Decadimento α

Il decadimento radioattivo α avviene spontaneamente quando il Q valore della reazione

$$M(A,Z) \to M(A-4, Z-2) + M(4,2)$$

è positivo.

Empiricamente la zona di emissione α risulta essere quella dei nuclei con $Z \geq 83$, anche se si conoscono alcuni nuclei che decadono α pur avendo un valore di Z più basso.

Un altro dato empiricamente rilevante è il fatto che ogni specie radioattiva α emette uno o più gruppi di particelle α aventi tutte la stessa energia. In altre parole gli spettri energetici delle particelle α sono discreti.

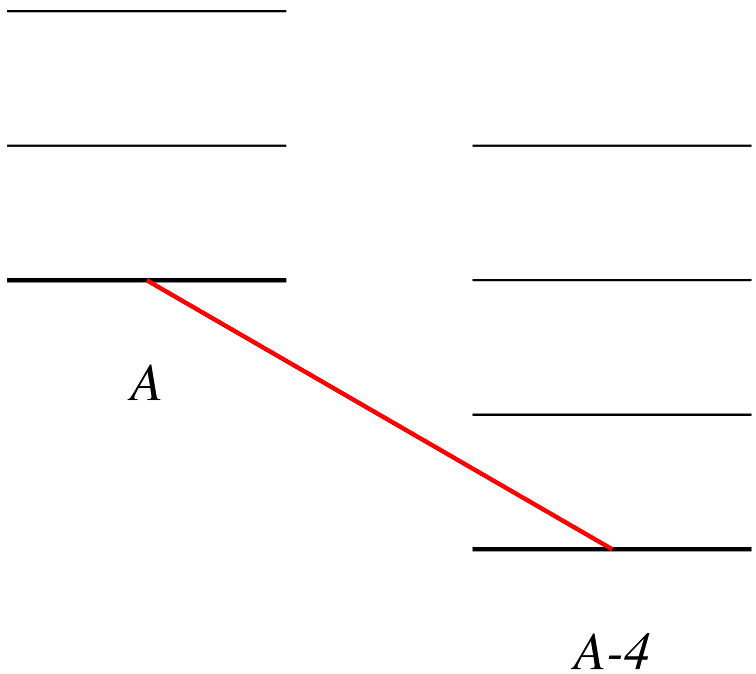
$$M = M_1 + M_2 + T_1 + T_2 \ \ ; \ \ M - M_1 - M_2 = T_1 + T_2$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \ \ ; \ \ \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

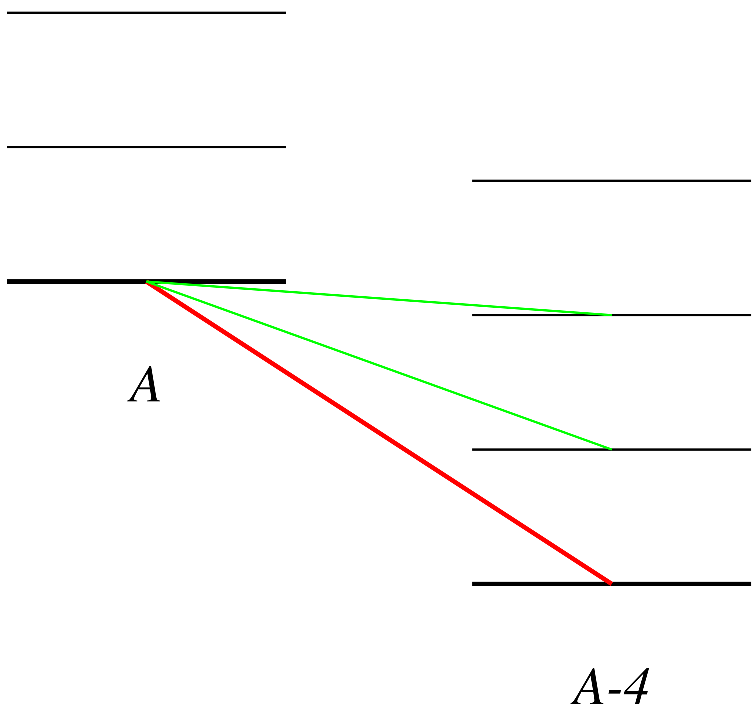
$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_2} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2}\left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right] = M - M_1 - M_2$$

Si osservano spettri di tre tipi.

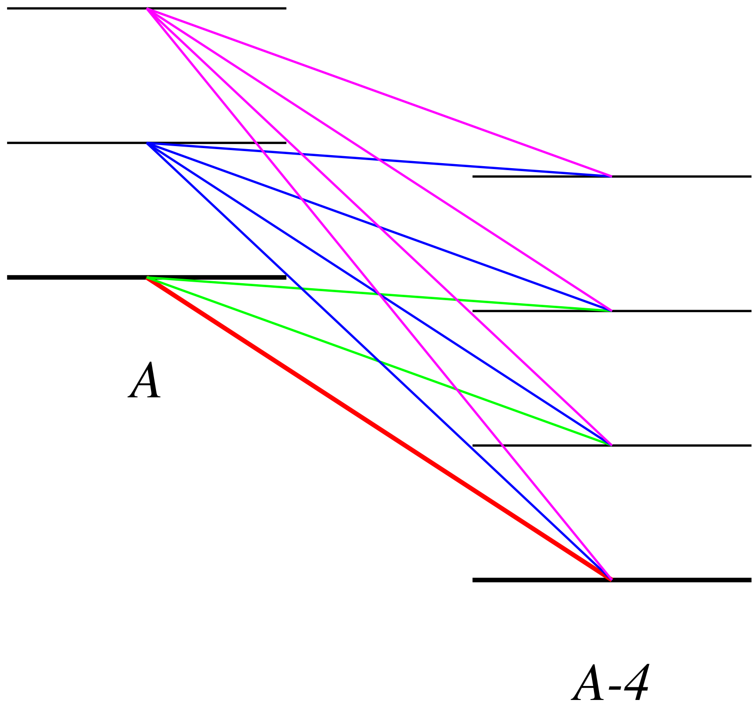
1) Spettri con una sola riga di emissione.

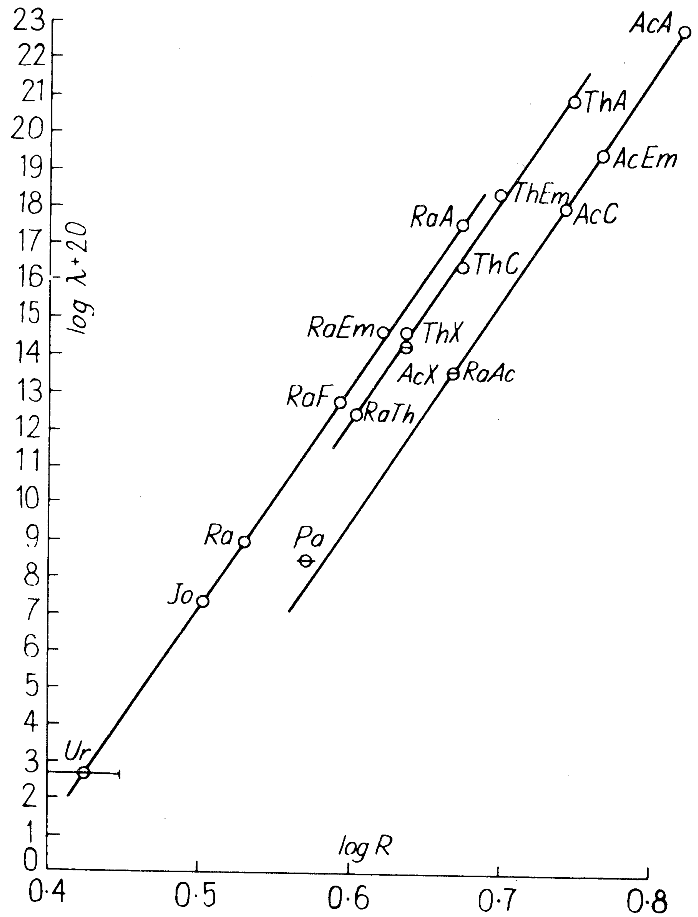


2) Spettri con più righe la cui riga più intensa è quella con energia massima.



3) Spettri in cui alle righe tipiche dei casi precedenti, si aggiungono gruppi di righe di particelle α di energia più elevata ma poco intensi.





La legge di Geiger e Nuttal (1911)

$$\log \lambda = B \log R_\alpha - C.$$

λ costante di decadimento
R_α percorso in aria (15^o, 1 atmosfera) ; B e C costanti

Descrizione del processo di emissione α

Costante di decadimento

$$\lambda = f\,\nu\,P$$

f frazione di tempo in cui nel nucleo esiste α
ν frequenza dei tentativi di emissione
P probabilità di emissione (per ogni tentativo)

Schema del potenziale visto dalla particella α

R - raggio del nucleo

Z - numero di protoni del nucleo figlio (Z+2 quelli del nucleo genitore)

z - protoni della particella emessa (z=2 nel nostro caso)

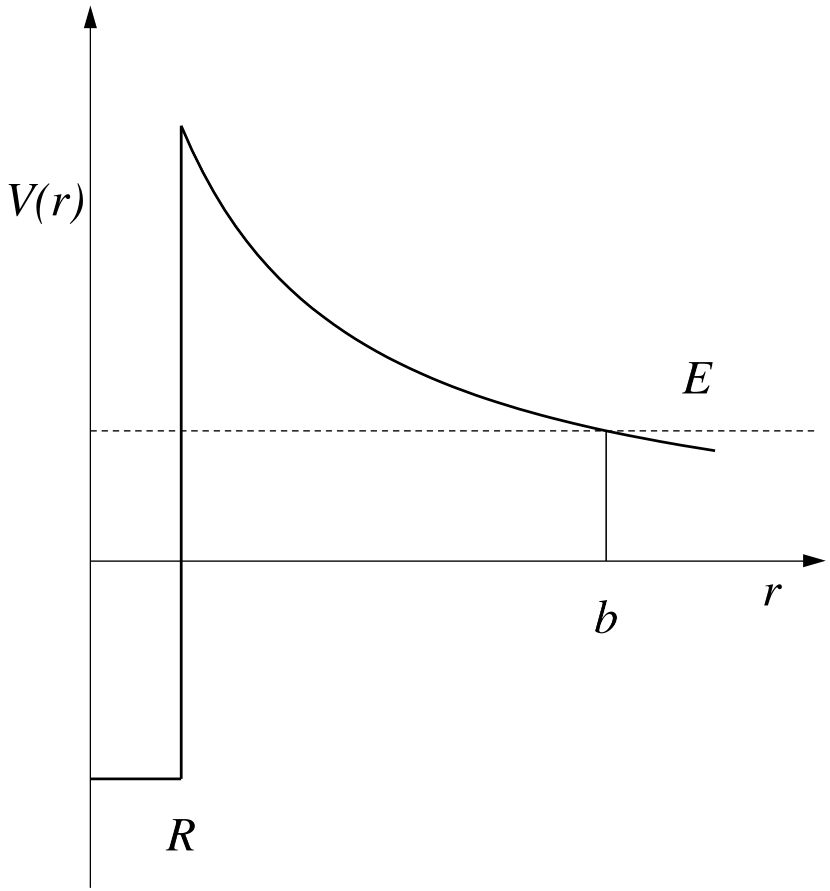
$K = e^2/4\pi\epsilon_0 \simeq 1.44$ MeV fm - costante di interazione elettrostatica

$$V(r) = v(r) \quad ; \quad r < R$$

$$V(r) = K\frac{Zz}{r} \quad ; \quad r > R$$

R definito quando le interazioni nucleari sono spente.

$$K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c \simeq \frac{200\text{MeVfm}}{137} =\simeq 1.44\text{MeVfm}$$



Schema del potenziale visto dalla particella α

Energia della particella α.

$$E = K\frac{Zz}{b}$$

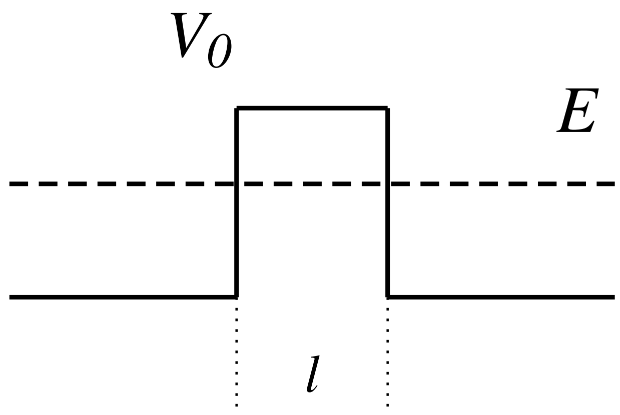
Valore del potenziale nel suo massimo

$$V(R) = K\frac{Zz}{R}$$

$z = 2$, $Z \simeq 100$ $R \simeq 10$ fm

$$V(R) \simeq \frac{(1.44)(100)(2)\,\text{MeV fm}}{10\text{fm}} \simeq \frac{300}{10}\text{MeV}$$

L'emissione α avviene per effetto tunnel



Coefficiente di trasmissione

$$T \sim e^{-G} \quad ; \quad G = 2\,l\,\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$m = \frac{M_1\,M_2}{M_1 + M_2}\text{massa ridotta}$$

Nel nostro caso

$$G = 2\int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E)}\;dr$$

$$
\begin{aligned}
G &= 2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E)}\, dr \\
&= 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K\, Z\, z}\, \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}\, dr \\
&= 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K\, Z\, z}\, \sqrt{b} \left[\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}}\sqrt{1 - \frac{R}{b}}\right]
\end{aligned}
$$

Calcolo dell'integrale

$r = b\cos^2\theta$ cambio di variabile
$\theta_i = 0$, $r(\theta_f) = b$
$R = b\cos^2\theta_i,\ R/b = \cos^2\theta_i,\ \theta_i = \arccos\sqrt{R/b}$
$dr = -2b\cos\theta\sin\theta$

$$\int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}\, dr = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[\frac{1}{b\cos^2\theta} - \frac{1}{b}\right]^{\frac{1}{2}} (-2b\sin\theta\cos\theta)\ d\theta$$

$$= -2\sqrt{b}\int_{\theta_i}^{\theta_f}\left[\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2\sqrt{b}\int_0^{\theta_i}\sin^2\theta\, d\theta = 2\sqrt{b}\int_0^{\theta_i}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{b}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right]_0^{\theta_i} = 2\sqrt{b}\left[\frac{\theta_i}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\theta_i\right]$$

$$= \sqrt{b}\left[\theta_i - \frac{1}{2}2\sin\theta_i\cos\theta_i\right] = \sqrt{b}\left[\theta_i - \cos\theta_i\sqrt{\sin\theta_i}\right]$$

$$= \sqrt{b}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{b}}\ - \sqrt{\frac{R}{b}}\sqrt{1-\frac{R}{b}}\right]$$

$$\lambda = f\,\nu\,T = f\frac{v}{2R}e^{-G}$$

$(v/2R)$ numero di volte che la particella α attraversa il nucleo.

$$\ln\lambda = \ln f + \ln(\frac{v}{2R}) - G$$

per $z = 2$ abbiamo

$$\ln\lambda = \ln f + \ln(\frac{v}{2R}) - 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}\,K\,Z\,z}\;\sqrt{b}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{b}}\; - \sqrt{\frac{R}{b}}\sqrt{1-\frac{R}{b}}\right]$$

Normalmente si ha che $b \gg R$ quindi

$$\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} \simeq \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\ln\lambda = \ln f + \ln(\frac{v}{2R}) - 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}\,K\,Z}\;\sqrt{b}\;\frac{\pi}{2} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}\,K\,Z}\;\sqrt{b}\;\left[\sqrt{\frac{R}{b}}\sqrt{1-\frac{R}{b}}\right]$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2ZK}{E}} \quad ; \quad \sqrt{1-\frac{R}{b}} \simeq 1$$

$$\ln\lambda = \ln f + \ln(\frac{v}{2R}) - KZ\frac{4\pi}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{1}{E}} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}K\,Z\,R}$$

Dipendenza dall'energia proporzionale a $-1/\sqrt{E}$.

In Geiger e Nuttal $\log E$.

Nell'intervallo energetico in esame $-A/\sqrt{E} \simeq B\log E$ con errori attorno al 3%

Approssimazioni

- Abbiamo utilizzato l'espressione per $b >> R$. Questa semplificazione non era necessaria ma ci ha facilitato il confronto tra le due equazioni.

- Abbiamo considerato costante la probabilità di trovare una particella α all'interno del nucleo.

- Abbiamo semplificato il potenziale all'interno del nucleo con una semplice buca quadrata.

- Abbiamo ipotizzato che i nuclei fossero sferici e pari-pari.

Domande

[N2-2] Descrivi lo spettro di emissione dei nuclei di ^{4}He provenienti da un decadimento α.

[N2-18] Un nucleo pari-pari decade α nello stato fondamentale o negli stati eccitati del nucleo figlio. Quali combinazioni del momento angolare J e della parità P sono permessi per gli stati accessibili al decadimento? Perché?

[N3-1] Quali sono le considerazioni che indicano nell'effetto tunnel il meccanismo responsabile del decadimento α?