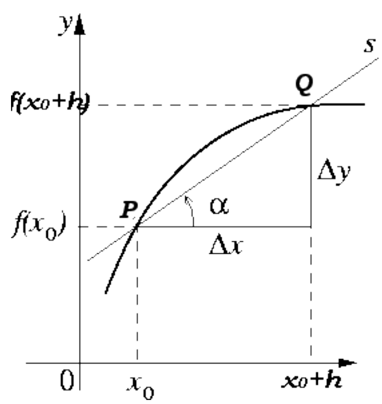


Figura 8.1:

Sia $y = f(x)$ una funzione reale che lega la variabile dipendente y alla variabili indipendente x. Consideriamo due valori x_0 e $x_0 + h$ della variabile indipendente appartenenti al dominio e siano $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$ i corrispondenti valori della variabile dipendente. Consideriamo gli incrementi Δx e Δy:

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h; \qquad \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{8.1}$$

Definiamo ora il **rapporto incrementale**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.2}$$

Dal punto di vista geometrico, il rapporto incrementale di f nel punto x è il coefficiente angolare della retta secante il grafico di f nei punti di coordinate $(x_0,\, f(x_0))$ e $(x_0 + h,\, f(x_0 + h))$, si veda la Figura 8.1.

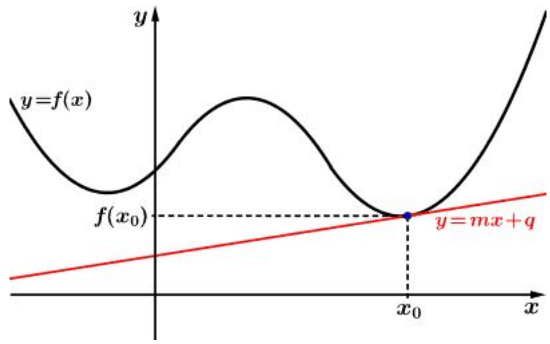


Figura 8.2:

8.2 Derivata di una funzione

Data una funzione reale $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si definisce **derivata** della funzione nel punto x_0, interno all'intervallo, il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.3}$$

Nell'espressione precedente abbiamo indicato la derivata come $f'(x_0)$. Altri modi per indicare la derivata sono $\frac{d}{dx}f(x)$ oppure $Df(x)$.

Forniamo una interpretazione geometrica della derivata. Consideriamo, ad esempio, la Figura 8.1. Quando $h \to 0$, il punto Q tende a sovrapporsi al punto P e la retta secante PQ tende a diventare la retta tangente alla curva nel punto P. Come indicato nella Fig. 8.2, la derivata di una funzione in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0. Questo è esprimibile come

$$y = q + mx = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{8.4}$$

con le ovvie relazioni tra i coefficienti q ed m dell'equazione della retta e i valori della funzione $f(x)$ e della sua derivata.

Usando le definizioni di limite sinistro e destro (vedi la sezione 7.1) possiamo definire la **derivata sinistra e destra** di una funzione in un punto x_0, rispettivamente come

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.5}$$

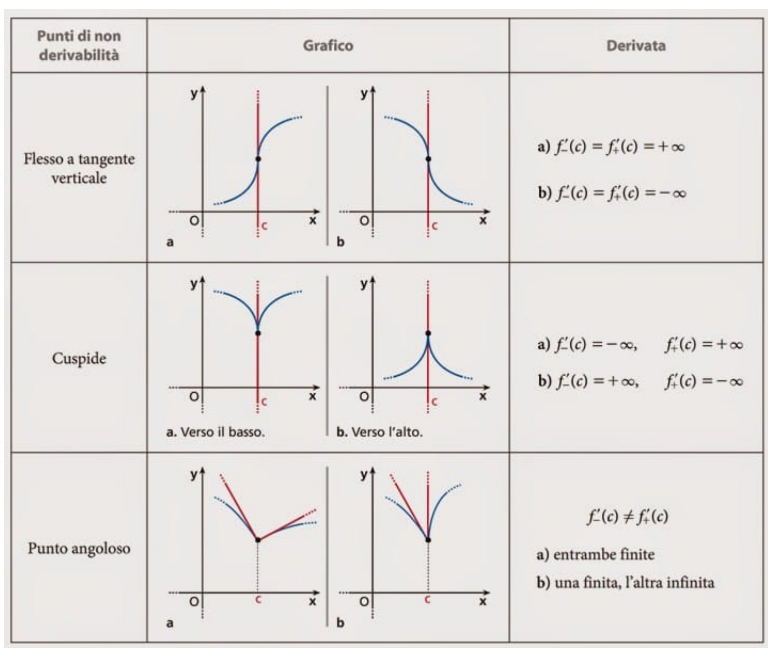
Una funzione è **derivabile** in un punto x_0 se sono finite e uguali tra loro le derivate sinistra e destra. Una funzione è **derivabile in un intervallo** chiuso [a; b] se è derivabile in tutti i punti interni ad [a; b] e se esistono e sono finite la derivata destra in a e la derivata sinistra in b.

8.3 Continuità e derivabilità

Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, in quel punto la funzione è anche continua. Il viceversa non vale.

Se una funzione $y = f(x)$ non è derivabile in un punto x_0, possono verificarsi i seguenti tre casi:

- **Flesso a tangente verticale**
  Se i limiti destro e sinistro sono uguali e tendono entrambi a $|\infty|$, si parla di **flesso a tangente verticale**. In particolare:
  - se $f'(x) = +\infty$, allora x_0 è un flesso a tangente verticale *crescente*;
  - se $f'(x) = -\infty$, allora x_0 è un flesso a tangente verticale *decrescente*;
- **Cuspide**
  Se i limiti destro e sinistro sono diversi e tendono rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$, allora si ha una **cuspide**. In particolare:
  - se la derivata sinistra tende a $+\infty$ e la derivata destra tende a $-\infty$, si tratta di una cuspide *rivolta verso l'alto*;
  - se la derivata destra tende a $-\infty$ e la derivata sinistra tende a $+\infty$, si tratta di una cuspide *rivolta verso il basso*;
- **Punto angoloso**
  Se le derivate sinistra e destra sono finite ma diverse tra loro (cioè $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$), il punto x_0 viene denominato **punto angoloso**.



8.4 Funzioni derivate

Finora abbiamo definito la derivata di una funzione in un punto. Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un intervallo chiuso [a; b] possiamo considerare l'insieme di tutte le possibili derivate in questo intervallo come una nuova funzione $f'(x)$ definita in questo intervallo. È questo il concetto di **funzione derivata**.

8.4.1 Funzioni derivate elementari

Esistono delle formule che permettono di calcolare le derivate di alcune funzioni in un punto generico x del dominio senza dover applicare ogni volta la definizione (8.3). Queste formule definiscono le funzioni derivate di alcune funzioni elementari.

- **Derivata della funzione costante**
  La derivata di una funzione costante K è 0: $f'(x) \equiv \dfrac{dK}{dx} = 0$.
- **Derivata della funzione identità**
  La derivata della funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$.
- **Derivata della funzione potenza**
  La derivata di $f(x) = x^{\alpha}$ e $x > 0$, è $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$, dove α è un numero reale.
- **Derivata della funzione radice quadrata**
  Dalla formula precedente si ricava che la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ è $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
- **Derivata della radice n-esima**
  Per $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dobbiamo distinguere due casi:
  - n pari: f è derivabile per tutti i valori positivi di x, quindi $\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$;
  - n dispari: f è derivabile nell'insieme dei numeri reali escluso lo 0: $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
- **Derivata della funzione seno**
  La derivata di $f(x) = \sin x$ è $f'(x) = \cos x$.
- **Derivata della funzione coseno**
  La derivata di $f(x) = \cos x$ è $f'(x) = -\sin x$.
- **Derivata della funzione esponenziale**
  La derivata di $f(x) = a^x$ è $f'(x) = a^x \ln a$. In particolare, quando $a = e$, $\ln e = 1$, per cui $f'(x) = e^x$.
- **Derivata della funzione logaritmica**
  La derivata di $f(x) = \log_a x$ è $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$. In particolare, per $a = e$, cioé $f(x) = \ln x$, si ha $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

8.4.2 Operazioni con le derivate

È possibile definire delle regole che permettono di calcolare le funzioni derivate di funzioni ottenute combinando funzioni elementari.

- **Derivata del prodotto di una costante per una funzione**
La derivata del prodotto di una costante α per una funzione derivabile $f(x)$ è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:
$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x). \tag{8.6}$$

- **Derivata della somma di funzioni**
La derivata della somma algebrica di due o più funzioni derivabili è uguale alla somma algebrica delle derivate delle singole funzioni:
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{8.7}$$

- **Derivata del prodotto di funzioni**
La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale alla somma della derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda non derivata e della derivata della seconda funzione moltiplicata per la prima non derivata:
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{8.8}$$

- **Derivata del quoziente di funzioni**
La derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con funzione divisore non nulla) è uguale ad una frazione che ha per numeratore la differenza fra la derivata del dividendo moltiplicata per il divisore non derivato e il dividendo non derivato moltiplicato per la derivata del divisore e per denominatore il quadrato del divisore:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{8.9}$$

- **Derivata del reciproco di una funzione**
Un caso particolare dell'espressione precedente è quello che esprime la derivata del reciproco di una funzione derivabile come una frazione che ha per numeratore l'opposto della derivata della funzione e per denominatore il quadrato della funzione:
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}. \tag{8.10}$$

- **Derivata della funzione composta**
Se la funzione f è derivabile nel punto x e la funzione g è derivabile nel punto $z = f(x)$, allora la funzione composta $y = g(f(x))$ è derivabile in x e la sua derivata è il prodotto delle derivate di g rispetto a f e di f rispetto a x:
$$[g'(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{8.11}$$
o scritta in altro modo, forse più esplicito,
$$\frac{d}{dx}[g(f(x))] = \frac{dg(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{d[g(f(x))]}{df(x)}\frac{df(x)}{dx} \tag{8.12}$$

- **Derivata della funzione inversa**
Consideriamo una funzione $y = f(x)$ invertibile e consideriamo solo punti in cui sia diversa da zero. Allora la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è derivabile e la sua derivata è:
$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.13}$$

Di particolare interesse è il calcolo delle funzioni trigonometriche inverse. Consideriamo ad esempio la funzione arcoseno $y = f(x) = \arcsin x$, la cui funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \sin y$. Usando l'espressione precedente abbiamo che la derivata è

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{8.14}$$

8.5 Derivate di ordine superiore al primo

Ad una funzione derivabile in un intorno è possible associare una funzione derivata. Tutti i concetti definiti per la funzione f possono essere applicati alla funzione f', e quindi anche il concetto di derivazione in un punto x_0. Se la funzione derivata $f'(x)$ di $f(x)$ è a sua volta derivabile in x_0, allora diciamo che f e **derivabile due volte**. In tal caso si pone

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \left[\frac{d}{dx}\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$$

Più in generale, si dice che f è **derivabile n volte** ($n \geq 2$) in x_0 se f è derivabile $(n-1)$ volte in un intorno del punto x_0 e se la derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0.
In tal caso, si pone

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} = \left[\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right]_{x=x_0}.$$

Ovviamente se le funzioni derivate sono derivabili in un intervallo, le loro derivate formeranno delle funzioni derivate di ordine superiore.

Ad esempio le derivate prima, seconda, terza e quarta di $y = \sin x$ sono:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x.$$

8.6 Polinomi di Taylor

Una delle grandi ambizioni delle applicazioni pratiche della matematica è quella di usare funzioni polinomiali, per la loro semplicità. Approssimare una funzione come fosse un polinomio è quindi estremamente utile. Il concetto di derivata è molto utile a questo scopo.

Consideriamo una funzione reale f derivabile n volte in un intervallo. Definiamo il **polinomio di Taylor** $T_n(f; x = x_0 + h)$ di ordine n, intero e positivo, della funzione f nel punto x attorno a x_0 come

$$\begin{aligned} T_n(f;x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \\ &\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^k \ . \end{aligned}$$

La funzione f può essere espressa in termini del polinomio di Taylor come

$$f(x_0 + h) = T_n(f; x_0 + h) + \frac{\sigma_n(x)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{8.15}$$

dove σ_n è una funzione reale e continua nell'intervallo di definizione di f e tale che $\sigma_n(x_0) = 0$. Il termine aggiuntivo al polinomio di Taylor si chiama **resto di Peano**.

Un altro modo di esprimere il fatto che la descrizione polinomiale di una funzione è una approssimazione è quella di considerare il **resto di Lagrange**

$$f(x_0 + h) = T_{n-1}(f; x_0 + h) + \frac{f^{(n)}(x_0 + ch)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{8.16}$$

con $0 < c < 1$.

8.7 Applicazioni allo studio di funzione

Le derivate sono molto utili per comprendere l'andamento di una funzione. Se $f'(x_0) > 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in x_0, e viceversa se $f(x)$ è strettamente crescente in x_0 allora $f'(x_0) > 0$. Il tutto si inverte nel caso in cui $f'(x_0) < 0$ perché allora $f(x_0)$ è strettamente decrescente, e viceversa.

Se nell'intervallo di definizione la derivata di f si annulla in un punto, allora un quel punto la funzione può avere un massimo o un minimo relativo. Questa è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo in un punto interno ad $[a, b]$.

Consideriamo un un intorno piccolo a piacere di x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

- Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) > 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di *massimo relativo*; in questo caso $f''(x_0) < 0$.
- Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) < 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di *minimo relativo*; in questo caso $f''(x_0) > 0$.
- se il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno, allora x_0 non è un punto estremante ma un *flesso orizzontale*, e si ha $f''(x_0) = 0$.

8.8 Differenziale

Dalla definizione di derivata (8.3) abbiamo che il rapporto incrementale (8.2) può essere espresso come

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad ,$$

dove α è un numero reale tale che tende a zero per $\Delta x \to 0$. Consideriamo il caso in cui $f'(x) \neq 0$, moltiplicando l'espressione precedente per Δx abbiamo che:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \quad .$$

L'incremento di Δy della funzione y è composto da due termini, di cui il primo, detto parte principale, è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto al secondo, infatti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \alpha = 0.$$

Definiamo **differenziale** il prodotto della derivata di y nel punto x per l'incremento dx

$$dy = f'(x)\, dx \quad . \tag{8.17}$$

Per $y = x$ si ha che $dy = dx$ che chiarisce il motivo per scrivere la derivata come

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \quad .$$

Data la definizione di differenziale è possibile dimostrare che la maggior parte delle operazioni che si possono effettuare sulle derivate, ad esempio quelle elencate nella sezione 8.4.2, sono applicabili anche ai differenziali.

8.9 Funzioni a più variabili

In questa sezione considereremo funzioni reali di più variabili reali. Per semplicità considereremo una funzione z dipendente dalle due variabili indipendenti x e y: $z = f(x, y)$. La generalizzazione a funzioni con un numero di variabili superiore a due è immediata.

Definiamo l'incremento parziale di z rispetto a x come

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad . \tag{8.18}$$

Come si vede il valore di y è costante, mentre è cambiato solo quello di x. Analogamente, l'incremento parziale di z rispetto a y è definito come

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad . \tag{8.19}$$

L'incremento totale di z si ottiene modificando tutte le variabili

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad . \tag{8.20}$$

Definiamo una funzione di più variabili continua in (x_0, y_0) se vale la relazione

$$\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \equiv \lim_{\Delta x \to x_0} \lim_{\Delta y \to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad . \tag{8.21}$$

I teoremi sulle funzioni continue ad una variabile possono essere estesi alle funzioni continue di più variabili.

8.9.1 Derivate Parziali

Si chiama **derivata parziale** rispetto alla variabile x della funzione $z = f(x, y)$ il limite del rapporto tra l'incremento parziale $\Delta_x z$ e Δx

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad . \tag{8.22}$$

Analogamente si definisce la **derivata parziale** rispetto alla variabile y della funzione $z = f(x, y)$ il limite del rapporto tra l'incremento parziale $\Delta_y z$ e Δy

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad . \tag{8.23}$$

Come si può osservare la derivata parziale si calcola modificando soltanto una delle variabili indipendenti e mantenendo costanti le altre.

In analogia al caso ad una dimensione, anche in questo caso una funzione può essere derivabile in tutto un dominio delle variabili x e y. In questo caso, le derivate parziali sono funzioni che a loro volta possono essere derivabili. Si definiscono in questo modo le derivate parziali di ordine maggiore al primo. Ad esempio

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad . \tag{8.24}$$

Si definiscono derivate parziali miste

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad , \tag{8.25}$$

che soddisfano il **Teorema di Schwarz** che afferma che le derivate seconde miste sono indipendenti dall'ordine di derivazione, cioè:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \quad . \tag{8.26}$$

Possiamo estendere la discussione fatta nella Sezione 8.8 anche al caso di funzione a più variabili. In questo caso, usando il concetto di incremento totale (8.20), definiamo il differenziale totale come

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad . \tag{8.27}$$

Consideriamo il caso in cui la funzione z dipenda da due variabili u e v che sono, a loro volta, funzioni di x e y

$$z(u,v) = F(u,v) = F(\phi(x,y), \psi(x,y)) \tag{8.28}$$

dove $u = \phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$. Supponiamo che tutte le funzioni coinvolte, F, ϕ e ψ siano continue e lo siano anche le loro derivate parziali. Estendendo i concetti di differenziale al caso a più variabili, e considerando gli incrementi parziali, si ha che

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \tag{8.29}$$

e analogamente

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \quad . \tag{8.30}$$

Utilizzando il concetto di differenziale totale si definisce la **derivata totale** rispetto alla variabile x come:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{8.31}$$

Un esempio utile per comprendere la differenza tra derivate parziali e totali è quello di considerare una funzione f che descrive il moto di un punto materiale in funzione delle coordinate cartesiane x, y, z e del tempo t. Anche le coordinate spaziali dipendono dal tempo, quindi possiamo esprimere la dipendenza funzionale della funzione come $f(t, x(t), y(t), z(t))$. La derivata parziale della funzione rispetto al tempo, $\partial f/\partial t$, congela i valori delle coordinate spaziali e calcola la variazione solo sulla parte esplicitamente dipendente da t. La derivata totale considera la variazione di tutte le variabili rispetto alla variazione del tempo

$$\frac{df(t,x(t),y(t),z(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \quad . \tag{8.32}$$

8.9.2 Derivata direzionale

In questo caso, consideriamo una funzione che dipende da tre variabili. Supponiamo che questa funzione $u(x, y, z)$ sia continua in tutte le tre variabili, nel campo D, e tutte le derivate, rispetto ad ognuna delle variabili, siano a loro volta continue.

Consideriamo un un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da cui tracciamo un vettore $\vec{S}$ i cui coseni direttori sono, rispettivamente $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, come indicato nella figura 8.3. Ci proponiamo di valutare la rapidità della variazione della funzione u quando si passa da P_0 ad un altro punto P posizionato sul vettore $\vec{S}$.

Definiamo $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ la distanza tra i punti P e P_0. Possiamo calcolare la variazione di u rispetto alla direzione del vettore $\vec{S}$ passando da P_0 a P facendo uno sviluppo di Taylor (Sez. 8.6)

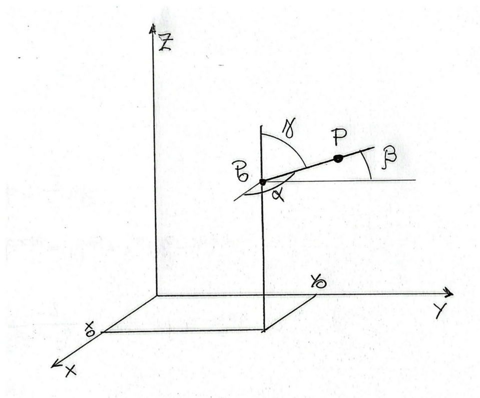


Figura 8.3:

nelle tre direzioni

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) \\
&= u(x_0 + \Delta s \cos\alpha, y_0 + \Delta s + \cos\beta, z_0 + \Delta s \cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0} \Delta s \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y_0} \Delta s \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z_0} \Delta s \cos\gamma + \\
& \quad (\Delta s)^2 (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + \cdots
\end{aligned} \tag{8.33}
$$

dove le derivate parziali sono calcolate nel punto P_0 e i puntini indicano termini di potenze maggiori di Δs. È chiaro che

$$
\Delta x = \Delta s \cos\alpha \quad ; \quad \Delta y = \Delta s \cos\beta \quad ; \quad \Delta z = \Delta s \cos\gamma \quad .
$$

Definiamo la **derivata direzionale** nel punto P_0 lungo la direzione $\vec{S}$ come il limite per $\Delta s \to 0$ di $\Delta u / \Delta s$

$$
\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}\Big|_{P_0} \equiv \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y_0} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z_0} \cos\gamma \tag{8.34}
$$

8.9.3 Gradiente

Nell'espressione (8.34) compaiono i coseni direttori che possono considerarsi come le componenti del versore che individua la direzione del vettore $\vec{S}$

$$
\hat{S} = \hat{\imath} \cos\alpha + \hat{\jmath} \cos\beta + \hat{k} \cos\gamma \quad . \tag{8.35}
$$

La derivata direzionale è una quantità scalare che possiamo pensare come il prodotto scalare tra due vettori, uno di questi è $\hat{S}$ e l'altro vettore è il **gradiente** di u

$$
\vec{\nabla} u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial x} \hat{k} \quad , \tag{8.36}
$$

quindi, nel punto P_0, si ha che

$$
\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{\nabla} u \cdot \hat{S} \tag{8.37}
$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà.

1. La derivata di una funzione in un punto secondo la direzione $\vec{S}$ acquista il suo valore massimo se la direzione di $\vec{S}$ coincide con quella del gradiente di u. Questo valore è uguale a $|\vec{\nabla}u|$.

2. La derivata di una funzione secondo la direzione perpendicolare al vettore $\vec{\nabla}u$ è nulla. In altre parole il vettore gradiente in un punto è sempre ortogonale alla superficie descritta da u.

8.9.4 Operatore nabla, gradiente, divergenza, rotore

Il gradiente di un funzione scalare definito in (8.36) può essere concepito come il risultato dell'applicazione di un operatore $\vec{\nabla}$ ad u. Questo operatore, detto **nabla** probabilmente perché la sua forma ricorda quella di un'antica arpa greca, nabla appunto, è di tipo vettoriale, cioè agisce separatamente nelle tre direzioni e può essere definito dal punto di vista operativo come

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{k} \quad . \tag{8.38}$$

Abbiamo già visto che applicato ad uno scalare produce il vettore gradiente.
Applicando l'operatore $\vec{\nabla}$ ad una funzione vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ possiamo avere due risultati.

1. Considerando l'azione di $\vec{\nabla}$ in termini di prodotto scalare tra vettori abbiamo uno scalare detto **divergenza** di $\vec{v}$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} =\equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \tag{8.39}$$

2. Considerando l'azione di $\vec{\nabla}$ in termini di prodotto vettoriale tra vettori abbiamo uno vettore detto **rotore** di $\vec{v}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad . \tag{8.40}$$

Nelle precedenti espressioni $v_{x,y,x}$ indicano le componenti della funzione vettoriale rispetto alle direzioni cartesiane.

Capitolo 9

INTEGRALI

(con il contributo di Chiara Astore, Massimiliano Cosmani, Andrea Ingrosso)

Il calcolo integrale nasce dall'esigenza di stimare il valore di quantità legate a fenomeni continui: l'area sottesa da una curva, la massa di un corpo con densità variabile, il lavoro compiuto da una forza non costante, il volume di un solido. L'integrale serve a sommare infinite quantità molto piccole.

9.1 Definizione (secondo Riemann)

In questa sezione considereremo sempre funzioni reali di una sola variabile reale definite in un intervallo $I = [a, b]$. Supponiamo, inoltre, che, in questo intervallo, le funzioni siano continue e infinitamente derivabili.

Definiamo **trapezoide** la figura piana delimitata dal grafico di $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, Fig. 9.1. Il calcolo di quest'area è affrontato approssimando il trapezoide mediante una

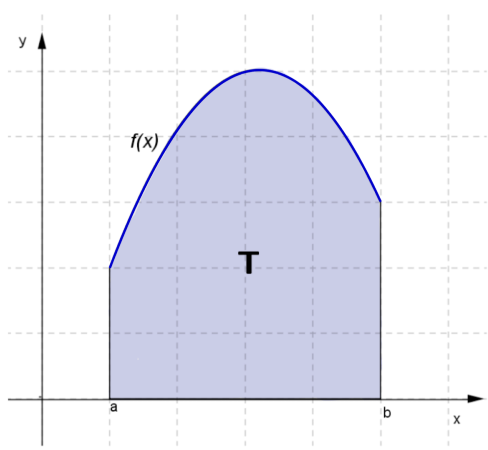


Figura 9.1: Trapezoide

suddivisione in rettangoli scelti opportunamente. Sommando le aree di tali rettangoli (ciascuna calcolata come A_{rett}= base · altezza) otteniamo un'approssimazione dell'area complessiva desiderata. Per fare ciò dividiamo il dominio della funzione in n intervalli di ampiezza Δx (base dei rettangoli). Definiamo m_i e M_i, rispettivamente il minimo e il massimo dei valori della funzione nell'$i-esimo$ intervallo. Tracciando dei rettangoli, in corrispondenza di ogni intervallo, con le altezze uguali al rispettivo minimo m_i, otteniamo la somma inferiore (come rappresentato nella parte sinistra della Figura 9.2), che possiamo considerare come un'approssimazione per difetto dell'area cercata.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x \quad .$$

Se invece tracciamo dei rettangoli con altezze pari ai rispettivi valori massimi M_i, otteniamo la som-

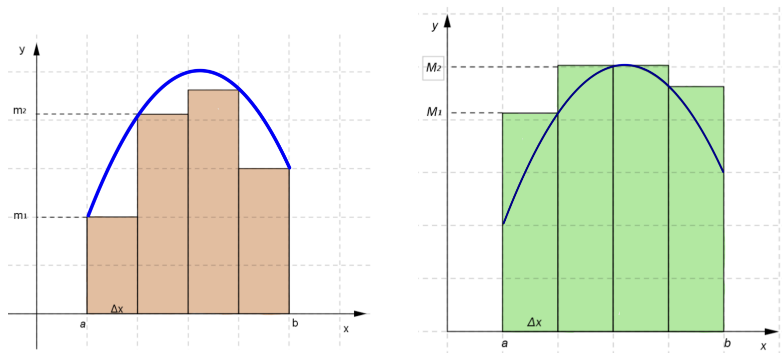


Figura 9.2: Somma inferiore (a sinistra) e superiore (a destra).

ma superiore (come rappresentato nella parte destra della Figura 9.2), che possiamo considerare come un'approssimazione per eccesso.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x \quad .$$

È evidente che:

- l'area del trapezoide è compresa tra la somma superiore e la somma inferiore:

$$s_n \leq A_{\text{trap}} \leq S_n$$

- se diminuiamo la base Δx degli intervalli, e quindi aumentiamo il loro numero n, diminuisce la differenza tra le due somme

Quindi, nel limite per $n \to +\infty$ e $\Delta x \to 0$, le due somme si avvicinano sempre più ad A_{trap}, valore esatto dell'area.

Se $f(x)$ è una funzione reale definita nell'intervallo $[a, b]$ e se

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n \neq \pm\infty,$$

allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann e il limite sopra indicato è il valore dell'integrale di f nell'intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n \quad , \tag{9.1}$$

con a estremo inferiore, b estremo superiore, $f(x)$ funzione integranda, x variabile d'integrazione.

Una proprietà delle funzioni continue è che se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Notiamo che:

- se $f(x) > 0$ in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = A_{\text{trap}} \quad ,$$

- se $f(x)$ cambia segno in $[a, b]$ (parte sinistra della figura 9.3),

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{area}(T_1) - \text{area}(T_2) \quad ,$$

  può essere negativo, nullo o positivo;

- se $f(x) < 0$ in $[a, b]$ (parte destra della figura 9.3),

$$\int_a^b f(x)\, dx = -|A_{\text{trap}}| < 0 \quad .$$

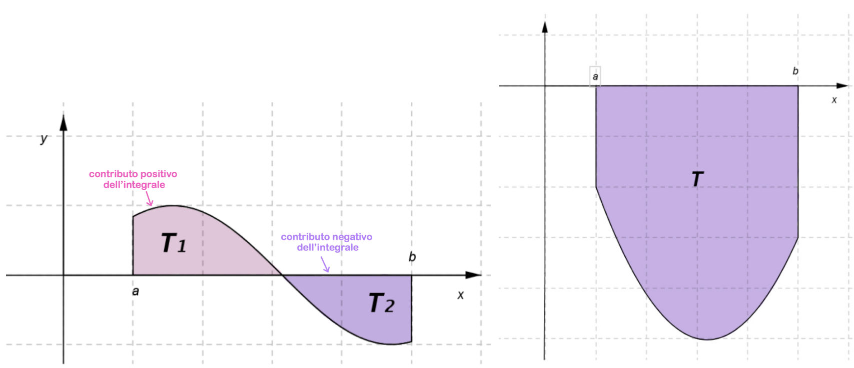


Figura 9.3: A sinistra $f(x)$ cambia segno, a destra $f(x)$ è negativa.

Alcune osservazioni importanti riguardanti l'uso degli integrali in fisica.

1. L'integrale è un numero.

2. Il valore dell'integrale dipende solo dagli estremi di integrazione, ma non dipende più dalla variabile di integrazione.

3. Le dimensioni dell'integrale sono quelle della funzione integranda moltiplicate da quelle della variabile di integrazione. Ad esempio, se si integra una funzione velocità, (lunghezza diviso tempo) rispetto al tempo si ha una lunghezza. Infatti, la velocità per il tempo è uguale allo spazio spazio percorso.

9.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, possiamo considerare il valore dell'area del trapezoide sottesa tra a e un punto generico x' dell'intervallo di integrazione come una funzione, continua, di x'

$$\int_a^{x'} f(x)dx = \mathcal{F}(a, x') \ .$$

Ogni area infinitesima che forma $\mathcal{F}(a, x)$ può considerarsi come un differenziale della funzione $\mathcal{F}(a, x)$, vedi sez. 8.8, e dipende solo dal punto x in cui è calcolata: $dF(x) = f(x)dx$. Invertendo formalmente questa relazione abbiamo

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \equiv F'(x) \ .$$

Questo indica che il calcolo di un integrale può essere pensato come la ricerca di una funzione la cui derivata sia la funzione integranda. Una funzione F si dice **primitiva** di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ se, per ogni punto x dell'intervallo, la sua derivata è uguale a $f(x)$. In letteratura, si trova spesso presentato un **integrale indefinito** come operazione inversa a quella di derivazione.

Se F è una primitiva di f in un intervallo $[a, b]$ il **teorema fondamentale del calcolo integrale** afferma che

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b \equiv [F(x)]_a^b \ , \tag{9.2}$$

dove le ultime due espressioni sono due diverse modalità per rappresentare la differenza tra i valori di F calcolati agli estremi di integrazione.

9.3 Proprietà dell'integrale

Consideriamo $f(x)$ e $g(x)$, due funzioni reali e continue nell'intervallo $[a, b]$, e un punto qualsiasi c che appartiene all'intervallo. L'integrale gode delle seguenti proprietà:

- se $a = b$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$;
- $\displaystyle\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx$, dove α e β sono due numeri reali.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;
- se $f(x) = f(-x)$, funzione pari, allora $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (Figura 9.4);
- se $f(x) = -f(-x)$, funzione dispari, allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (Figura 9.5);
- se nell'intervallo $[a, b]$ per ogni x si ha che $g(x) \geq f(x)$, allora $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$.

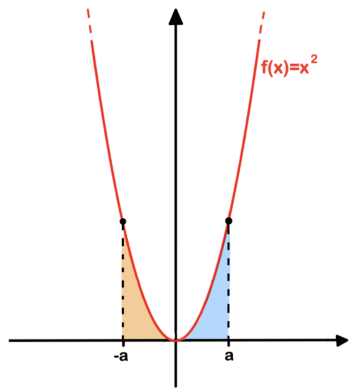


Figura 9.4: Integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine

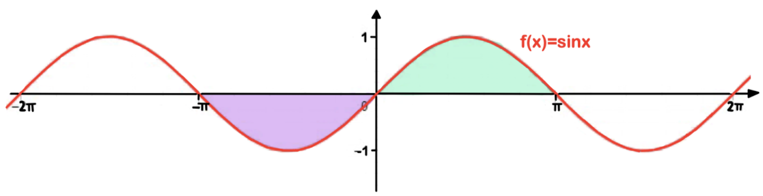


Figura 9.5: Integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine

Inoltre, utilizzando le proprietà del differenziale dx (vedi 8.8), se

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_a^b f(ax)dx &= \frac{1}{a}F(ax)\Big|_a^b \ ,\\ \int_a^b f(x+b)dx &= F(x+b)\Big|_a^b \ ,\\ \int_a^b f(ax+b)dx &= \frac{1}{a}F(ax+b)\Big|_a^b \ .\end{aligned}$$

Presentiamo di seguito due metodi molto usati per il calcolo degli integrali.

- **Integrazione per sostituzione**
  Date una funzione f continua in $[a, b]$ e una funzione g con immagine continua in $[a, b]$, e derivabile e con derivata continua risulta che:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(g(t))g'(t)dt \ .$$

  dove $a = g(A)$ e $b = g(B)$, o indicando con g^{-1} la funzione inversa di g, $A = g^{-1}(a)$ e $B = g^{-1}(b)$.
  Per effettuare questo calcolo

1. si pone $x = g(t)$ quindi $dx = \dfrac{dg(t)}{dt}dt \equiv g'(t)dt$;
2. si riscrive e si calcola l'integrale in termini di t.

Con questo metodo ricaviamo la formula per gli integrali di funzioni composte:

$$\int_a^b f'(x)\, g'(f(x))\, dx = g(f(x))\Big|_a^b \quad ,$$

in quanto:

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dg(f)}{df}\frac{df}{dx} \quad .$$

- **Integrazione per parti**
  Siano f e g due funzioni derivabili e con derivata continua nell'intervallo $[a, b]$. Poiché il differenziale del prodotto di f e g è
  $$d(f\, g) = f\, d(g) + g\, d(f) \quad ,$$
  abbiamo
  $$f\, g\Big|_a^b = \int_a^b d(f\, g) = \int_a^b f\, d(g) + \int_a^b g\, d(f) \quad ,$$
  quindi
  $$\int_a^b f\, d(g) = f\, g\Big|_a^b - \int_a^b g\, d(f) \quad ,$$
  più esplicitamente
  $$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx \quad .$$

Nella Tabella 9.1 posta alla fine di questo capitolo presentiamo le espressioni di alcuni integrali elementari che si ottengono direttamente confrontando le espressioni delle derivate di funzioni elementari.

9.4 Integrali impropri

Finora abbiamo considerato integrali definiti su intervalli di integrazione limitati in cui le funzioni sono limitate. È possibile estendere l'idea di integrale anche ai casi in cui l'intervallo di integrazione è infinito e anche al caso in cui la funzione non sia limitata. Per affrontare questi casi si introduce il concetto di ***integrale improprio***.

1. **Funzione illimitata in un punto**
   Consideriamo un funzione $f(x)$ che tende a $\pm\infty$ da sinistra, o, analogamente che tende a $\pm\infty$ da destra, dove quindi $x = b$ è un asintoto verticale, cioè tale che:
   $$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \lim_{x\to b^+} f(x) = \pm\infty \quad .$$
   Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x - 4)$, allora abbiamo che il limite da sinistra è
   $$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty \quad ,$$

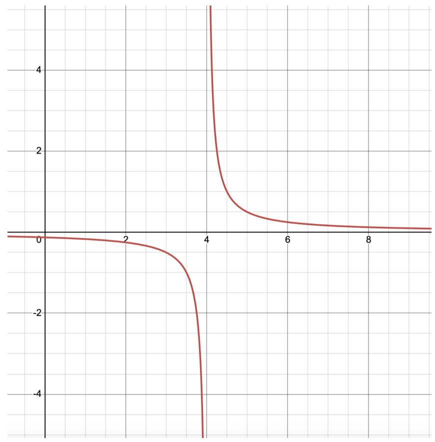


Figura 9.6: $x = b = 4$ è un asintoto verticale.

mentre il limite da destra è

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty \quad ,$$

Definiamo l'integrale improprio come:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \quad . \tag{9.3}$$

- Se il limite esiste finito, allora si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ e che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.
- Se il limite è $\pm\infty$ l'integrale si dice divergente.

2. **Intervallo di integrazione illimitato**
   Ora vogliamo integrare la funzione f su intervallo illimitato e allo stesso modo scriviamo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

- Se il limite esiste finito, allora si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ e che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.
- Se il limite è $\pm\infty$ l'integrale si dice divergente.

Lo stesso vale per:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

Inoltre vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

dove c è un punto arbitrariamente scelto.

9.5 Integrali a più dimensioni

Il concetto di integrale a una dimensione è stato presentato nella sezione 9.1 e permette di calcolare l'area sottesa tra il grafico di una funzione di unica variabile e l'asse delle ascisse. È possibile estendere questa idea a funzioni di più variabili reali e considerare quindi l'integrale a più variabili come la misura dell'ipervolume sotteso dalla funzione nello spazio a più dimensioni.

9.5.1 Integrale doppio

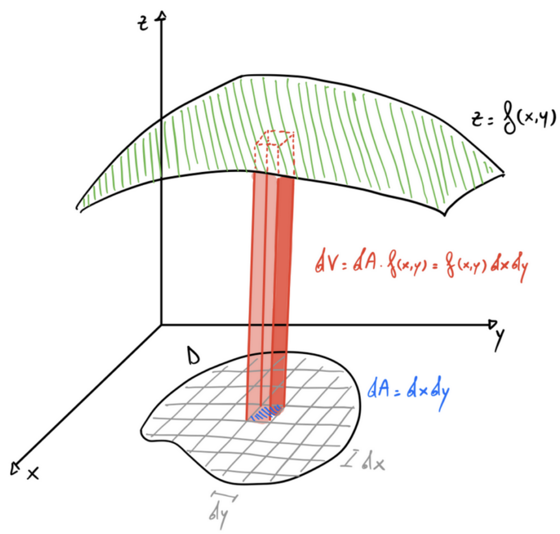


Figura 9.7: Elemento della somma integrale.

Consideriamo nel piano reale x, y un insieme D limitato da una curva chiusa, e una funzione $z \equiv f(x, y)$ che per ogni valore di x e y appartenenti a questo insieme produce un numero reale z. Dividiamo l'insieme D in piccoli insiemi $dA_i = dx_i dy_i$. Scegliamo, all'interno di ogni dA_i un punto P_i arbitrario. Siano $f(P_1), f(P_2), \cdots$ i valori della funzione in questi punti. Scriviamo la somma dei prodotti $f(P_i)dA_i$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)dA_i \quad , \tag{9.4}$$

che definiamo come **somma integrale**. Se $f \geq 0$ nell'insieme D, ogni termine della somma può essere rappresentato come il volume di un cilindro elementare di base dA_i e di altezza $f(P_i)$. Consideriamo una successione arbitraria di somme integrali formate dalla funzione $f(x, y)$ definita sull'insieme D cambiando arbitrariamente il numero e le dimensioni di dA_i:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \cdots, V_{n_k}, \cdots \quad . \tag{9.5}$$

Se la funzione $f(x, y)$ è continua nell'insieme D, la successione (9.5) delle somme integrali (9.4) ha un limite quando dA_i tende a zero e n_k tende all'infinito. Questo limite è sempre lo stesso qualsiasi sia la successione (9.5), cioè non dipende né dal modo di suddividere D né dalla scelta del punto P_i in dA_i. Questo limite è l'**integrale doppio** della funzione $f(x, y)$ sul dominio D

$$\lim_{dA_i \to 0} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)dA_i = \int_D f(x, y)dA = \iint_D f(x, y)dxdy \quad . \tag{9.6}$$

Analogamente a quanto indicato nella Sezione 9.1 per l'integrale ad una dimensione, è possibile dimostrare le seguenti proprietà anche per l'integrale a due dimensioni. Consideriamo $f(x, y)$ e $g(x, y)$, due funzioni continue sull'insieme D, allora

$$\int_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \int_D f(x,y)dA + \int_D g(x,y)dA \quad .$$

Se α è una costante

$$\int_D \alpha f(x,y)dA = \alpha \int_D f(x,y)dA \quad .$$

Se D_1 e D_2 sono due insiemi che non hanno punti in comune e $D_1 + D_2 = D$

$$\int_D f(x,y)dA = \int_{D_1} f(x,y)dA + \int_{D_2} f(x,y)dA$$

9.5.2 Integrale triplo

Quanto fatto per l'integrale doppio può essere esteso ad un integrale triplo sostituendo l'insieme D a due dimensioni suddiviso in piccole aree dA_i con un insieme S e tre dimensioni suddiviso in piccoli volumi dv_i. Anche in questo caso è possibile definire delle forme integrali e per funzioni continue delle tre coordinate x, y e z si ha che l'**integrale triplo** può essere definito come

$$\lim_{dA_i \to 0} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(P_i) dv_i = \int_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(x,y,z)dxdydz \quad . \tag{9.7}$$

Le proprietà riguardanti la somma di due funzioni continue, la moltiplicazione per una costante e l'integrale su un insieme somma di due insiemi sono valide anche nel caso di integrali a tre dimensioni.

9.5.3 Integrazione diretta

Gli integrali a più dimensioni sono calcolati facendo integrazioni indipendenti su ognuna delle variabili mantenendo le altre variabili costanti. Ad esempio, nel caso a due dimensioni si integra indipendentemente su x e su y, o viceversa, integrando prima su una delle due variabili, usando l'altra come se fosse una costante e successivamente si integra sull'altra.

Questo metodo funziona bene se la funzione a due variabili è espressa in termini di funzioni elementari ed i domini di integrazione sono ben definiti da curve chiuse definite da funzioni continue rispetto a una sola variabile. A questo punto gli integrali a più dimensioni possono essere ricondotti ad una sequenza degli integrali fondamentali, tipo quelli della Tabella 9.1.

9.5.4 Integrazione con sostituzione di variabile

Spesso, il dominio di integrazione non è delimitato da funzioni continue oppure è composto da più parti che non possono essere separate per essere integrate. In questi casi risulta conveniente modificare le variabili di integrazione in modo da poter esprimere la funzione integranda, e i limiti di integrazione, in modo da semplificare il calcolo dell'integrale.

Consideriamo per sempicità il caso bidimensionale in cui la funzione da integrare $f(x, y)$ è continua e derivabile nel campo D del piano x, y limitato da una linea L. Supponiamo che le variabili x e y siano funzioni di due nuove variabili u e v

$$x = \phi(u,v) \quad \text{e} \quad y = \psi(u,v), \tag{9.8}$$

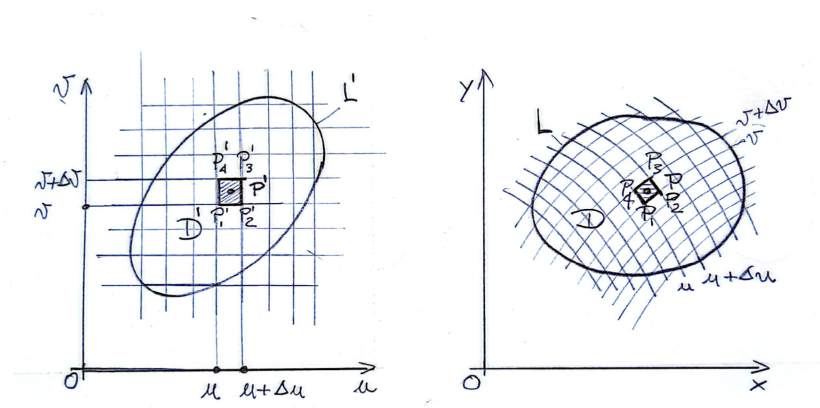


Figura 9.8:

dove le funzioni ϕ e ψ sono monodrome, continue e hanno derivate continue in un certo campo reale D', Fig. 9.8. Per queste proprietà, ad ogni coppia di valori di x e y corrisponde una sola coppia di valori di u e v.

Consideriamo nel campo D' una retta con $u =$ costante. A questa retta corrisponde in D una curva nel piano x, y. Analogamente per le rette definite in D' da $v=$ costante. Dividiamo il campo D' in rettangoli definiti da rette $u =$ costante e $v =$ costante. Escludiamo i rettangoli che intersecano il contorno L'. Anche il campo D sarà diviso in una rete di quadrilateri curvilinei ognuno dei quali ha un corrispondente quadrilatero in D'. Consideriamo in D' un rettangolo di area $\Delta s'$ limitato dalle rette $u =$ cost, $u + \Delta u$ = cost, $v=$ cost e $v + \Delta v' =$ cost, e il quadrilatero corrispondente in D di area Δs. In generale si ha che

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v \neq \Delta s \quad .$$

Calcoliamo quanto vale $\Delta s'$ ovvero l'area del quadrilatero curvilineo in funzione delle variabili u e v. Chiamiamo P_1, P_2, P_3, P_4 i quattro vertici che delimitano il quadrilatero curvilineo, punti definiti come

$$\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1)\ ; & x_1 = \phi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2)\ ; & x_2 = \phi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3)\ ; & x_3 = \phi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_3, y_4)\ ; & x_4 = \phi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{array}$$

Per calcolare Δs supponiamo che Δu e Δv siano sufficientemente piccoli da poter ben approssimare gli archi che limitano D con dei segmenti di retta. Sostituiamo gli incrementi delle funzioni ϕ e ψ con i loro differenziali. Questo significa trascurare infinitesimi d'ordine superiore rispetto a Δu e Δv. Abbiamo quindi che

$$\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1)\ ; & x_1 = \phi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2)\ ; & x_2 = \phi(u, v) + \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\Delta u, & y_2 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u, \\ P_3(x_3, y_3)\ ; & x_3 = \phi(u, v) + \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v, & y_3 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \\ P_4(x_3, y_4)\ ; & x_4 = \phi(u, v) + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v, & y_4 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v. \end{array}$$

Con queste ipotesi ΔS può essere considerato un parallelogramma, quindi la sua area è doppia rispetto a quella del triangolo P_1, P_2, P_3, area che si calcola applicando l'espressione della geometria analitica

$$\begin{aligned}
\Delta s &\simeq |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| \\
&= \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \right) \right| \\
&= \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v \equiv |\mathbf{J}| \ \Delta v \Delta u \ ,
\end{aligned}$$

dove il doppio tratto significa che bisogna calcolare il valore assoluto del determinante che abbiamo indicato con $\mathbf{J}$ ed è chiamato **jacobiano**. Quindi abbiamo che

$$\Delta s \simeq |\mathbf{J}|\Delta s' \ . \tag{9.9}$$

Questa uguaglianza è approssimata perché nel calcolo abbiamo trascurato infinitesimi superiori al primo. D'altra parte esiste un'uguaglianza esatta nel limite in cui Δs e $\Delta s'$ tendono a zero

$$|\mathbf{J}| = \lim_{\Delta s \to 0} \lim_{\Delta s' \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'} \tag{9.10}$$

Supponiamo che nel campo D sia data una funzione $z = f(x, y)$ a cui corrisponde uno stesso valore della funzione $z = F(u, v)$ nel campo D',

$$z = F(u, v) = f[\phi(u, v), \psi(u, v)] \ . \tag{9.11}$$

Moltiplicando per Δs abbiamo che

$$z\Delta s = f[\phi(u, v), \psi(u, v)]\Delta s = F(u, v)\Delta s \simeq F(u, v)|\mathbf{J}|\Delta s' \ ,$$

e ovviamente sommando su tutte le parti in cui D e D' sono suddivisi

$$\sum f(x, y)\Delta s \simeq \sum F(u, v)|\mathbf{J}|\Delta s' \ .$$

Passando al limite $\Delta s' \to 0$ abbiamo un'uguaglianza esatta

$$\int\int_D f(x, y) \ dxdy = \int\int_{D'} F(u, v)|\mathbf{J}| \ dvdu \ . \tag{9.12}$$

Quanto ottenuto per due dimensioni può essere generalizzato. Il cambio di coordinate richiede la ridefinizione del campo di integrazione e il calcolo del valore assoluto del determinante Jacobiano che è formato da tutte le derivate parziali delle funzioni rispetto alle variabili indipendenti. Per una funzione a n variabili $F[f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)]$ abbiamo

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \ . \tag{9.13}$$

Consideriamo qui sotto casi di trasformazioni di coordinate spesso utilizzati

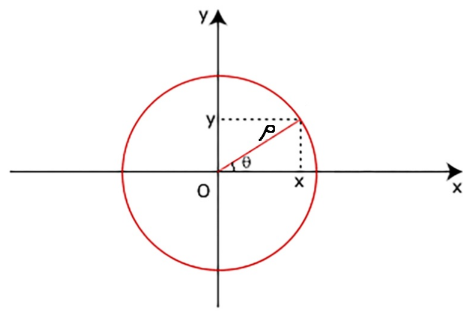


Figura 9.9: coordinate polari

- **Coordinate polari**
  La figura 9.9 mostra che la relazione tra coordinate cartesiane e polari è

$$x = \rho\cos\theta \quad ; \quad y = \rho\sin\theta \ .$$

Il determinante Jacobiano è

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

Quindi considerando due funzioni tali che $z = f(x,y) = F(\rho,\theta)$ possiamo eguagliare i due integrali

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{D'} F(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho d\theta \ .$$

Per definizione delle coordinate polari, sezione 3.1.2, risulta $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \rho$.

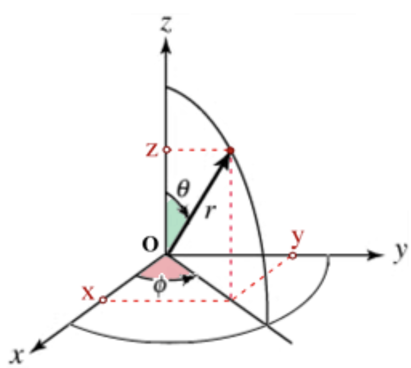


Figura 9.10: Coordinate Sferiche

- **Coordinate sferiche**

Dalla figura 9.10 risulta che le relazioni tra le tre coordinate cartesiane x, y e z e le coordinate sferiche ρ, θ e ϕ sono

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e $0 \leq \rho$. Lo jacobiano è

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\theta$$

Consideriamo due funzioni tali che $w = f(x, y, z) = F(\rho, \theta, \phi)$, ricordando dalla (9.12) che bisogna inserire il valore assoluto dello jacobiano, possiamo eguagliare i due integrali

$$\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{D'} F(\rho, \theta, \phi)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\phi \ \ .$$

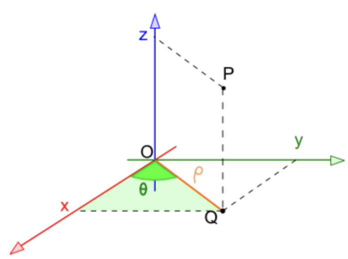


Figura 9.11: Coordinate Cilindriche

- **Coordinate Cilindriche**

Dalla figura 9.11 le relazioni tra le tre coordinate cartesiane x, y, z e le tre coordinate cilindriche sono

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Lo jacobiano è

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos\theta)^2 + \rho(\sin\theta)^2 = \rho$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0 \leq \rho$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

Consideriamo due funzioni tali che $w = f(x, y, z) = F(\rho, \theta, z)$, possiamo eguagliare i due integrali

$$\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{D'} F(\rho, \theta, z)\, \rho\, d\rho d\theta dz \ \ .$$

9.6 Integrali curvilinei, o di linea, e di superficie

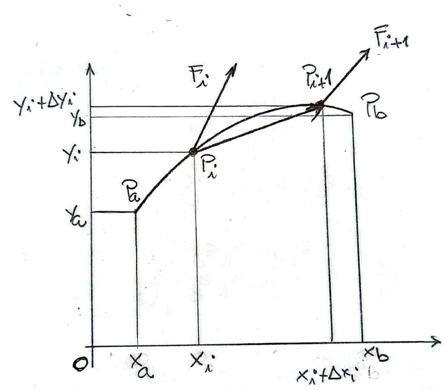


Figura 9.12:

9.6.1 Integrali di linea

Consideriamo una funzione vettoriale reale $\vec{F}$ definita nel piano x, y

$$\vec{F}(x,y) = X(x,y)\,\hat{\imath} + Y(x,y)\,\hat{\jmath} \quad ,$$

dove X e Y sono, rispettivamente le proiezioni di $\vec{F}$ sull'asse x e sull'asse y. Vogliamo calcolare l'integrale di questa funzione vettoriale quando si sposta da un punto P_a ad un punto P_b su una curva orientata L definita nel piano (si veda la figura 9.12). Questo è il tipico problema del calcolo del lavoro svolto da una forza che agisce su un punto materiale che forma una traiettoria nel piano.

Spezziamo la curva in molti punti e chiamiamo $\Delta\vec{s}_i$ il vettore che unisce il punto P_i al punto P_{i+1}. Usando le coordinate cartesiane abbiamo che

$$\Delta\vec{s}_i = \Delta x_i\,\hat{\imath} + \Delta y_i\,\hat{\jmath} \quad ,$$

quindi

$$\vec{F}(x,y)\Delta\vec{s}_i = X(x,y)\Delta x_i\hat{\imath} + Y(x,y)\Delta y_i\hat{\jmath} \quad .$$

Consideriamo la somma di tutti i contributi ottenuti dividendo la curva in n parti

$$A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x,y)\Delta\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[X(x,y)\Delta x_i\hat{\imath} + Y(x,y)\Delta y_i\hat{\jmath}\right] \quad .$$

Facendo il limite per $n \to \infty$ e quindi $\vec{s}_i \to 0$ ottengo l'**integrale di linea**

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\delta x_i \to 0} \lim_{\delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[X(x,y)\Delta x_i\hat{\imath} + Y(x,y)\Delta y_i\hat{\jmath}\right] \\ &\equiv \int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{S} = \int_L \left[X(x,y)dx\,\hat{\imath} + Y(x,y)dy\,\hat{\jmath}\right] \end{aligned} \tag{9.14}$$

Bisogna considerare che l'integrale è definito considerando il verso dell'integrazione. Nel nostro caso il verso è dal punto P_a al punto P_b. Se il verso si inverte, si invertono anche i limiti di integrazione e cambia il segno dell'integrale.

Se la curva è chiusa l'integrale viene indicato con il simbolo

$$\oint_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{S} \tag{9.15}$$

e definito come **circuitazione**. L'integrale su un percorso chiuso è normalmente considerato utilizzando il senso antiorario. Il caso contrario viene esplicitamente specificato.

Se la curva si sviluppa nello spazio tutto quanto presentato si generalizza a tre dimensioni e si definisce quindi l'integrale di linea come

$$I \equiv \int_L \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \int_L \left[X(x, y, z) dx\, \hat{\imath} + Y(x, y, z) dy\, \hat{\jmath} + Z(x, y, z) dz\, \hat{k} \right] \tag{9.16}$$

9.6.2 Integrali di superficie

Le idee della sezione precedente possono essere generalizzate per definire integrali di superficie. Consideriamo una superficie D in uno spazio a tre dimensioni. Questa superficie è limitata da una linea spaziale chiusa L. In ogni punto della superficie è definito un campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\, \hat{\imath} + Y(x, y, z)\, \hat{\jmath} + Z(x, y, z)\, \hat{k} \quad ,$$

dove X, Y e Z sono funzioni reali e continue.

Dividiamo D in aree ΔD_i. In ognuna di queste aree prendiamo un punto arbitrario P_i e consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(P_i) \cdot \hat{n}(P_i)\, \Delta D_i \quad ,$$

dove $\vec{F}(P_i)$ è il valore di $\vec{F}$ nel punto P_i e $\hat{n}(P_i)$ è un vettore di modulo unitario ortogonale alla superficie D nel punto P_i. Definiamo l'**integrale di superficie**

$$\int_D = \vec{F} \cdot \hat{n}\, dD_i \equiv \lim_{n \to \infty} \lim_{\Delta D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(P_i) \cdot \hat{n}(P_i)\, \Delta D_i \quad . \tag{9.17}$$

9.6.3 Alcuni teoremi utili

Presentiamo qui alcuni teoremi che collegano integrali doppi (9.6) e tripli (9.7) agli integrali di linea e di superficie.

Consideriamo nel piano x, y un campo D delimitato da un contorno chiuso L. In questo campo sono definite due funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ continue e dotate di derivate parziali continue. Il **teorema di Green** afferma che

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = \int_L \left[X(x, y) dx\, \hat{\imath} + Y(x, y) dy\, \hat{\jmath} \right] \quad . \tag{9.18}$$

L'integrale bidimensionale delle derivate parziali di X e Y è uguale all'integrale di linea sul contorno chiuso L che limita il campo D, considerando il senso antiorario di integrazione.

Consideriamo ora un campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$ in uno spazio a tre dimensioni. Le sue proiezioni sugli assi cartesiani sono $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ e $Z(x, y, z)$. Consideriamo una superficie D nello spazio in cui $\vec{F}$ è continua e lo sono anche le sue derivate parziali. Questa superficie è limitata da una linea chiusa $L(x, y, z)$ che si sviluppa nello spazio a tre dimensioni. Il **teorema del rotore**, che di fatto è una generalizzazione del teorema di Green afferma che

$$\int \int_D \hat{n} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) \right) dxdydz = \int_L \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} \quad , \tag{9.19}$$

dove in ogni punto della superficie D il versore $\hat{n}$ è orientato ortogonalmente al piano tangente la superficie.

Consideriamo un volume V nello spazio a tre dimensioni delimitato da una superficie chiusa D. In ogni punto di questo volume il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$ è continuo e lo sono anche le sue derivate parziali. Il **teorema della divergenza** o **teorema di Gauss** afferma che

$$\int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \int_D \vec{F} \cdot \hat{n} \, dD_i \quad . \tag{9.20}$$

9.7 Tabella integrali fondamentali

Integrali fondamentali
$\displaystyle\int_a^b x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_a^b, \quad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$
$\displaystyle\int_a^b x^{-1} dx = \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \sin x \, dx = -\cos x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \cos x \, dx = \sin x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}\Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b e^x \, dx = e^x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x \Big\vert_a^b$
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x \Big\vert_a^b$

Tabella 9.1: Alcune espressioni integrali fondamentali

Indice analitico