



# Interazione radiazione-materia

Giampaolo Co'

Dipartimento di Matematica e Fisica, Ennio De Giorgi  
Università del Salento  
e  
INFN, Sezione di Lecce



# Indice

<b>1 Equazioni di Maxwell</b>	<b>1</b>
1.1 Potenziali elettromagnetici . . . . .	1
1.2 Assenza di sorgenti . . . . .	5
<b>2 Sviluppo in multipoli</b>	<b>9</b>
2.1 Proprietà generali . . . . .	9
2.2 Applicazione ai potenziali . . . . .	13
<b>3 Transizioni elettromagnetiche</b>	<b>15</b>
3.1 Interazione radiazione - materia . . . . .	15
3.2 Transizioni elettriche . . . . .	17
3.3 Regole di selezione . . . . .	20
3.4 Confronto con l'osservazione . . . . .	24
<b>Bibliografia</b>	<b>27</b>



# Introduzione

In queste note presenterò un formalismo che permette di descrivere l'interazione tra radiazione elettromagnetica e la materia. Il problema essenziale che voglio trattare è il passaggio da una situazione fisica che gode di invarianza traslazionale, le soluzioni delle equazioni di Maxwell lontano dalle sorgenti, a strutture fisiche caratterizzate da invariata rotazionale, come nuclei, atomi e molecole.

La tecnica da utilizzare è quella dello sviluppo in multipoli delle soluzioni di onda piana delle equazioni di Maxwell. Questa tecnica non presenta difficoltà concettuali, ma, siccome i calcoli dettagliati sono piuttosto lunghi e noiosi, è raramente trattata nei libri di testo. I diversi tecnicismi sono raccontati di volta in volta in testi che trattano argomenti differenti. Lo sviluppo in multipoli del campo elettromagnetico in testi di elettrodinamica avanzata [Jak98], somma di momenti angolari e tensori sferici irriducibili in testi specialistici che trattano questi temi [Edm57], collegamento con la meccanica quantistica ed i sistemi fisici, in testi di fisica nucleare ed atomica.

Nei più comuni manuali di fisica atomica, per le transizioni elettromagnetiche ci si limita a trattare quelle di dipolo, sicuramente le più intense, ma questo è molto limitante nella comprensione del fenomeno.

Queste note sono indirizzate a studenti del corso di laurea in Fisica che hanno familiarità con i contenuti dei corsi di elettrodinamica e di meccanica quantistica di base. In questa trattazione non considererò il meccanismo di produzione e di distruzione del singolo fotone. Questo argomento è trattato in maniera completa in un corso di teoria dei campi.

Lecce, Ottobre 2015  
Giampaolo Co'

# Capitolo 1

## Equazioni di Maxwell

### 1.1 Potenziali elettromagnetici

Per semplicità di scrittura utilizzerò le espressioni delle equazioni di Maxwell in unità CGS [Pur71], evitando così di esplicitare la presenza della costante dielettrica  $\epsilon_0$  e quella della permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (1.4)$$

dove ho indicato con  $c$  la velocità della luce, con  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , rispettivamente il campo elettrico e magnetico, e con  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  le densità di carica e di corrente. Tutte queste quantità, tranne  $c$  ovviamente, dipendono dalla posizione,  $\mathbf{r}$ , e dal tempo  $t$ . Le densità di carica e di corrente sono le sorgenti dei campi elettrici e magnetici, e soddisfano la condizione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.5)$$

Le equazioni di Maxwell, e di continuità, presentate sopra, collegano due quantità vettoriali,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  con una sorgente vettoriale  $\mathbf{j}$ , ed una scalare  $\rho$ . Questo significa che delle 6 quantità scalari che definiscono  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  solo 4 sono veramente indipendenti. È quindi possibile esprimere le equazioni di Maxwell in una formulazione in cui appaiano solo 4 quantità indipendenti, definendo un potenziale scalare  $\phi$  e uno vettoriale  $\mathbf{A}$ . La formulazione più comunemente usata è quella che definisce questi due potenziali come

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (1.6)$$

$$\nabla \phi = -\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (1.7)$$

Inseriamo i due potenziali, definiti sopra, nelle equazioni di Maxwell. L'Equazione (1.4) è soddisfatta poiché

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 , \quad (1.8)$$

e anche la (1.3) è soddisfatta dato che

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla \times (-\nabla \phi) = 0 . \quad (1.9)$$

Le altre due equazioni legano il campo elettrico e magnetico alle sorgenti. L'equazione (1.1) diventa

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) = 4\pi\rho \quad ; \quad \nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -4\pi\rho , \quad (1.10)$$

mentre l'Equazione (1.2) diventa

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) . \quad (1.11)$$

Dato che per ogni vettore  $\mathbf{a}$  vale la relazione

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} , \quad (1.12)$$

otteniamo dall'Equazione (1.11)

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) \\ -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le Equazioni di Maxwell sono equivalenti alle equazioni (1.6), (1.7), (1.10) e (1.13). Queste due ultime equazioni legano  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  alle sorgenti. Le (1.6) e (1.7) non definiscono i potenziali in maniera univoca. È sempre possibile definire una funzione scalare,  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  che soddisfa le relazioni, dette di gauge,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad \text{e} \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} . \quad (1.14)$$

I due nuovi potenziali  $\mathbf{A}'$  e  $\phi'$  soddisfano le relazioni (1.6) e (1.7), e quindi le Equazioni di Maxwell. Infatti, l'equazione (1.6) diventa

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (1.15)$$

e l'equazione (1.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \left( \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) \\ &= -\nabla \phi + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (1.16)$$

La libertà di scelta della gauge può essere fissata imponendo specifiche condizioni su  $\mathbf{A}$  e  $\phi$ . Tra le più utilizzate c'è la condizione di Lorentz che richiede

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (1.17)$$

È sempre possibile trovare dei potenziali  $\mathbf{A}'$  e  $\phi'$  che soddisfino la (1.17). Supponiamo, ad esempio, che valga

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = f \neq 0 , \quad (1.18)$$

dove  $f$  è una quantità diversa da zero. È sempre possibile trovare una funzione  $\Lambda$  tale che

$$\square \Lambda \equiv \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = f . \quad (1.19)$$

Sostituendo questa  $\Lambda$  nell'espressione (1.14) ed inserendo  $\mathbf{A}'$  e  $\phi'$  al posto di  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  nella (1.17) otteniamo

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} - \nabla \Lambda) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda \right) \quad (1.20)$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = f - \square \Lambda = 0 . \quad (1.21)$$

Inserendo la condizione di Lorentz (1.17) nell'equazione (1.10)abbiamo

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \square \phi = -4\pi\rho , \quad (1.22)$$

ed inserendo la condizione di Lorentz (1.17) nell'equazione (1.13) otteniamo

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} . \quad (1.23)$$

La condizione di Lorentz non definisce univocamente la gauge perché è valida per tutti i  $\Lambda$  che soddisfano  $\square \Lambda = 0$ .

Una scelta alternativa è la condizione di Coulomb o gauge trasversa che richiede

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (1.24)$$

Utilizzando la condizione di Coulomb l'equazione (1.10) diventa

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla^2 \phi = -4\pi\rho . \quad (1.25)$$

Questa è l'equazione di Poisson [Jak98, Pur71] la cui soluzione è

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (1.26)$$

infatti, ricordando che,

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (1.27)$$

abbiamo

$$\nabla^2 \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3 r' \nabla^2 \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) . \quad (1.28)$$

Il nome Coulomb gauge deriva da questo risultato che dice che ad ogni distanza il potenziale  $\phi$  è determinato dalla posizione istantanea di tutte le cariche. Questo fatto implica che i segnali viaggino a velocità infinita ed è in chiara contraddizione con la relatività einsteiniana. Questa è solo una contraddizione apparente. Prese singolarmente le componenti del potenziale elettromagnetico possono anche non soddisfare la relatività speciale, ma la combinazione delle quattro componenti del potenziale, tre per  $\mathbf{A}$  ed una per  $\phi$ , soddisfa globalmente la relatività. Infatti il campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.29)$$

e soddisfa le Eq. di Maxwell che sono relativisticamente invariati.

Dalla Eq. (1.13), usando la condizione di Coulomb, otteniamo la seguente relazione per il potenziale vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) . \quad (1.30)$$

Invertendo l'ordine delle derivate nell'ultimo termine dell'equazione precedente e usando la (1.26) possiamo scrivere

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} = \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (-\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)) \quad (1.31)$$

dove ho utilizzato l'equazione di continuità (1.5). Quindi l'Eq. (1.13) può essere scritta come

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' . \quad (1.32)$$

Risulta comodo separare le correnti in una componente longitudinale ed in una trasversa

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^l + \mathbf{j}^t \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{j}^t = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{j}^l = 0 . \quad (1.33)$$

La definizione permette di definire le due componenti della corrente come

$$\mathbf{j}^t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' , \quad (1.34)$$

e

$$\mathbf{j}^l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' , \quad (1.35)$$

quindi l'Eq. (1.32) diventa

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}^t + \mathbf{j}^l) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^l = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^t \quad (1.36)$$

Le equazioni di Maxwell nella condizione di Coulomb sono:

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^t \quad (1.37)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho . \quad (1.38)$$

Verifichiamo che le correnti  $\mathbf{j}^t$  e  $\mathbf{j}^l$  definite dalle (1.34) e (1.35) soddisfino le condizioni (1.33), e che la densità di corrente totale  $\mathbf{j}$  sia somma di  $\mathbf{j}^t$  e di  $\mathbf{j}^l$ .

Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \int \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' , \quad (1.39)$$

che è stato riscritto utilizzando la formula di integrazione per parti. Il primo integrale viene calcolato utilizzando il teorema di Gauss

$$\int \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) d^3 r = \int_S \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) d^2 s \quad (1.40)$$

Dato che la corrente è spazialmente limitata, facendo tendere all'infinito la superficie di integrazione  $S$ , l'integrale si annulla. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' &= - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \\ &= \nabla \cdot \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r' \end{aligned} \quad (1.41)$$

dove abbiamo considerato che

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) . \quad (1.42)$$

Considerando le definizioni (1.34) e (1.35) possiamo esprimere la densità di corrente come

$$\mathbf{j}^t + \mathbf{j}^l = \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' - \nabla \left( \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right) \right] . \quad (1.43)$$

Utilizzo la proprietà

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.44)$$

per riscrivere il secondo termine, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^t + \mathbf{j}^l &= \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' - \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right. \\ &\quad \left. - \nabla^2 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right] \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (1.46)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) [-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3 r' = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) . \quad (1.47)$$

## 1.2 Assenza di sorgenti

Consideriamo le espressioni delle equazioni di Maxwell in zone dello spazio dove non ci sono cariche e correnti, in altre parole in posizioni lontane dalle sorgenti del campo elettromagnetico.

Le equazioni (1.1, 1.2, 1.3, 1.4) si trasformano in

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (1.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (1.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (1.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (1.51)$$

Calcolando la derivata rispetto al tempo dell'Eq. (1.50) abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \times (c \nabla \times \mathbf{B}) = -c \nabla^2 \mathbf{B} + c \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = -c \nabla^2 \mathbf{B} , \end{aligned} \quad (1.52)$$

dove ho usato le equazioni (1.49), (1.44) e (1.50). Dalla espressione precedente otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \square \mathbf{B} = 0 . \quad (1.53)$$

È possibile operare in modo analogo anche per  $\mathbf{E}$  ed ottenere

$$\square \mathbf{E} = 0 . \quad (1.54)$$

Per i potenziali abbiamo che, nella condizione di Lorentz le equazioni (1.22) e (1.23) lontano dalle sorgenti diventano

$$\square \phi = 0 \quad \square \mathbf{A} = 0 . \quad (1.55)$$

Nella condizione di Coulomb abbiamo che la (1.32) si trasforma in

$$\square \mathbf{A} = 0 , \quad (1.56)$$

e la condizione su  $\phi$  che porta alla soluzione (1.26) indica che in una zona dove  $\rho = 0$  possiamo porre  $\phi = 0$ .

Le equazioni che abbiamo ottenuto sono tutte della forma

$$\square \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (1.57)$$

la cui soluzione generale può essere espressa come

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = N_k \boldsymbol{\epsilon}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.58)$$

dove ho indicato con  $N_k$  una costante di normalizzazione e con  $\boldsymbol{\epsilon}_k$  un vettore unitario. Inserendo la soluzione scritta sopra nell'equazione differenziale otteniamo

$$\begin{aligned} & \nabla^2 N_k \boldsymbol{\epsilon}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k \boldsymbol{\epsilon}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= N_k \boldsymbol{\epsilon}_k \left( -k^2 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \frac{\omega^2}{c^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (1.59)$$

Questa equazione è soddisfatta quando

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (1.60)$$

Questa relazione tra impulso ed energia trasportati dall'onda elettromagnetica è la caratteristica fondamentale che identifica, dopo la quantizzazione del campo elettromagnetico, i quanti di radiazione elettromagnetica, cioè i fotoni reali. Questi sono fotoni che possono essere identificati nei rivelatori. Nella teoria di campo Elettrodinamica Quantistica, QED per Quantum Electro Dynamics, l'interazione elettromagnetica tra particelle è mediata dallo scambio di fotoni. Questi fotoni non soddisfano la condizione (1.60), per questo motivo sono virtuali, e non sono rivelabili.

Le equazioni di Maxwell (1.48) e (1.51) e la condizione di Coulomb (1.24) impongono che il campo elettrico  $\mathbf{E}$ , magnetico  $\mathbf{B}$  e il potenziale vettoriale  $\mathbf{A}$  soddisfino l'equazione differenziale vettoriale  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Inserendo la soluzione (1.58) otteniamo

$$\nabla \cdot N_k \boldsymbol{\epsilon}_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (1.61)$$

quindi  $\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \mathbf{k} = 0$ , che significa che la direzione dell'oscillazione dell'onda, identificata dal vettore unitario  $\boldsymbol{\epsilon}_k$  è ortogonale alla direzione di propagazione, indicata dal vettore d'onda  $\mathbf{k}$ . È possibile dimostrare che la (1.61) è valida anche con la condizione di Lorentz.

Sfruttiamo il fatto che nella condizione di Lorentz tutte le componenti del potenziale vettore e scalare si trasformino allo stesso modo per trasformazioni di sistema di riferimento. Questo permette di unire potenziale scalare e vettore in un quadrivettore

$$A \equiv (\phi, \mathbf{A}) , \quad (1.62)$$

Utilizziamo la metrica del libro di Bjorken e Drell [Bjo65],

$$a_\mu b^\mu = a_0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} , \quad (1.63)$$

dove abbiamo adottato la convenzione di Einstein nella quale gli indici ripetuti sono sommati. La condizione di Lorentz implica che per ogni componente del quadri-vettore valga

$$\square A^\mu = 0 , \quad (1.64)$$

quindi la soluzione per ogni componente è del tipo

$$A^\mu = N_k \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} , \quad (1.65)$$

con  $k$  e  $x$  quadri-vettori

$$k^2 = k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0 , \quad (1.66)$$

per fotoni reali.

La (1.64) può essere scritta come

$$\partial_\mu A^\mu = 0 ; \quad \partial_\mu (N_k \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x}) = -i N_k \epsilon^\mu k_\mu e^{-ik \cdot x} = 0 \quad (1.67)$$

l'ultima equazione implica  $\epsilon^\mu k_\mu = 0$ . È sempre possibile trovare un vettore unitario  $\epsilon^\mu$  che soddisfi questa condizione facendo un'appropriata trasformazione di gauge

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi , \quad (1.68)$$

con

$$\square \chi = 0 . \quad (1.69)$$

Si può sempre trovare un  $\epsilon'$  tale che

$$\epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \beta k^\mu \quad (1.70)$$

dove  $\beta$  è un numero reale.

$$\epsilon'^\mu k_\mu = \epsilon^\mu k_\mu + \beta k^\mu k_\mu = 0 \quad (1.71)$$

La parte vettoriale può essere scritta come

$$\epsilon' \cdot \mathbf{k} = (\epsilon + \beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \epsilon \cdot \mathbf{k} + \beta \mathbf{k}^2 = 0 \quad (1.72)$$

da cui

$$\beta = -\frac{\epsilon \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \quad (1.73)$$

Da quanto affermato, possiamo esprimere il potenziale vettore come

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = N_k \epsilon_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (1.74)$$

Dalla Eq. (1.16) otteniamo

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (1.75)$$

e, considerando che  $\phi = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \left[ N_k \epsilon_k (-i\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \\ &= i \frac{\omega}{c} N_k \epsilon_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= i |\mathbf{k}| N_k \epsilon_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \end{aligned} \quad (1.76)$$

Il campo magnetico è definito come

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (1.77)$$

Consideriamo esplicitamente il calcolo di  $\nabla \times \mathbf{A}$  in coordinate cartesiane.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{l} , \quad (1.78)$$

dove  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{l}$  sono tre versori che definiscono le direzioni delle tre coordinate cartesiane  $x, y, z$  rispettivamente. L'espressione della derivata parziale per una delle coordinate è

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = N_k \epsilon_i (ik_j) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (1.79)$$

L'espressione del campo magnetico è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= iN \left[ (k_y \epsilon_z - k_z \epsilon_y) \hat{i} - (k_x \epsilon_z - k_z \epsilon_x) \hat{j} + (k_x \epsilon_y - k_y \epsilon_x) \hat{l} \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= iN (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (1.80)$$

# Capitolo 2

## Sviluppo in multipoli

### 2.1 Proprietà generali

D'ora in poi considereremo soluzioni dell'equazione Maxwell che soddisfano la condizione di Coulomb. Le equazioni da risolvere sono del tipo

$$\square U(\mathbf{r}, t) \equiv \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (2.1)$$

Per una valore fisso di  $\omega$  abbiamo che la dipendenza temporale può essere espressa come

$$U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} , \quad (2.2)$$

quindi l'equazione precedente diventa

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3)$$

valida per  $k^2 = \omega^2/c^2$ . Questa è l'equazione di Helmholtz e ha grande somiglianza con l'equazione di Schrödinger di una particella libera. In analogia a quanto si fa con l'equazione di Schrödinger si possono cercare soluzioni sviluppate in multipoli. Utilizzando le coordinate polari sferiche, cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=-l}^l u_{l\mu}(r, \theta, \varphi) = N \sum_{l,\mu} j_l(kr) Y_{l\mu}(\theta, \varphi) \quad (2.4)$$

dove  $N$  è una costante di normalizzazione,  $j_l$  la funzione di Bessel sferica,  $Y_{l\mu}$  l'armonica sferica. Gli indici  $l$  e  $\mu$  sono numeri naturali e soddisfano tutte le regole legate agli autovalori del momento angolare orbitale in meccanica quantistica. D'ora in poi indicherò con  $\Omega$  le due coordinate angolari  $\theta$  e  $\phi$ .

La soluzione delle equazioni di Maxwell per il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  richiede la presenza di un vettore  $\boldsymbol{\epsilon}$  di norma unitaria. Nello sviluppo in multipoli è conveniente definire le armoniche sferiche vettoriali

$$\mathbf{Y}_{l,j,m}(\Omega) = \sum_{\mu,\eta} \langle l\mu 1\eta | jm \rangle Y_{l\mu}(\Omega) \boldsymbol{\epsilon}_\eta , \quad (2.5)$$

dove  $\langle | \rangle$  è un coefficiente di Clebsh - Gordan [Edm57], e le tre componenti di  $\boldsymbol{\epsilon}$  sono espresse in coordinate sferiche legate alle coordinate cartesiane in questo modo

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y}) \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon}_0 = \hat{z} \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{y}) . \quad (2.6)$$

Nei calcoli successivi utilizzeremo il teorema del gradiente [Edm57]

$$\begin{aligned}\nabla f(r)Y_{l\mu}(\Omega) &= \left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2} \left(\frac{df(r)}{dr} + \frac{l+1}{r}f(r)\right) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) \\ &- \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2} \left(\frac{df(r)}{dr} - \frac{l}{r}f(r)\right) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega),\end{aligned}\quad (2.7)$$

e le seguenti regole di differenziazione delle funzioni di Bessel [Mes99]

$$\frac{d j_l(kr)}{dr} = k j_{l-1}(kr) - \frac{l+1}{r} j_l(kr) \quad (2.8)$$

$$\frac{d j_l(kr)}{dr} = -k j_{l+1}(kr) + \frac{l}{r} j_l(kr). \quad (2.9)$$

In generale, tutte le funzioni del tipo

$$\mathbf{V}_{\lambda,L,M}(\mathbf{r}) = j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda,L,M}(\omega), \quad (2.10)$$

soddisfano l'equazione di Helmholtz (2.3).

Definiamo l'ampiezza longitudinale, che identifichiamo con il simbolo  $\mathcal{L}$ , come

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{L}) &= \frac{1}{k} \nabla j_l(kr) Y_{l\mu}(\Omega) \\ &= \left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2} j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) + \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2} j_{l+1}(kr) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega)\end{aligned}\quad (2.11)$$

dove abbiamo utilizzato il teorema del gradiente. L'ampiezza longitudinale non soddisfa la condizione di Coulomb, infatti l'espressione

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{L}) = \frac{1}{k} \nabla^2 j_l(kr) Y_{l\mu}(\Omega) = -\frac{k^2}{k} j_l(kr) Y_{l\mu}(\Omega), \quad (2.12)$$

è, in generale, diversa da zero. In questa espressione ho considerato che ogni componente dello sviluppo in multipoli di  $u(\mathbf{r})$  soddisfi l'equazione di Helmholtz (2.3).

Costruiamo altre ampiezze del tipo (2.10). Dato che l'interazione elettromagnetica conserva la parità, definiamo due ampiezze di parità opposta

$$\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{M}) = j_l(kr) \mathbf{Y}_{l,l,\mu}(\Omega) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{E}) = c_{l-1} j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) + c_{l+1} j_{l+1}(kr) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega), \quad (2.14)$$

dove ho indicato con  $c$  dei numeri reali. La parità è definita dal momento angolare dell'armonica sferica.

La condizione di Coulomb impone le relazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{M}) = 0, \quad (2.15)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{E}) = 0. \quad (2.16)$$

La prima relazione è sempre soddisfatta, mentre la seconda è valida per

$$c_{l-1} = \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2} ; \quad c_{l+1} = -\left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2} \quad (2.17)$$

Consideriamo la relazione

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda,L,M}(\omega)) &= \sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \epsilon_{\eta} \nabla (j_\lambda(kr) Y_{\lambda,M-\eta}(\Omega)) \\
&= k \sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \epsilon_{\eta} \left[ \left( \frac{\lambda}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} j_{\lambda-1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda-1,\lambda,M-\eta} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} j_{\lambda+1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda+1,\lambda+1,M-\eta} \right] \\
&= k \left( \frac{\lambda}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} j_{\lambda-1}(kr) \sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \\
&\quad \sum_{\eta'} \langle \lambda - 1 M - \eta - \eta' 1 \eta' | \lambda M - \eta \rangle Y_{\lambda-1,M-\eta-\eta'} \epsilon_{\eta} \epsilon_{\eta'} \\
&+ k \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} \right)^{1/2} j_{\lambda+1}(kr) \sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \\
&\quad \sum_{\eta'} \langle \lambda + 1 M - \eta - \eta' 1 \eta' | \lambda M - \eta \rangle Y_{\lambda+1,M-\eta-\eta'} \epsilon_{\eta} \epsilon_{\eta'}
\end{aligned}$$

Per le proprietà delle coordinate sferiche

$$\epsilon_{\eta} \epsilon_{\eta'} = \epsilon_{\eta} \epsilon_{\eta'} (-1)^{\eta'} (-1)^{\eta} = (-1)^{\eta'} \epsilon_{\eta} \epsilon_{\eta'}^* = (-1)^{\eta'} \delta_{\eta,\eta'}$$

Consideriamo le somme tra coefficienti di Clebsh-Gordan. Nelle equazioni successive userò il simbolo  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$ . La prima somma è

$$\begin{aligned}
&\sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \langle \lambda - 1 M 1 - \eta | \lambda M - \eta \rangle (-1)^{\eta} \\
&= (-1)^{\lambda+L} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda-1} \sum_{\eta} (-1)^{\eta+\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \langle \lambda M - \eta 1 \eta | \lambda - 1 M \rangle \\
&= (-1)^{\lambda+L} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda-1} \delta_{L,\lambda-1} = (-1)^{2L+1} \left( \frac{2(L+1)+1}{2(L+1-1)+1} \right)^{1/2} = - \left( \frac{2L+3}{2L+1} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

La seconda somma è

$$\begin{aligned}
&\sum_{\eta} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \langle \lambda + 1 M 1 - \eta | \lambda M - \eta \rangle (-1)^{\eta} \\
&= (-1)^{\lambda+L} \sum_{\eta} (-1)^{\eta+\eta} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda+1} \langle \lambda M - \eta 1 \eta | LM \rangle \langle \lambda M - \eta 1 \eta | \lambda - 1 M \rangle \\
&= (-1)^{\lambda+L} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda+1} \delta_{L,\lambda+1} = (-1)^{2L-1} \left( \frac{2(L-1)+1}{2L+1} \right)^{1/2} = - \left( \frac{2L-1}{2L+1} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Considerando i risultati precedenti otteniamo

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{L,\lambda}^M(\omega)) \\
&= -k j_\lambda(kr) Y_{L,M}(\omega) \left[ \left( \frac{L+1}{2L+3} \frac{2L+3}{2L+1} \right)^{1/2} \delta_{L,\lambda-1} + \left( \frac{L-1+1}{2L-1} \frac{2L-1}{2L+1} \right)^{1/2} \delta_{L,\lambda+1} \right]
\end{aligned}$$

Nella definizione di  $\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{M})$   $\lambda = L$ , quindi per le  $\delta$  di Krönecker  $\nabla \cdot \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{M}) = 0$ . Per quanto riguarda  $\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{E})$  abbiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{E}) = c_{l-1} \nabla \cdot (j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega)) + c_{l+1} \nabla \cdot (j_{l+1}(kr) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega))$$

$$\begin{aligned}
&= c_{l-1} \left\{ -kj_l(kr) Y_{l,m}(\Omega) \left[ \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} \delta_{l,l-2} + \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} \delta_{l,l} \right] \right\} \\
&+ c_{l+1} \left\{ -kj_l(kr) Y_{l,m}(\Omega) \left[ \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} \delta_{l,l} + \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} \delta_{l,l+2} \right] \right\} \\
&= -kj_l(kr) Y_{l,m}(\Omega) \left[ c_{l-1} \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} + c_{l+1} \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} \right] = 0
\end{aligned}$$

che è soddisfatta per i valori (2.17).

---

Le ampiezze sono normalizzate in modo che

$$\int \mathbf{A}_{L,M}^*(\mathbf{r}, \alpha) \mathbf{A}_{L',M'}(\mathbf{r}, \alpha) d^3r = \frac{1}{k^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} \quad (2.18)$$

dove  $\alpha$  è  $\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{M}$

---

Dimostriamo la normalizzazione (2.18). Per l'ampiezza  $\mathcal{M}$  abbiamo

$$\int \mathbf{A}_{L,M}^*(\mathbf{r}, \mathcal{M}) \mathbf{A}_{L',M'}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) d^3r = \int j_L(kr) \mathbf{Y}_{L,L,M}^*(\Omega) j_L(k'r) \mathbf{Y}_{L',L',M'}(\Omega) r^2 dr d\Omega .$$

Data l'ortonormalità delle armoniche sferiche di spin l'integrale in  $\Omega$  dà  $\delta_{L,L'} \delta_{M,M'}$ , rimane quindi l'integrazione tra le funzioni di Bessel sferiche che è

$$\int j_L(kr) j_L(k'r) r^2 dr = \frac{1}{k^2} \delta(k - k') .$$

I due risultati insieme producono la (2.18).

Consideriamo  $\mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{E})$ .

$$\begin{aligned}
&\int \mathbf{A}_{L,M}^*(\mathbf{r}, \mathcal{E}) \mathbf{A}_{L',M'}(\mathbf{r}, \mathcal{E}) d^3r = \\
&\int d^3r \left[ \left( \frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} j_{L-1}(kr) \mathbf{Y}_{L-1,L,M}^*(\Omega) - \left( \frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} j_{L+1}(kr) \mathbf{Y}_{L+1,L,M}^*(\Omega) \right] \\
&\left[ \left( \frac{L'+1}{2L'+1} \right)^{1/2} j_{L'-1}(k'r) \mathbf{Y}_{L'-1,L',M'}(\Omega) - \left( \frac{L'}{2L'+1} \right)^{1/2} j_{L'+1}(k'r) \mathbf{Y}_{L'+1,L',M'}(\Omega) \right] \\
&= \left[ \frac{L+1}{2L+1} \int j_{L-1}(kr) j_{L-1}(k'r) r^2 dr + \frac{L}{2L+1} \int j_{L+1}(kr) j_{L+1}(k'r) r^2 dr \right] \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} \\
&= \frac{L+1+L}{2L+1} \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} \frac{1}{k^2} \delta(k - k')
\end{aligned}$$

Ovviamente  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$  sono ortogonali tra loro perché hanno parità differenti.

---

## 2.2 Applicazione ai potenziali

Per le equazioni di Maxwell nella condizione di Coulomb abbiamo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = ik\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} , \quad (2.19)$$

dove ho usato  $k = \omega/c$ . Ogni termine dello sviluppo in multipoli del campo elettrico può essere espresso in termini dello sviluppo del potenziale vettore

$$\mathbf{E}_{L,M}(\mathbf{r}, \alpha) = ik\mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \alpha) , \quad (2.20)$$

dove  $\alpha = \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{M}$ .

Per il campo magnetico abbiamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} , \quad (2.21)$$

quindi

$$\mathbf{B}_{L,M}(\mathbf{r}, \alpha) = \nabla \times \mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \alpha) , \quad (2.22)$$

da cui si ha che:

$$\mathbf{B}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{L}) = \nabla \times \mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{L}) = \nabla \times \frac{1}{k} \nabla j_L(kr) Y_{L,M}(\Omega) = 0 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{E}) = \nabla \times \mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{E}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) = \nabla \times \mathbf{A}_{L,M}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) \quad (2.25)$$

Gli indici  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$  indicano le eccitazioni elettriche e magnetiche. I multipoli magnetici hanno parità  $(-1)^L$  mentre quelli elettrici  $(-1)^{L\pm 1}$ . Queste sono le parità del termine dello sviluppo in multipoli dei due campi, elettrico e magnetico. A queste parità bisogna moltiplicare la parità intrinseca del fotone, che è negativa. Per questo motivo nell'assorbimento e nella emissione di un fotone, le parità globali delle transizioni elettromagnetiche sono caratterizzate come segue

Transizioni Elettriche	$(-1)^L$
Transizioni Magnetiche	$(-1)^{L\pm 1}$

Consideriamo le soluzioni dell'equazione di Helmholtz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \epsilon \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{con} \quad \epsilon \cdot \mathbf{k} = 0 . \quad (2.26)$$

Rispetto all'espressione (1.61) ho posto  $N_k = 1$  e ho trascurato il pedice  $k$  in  $\epsilon$ . Ogni componente del vettore  $\mathbf{A}$  in coordinate sferiche (2.6) può essere sviluppata in multipoli

$$A_\mu(\mathbf{r}) = \epsilon_\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{L,M} (i)^L j_L(kr) Y_{L,M}^*(\Omega_k) Y_{L,M}(\Omega_r) \epsilon_\mu , \quad (2.27)$$

dove ho indicato con  $\Omega_k$  e  $\Omega_r$  gli angoli che definiscono le direzioni di  $\mathbf{k}$  e di  $\mathbf{r}$ , rispettivamente. Utilizzo la completezza e l'ortogonalità dei coefficienti di Clebsch - Gordan per inserire  $\delta_{\mu,\mu'}\delta_{M,M'}$

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{r}) &= 4\pi \sum_{L,M} (i)^L j_L(kr) Y_{L,M}^*(\Omega_k) \\ &\quad \sum_{J,N} \sum_{M',\mu'} \langle L M 1 \mu | J N \rangle \langle L' M' 1 \mu' | J N \rangle Y_{L',M'}(\Omega_r) \epsilon'_\mu \\ &= 4\pi \sum_{L,M} (i)^L j_L(kr) Y_{L,M}^*(\Omega_k) \sum_{J,N} \langle L M 1 \mu | J N \rangle \mathbf{Y}_{L,J,N}(\Omega_r) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Scegliendo l'asse  $z$  parallela alla direzione di  $\mathbf{k}$  otteniamo

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{r}) &= 4\pi \sum_{L,M} (i)^L j_L(kr) \frac{\hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \delta_{M,0} \sum_{J,N} \langle L M 1 \mu | J N \rangle \mathbf{Y}_{L,J,N} \\ &= 4\pi \sum_L (i)^L j_L(kr) \frac{\hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \sum_J \langle L 0 1 \mu | J \mu \rangle \mathbf{Y}_{L,J,\mu} \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_{L,J} (i)^L j_L(kr) \hat{L} \langle L 0 1 \mu | J \mu \rangle \mathbf{Y}_{L,J,\mu} \end{aligned}$$

Per un valore fissato di  $J$ , i coefficienti di Clebsch - Gordan diversi da zero sono quelli per i quali  $L = J \pm 1$  o  $L = J$ . Esplicito i valori dei tre possibili coefficienti di Clebsch - Gordan per le componenti  $\mu = \pm 1$  del potenziale vettore. Non considero la componente  $\mu = 0$  poiché il fotone reale è trasverso, quindi  $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Questo implica che non ci siano componenti sull'asse  $z$ , ovvero per  $\mu = 0$ .

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{r}) &= \sqrt{4\pi} \sum_J \left[ (i)^{J-1} j_{J-1}(kr) \widehat{J-1} \frac{\sqrt{J+1}}{\sqrt{2} \widehat{J-1}} \mathbf{Y}_{J-1,J,\mu} \right. \\ &\quad + (i)^J j_J(kr) \widehat{J} \left( \frac{-\mu}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{Y}_{J,J,\mu} \\ &\quad \left. + (i)^{J+1} j_{J+1}(kr) \widehat{J+1} \frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2} \widehat{J+1}} \mathbf{Y}_{J+1,J,\mu} \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

quindi

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{r}) &= \sqrt{2\pi} \sum_J (i)^J \widehat{J} \left[ -\mu j_J(kr) \mathbf{Y}_{J,J,\mu} \right. \\ &\quad + (i)^{-1} \left( \frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} j_{J-1}(kr) \mathbf{Y}_{J-1,J,\mu} + (i)^1 j_{J+1}(kr) \left( \frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \mathbf{Y}_{J+1,J,\mu} \left. \right] \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_J (i)^J \widehat{J} [-\mu A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) - i A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E})] \\ &= -\sqrt{2\pi} \sum_J (i)^J \widehat{J} [\mu A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) + i A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E})]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

## Capitolo 3

# Transizioni elettromagnetiche

In questo capitolo applicherò lo sviluppo in multipoli del campo elettromagnetico, presentato precedentemente, al calcolo delle transizioni elettromagnetiche tra due livelli atomici, molecolari, nucleari, e anche adronici. A questo punto della trattazione sarebbe necessario introdurre la quantizzazione del campo elettromagnetico, come viene fatto in [Eis70] e [Wal13]. Ritengo che una trattazione adeguata della quantizzazione del campo elettromagnetico sia da inserire nell'ambito di un corso di teoria dei campi, e non debba essere fatta frettolosamente nel contesto di queste note. Per questo motivo preferisco non presentare questo argomento, e considerare soltanto il risultato finale.

Nella mia trattazione considererò il fatto che per emissione, o per l'assorbimento, di un singolo fotone il sistema atomico, molecolare o nucleare che sia, compia una transizione tra due stati caratterizzati dal momento angolare e dalla parità. Ogni singolo fotone, assorbito od emesso, è descritto da un termine dello sviluppo in multipoli del campo elettromagnetico, quindi a sua volta caratterizzato da un momento angolare e dalla parità. La classificazione dei multipoli elettrici e magnetici fatta nel capitolo precedente può essere applicata alle proprietà del singolo fotone.

Questa semplificazione del contesto è quella che utilizzerò per calcolare le ampiezze di transizione elettromagnetica.

### 3.1 Interazione radiazione - materia

Per indicare il sistema che assorbe od emette il fotone, sia molecola, atomo, nucleo o adrone, utilizzerò da ora in poi il termine *sistema adronico*, anche nei casi in cui la transizione avviene modificando i livelli elettronici del sistema.

Dalla teoria perturbativa dipendente dal tempo è possibile ricavare una relazione tra probabilità di transizione ed hamiltoniana di interazione tra il sistema ed il fotone [Mes99, Bra03]. In letteratura, questa relazione è comunemente chiamata Regola d'oro di Fermi.

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \mathcal{D}(\omega) \equiv \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \mathcal{D}(\omega) , \quad (3.1)$$

dove la probabilità di transizione  $W$  è legata, come vedremo, alla sezione d'urto o alla vita media della transizione. Nell'equazione (3.1) ho indicato con  $\mathcal{D}$  la densità degli stati finali. Nella letteratura, questa quantità è normalmente indicata con  $\rho$ , ma nel presente contesto può essere confusa con la densità di carica.

L'ampiezza di transizione è data dall'espressione

$$M_{if} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \frac{1}{c} \int d^3r \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle \cdot \langle 0 | \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) | \mathbf{k} \lambda \rangle . \quad (3.2)$$

Ho indicato con  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$ , rispettivamente, gli stati iniziale e finale del sistema in esame. Questo significa che nel caso di foto-assorbimento lo stato iniziale è composto dallo stato iniziale del *sistema adronico*,  $|\alpha\rangle$  e da quello del fotone con impulso  $\mathbf{k}$  e polarizzazione  $\lambda$ . In questo caso, lo stato finale è solo quello del *sistema adronico*,  $|\beta\rangle$ . In caso di foto-emissione il fotone si trova nello stato finale  $|f\rangle$ . L'Eq. (3.2) indica che l'operatore hamiltoniano di interazione lega, con un prodotto scalare, la corrente elettromagnetica generata dal *sistema adronico* e il campo elettromagnetico che produce, o distrugge il fotone. L'espressione (3.2) descrive il foto-assorbimento. La quantizzazione del campo elettromagnetico implica che l'assorbimento di un fotone possa essere descritto come [Eis70]

$$\langle 0 | \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) | \mathbf{k} \lambda \rangle = c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} , \quad (3.3)$$

che soddisfa le equazioni di Maxwell. In questa equazione ho definito la costante di normalizzazione indicando con  $c$  la velocità della luce nel vuoto, con  $\hbar$  la costante di Planck, divisa per  $2\pi$ , e con  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  l'energia e l'impulso del fotone legati dalla relazione  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ . L'espressione (3.3) rappresenta nella (3.2) l'assorbimento di un fotone. L'emissione di un fotone viene descritta da un termine che è il complesso coniugato della (3.3).

Consideriamo gli stati del *sistema adronico* con una ben definita energia. In questo caso è conveniente utilizzare la rappresentazione di Heisenberg degli operatori in modo da separare la parte dipendente dal tempo

$$\langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = \langle \beta | e^{\frac{i}{\hbar} H t} \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \alpha \rangle = \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_\beta - E_\alpha) t} , \quad (3.4)$$

dove  $E_\alpha$  ed  $E_\beta$  sono le energie degli stati *sistema adronico*  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ , ed ho utilizzato, per semplicità, lo stesso simbolo  $\mathbf{j}$  per indicare sia l'operatore di corrente dipendente dal tempo, sia quello indipendente. Usando questa espressione posso esprimere la conservazione della carica e corrente (1.5) come

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle &= -\frac{\partial}{\partial t} \langle \beta | \rho(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle \\ \nabla \cdot \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_\beta - E_\alpha) t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_\beta - E_\alpha) t} \right] \\ \nabla \cdot \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle &= -i \frac{(E_\beta - E_\alpha)}{\hbar} \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle , \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considerando lo sviluppo in multipoli (2.30) possiamo scrivere il termine  $M_{if}$  della (3.1) come

$$\begin{aligned} M_{if} &= \frac{1}{c} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3 r (\langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle)_\mu e^{\frac{i}{\hbar} (E_\beta - E_\alpha) t} \\ &\quad c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} (-1) \sqrt{2\pi} \sum_J (i)^J \hat{J} [\mu A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) + i A_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E})] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il prodotto scalare della (3.2) è espresso dalla somma su  $\mu$ , la stessa coordinata sferica per la corrente e per il multipolo elettromagnetico. L'esponenziale dell'energia non è da considerare dato che la quantità da utilizzare è il modulo, quadrato, di  $M_{if}$ . Dato che nel nostro caso la transizione avviene tra due stati del *sistema adronico* che hanno ben definita energia, questo termine nel modulo quadrato è uguale all'unità.

Dato che le transizioni elettromagnetiche conservano la parità non c'è interferenza tra transizioni magnetiche ed elettriche che hanno parità opposte per un momento angolare fissato. Le transizioni magnetiche sono definite dal multipolo

$$\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{M}) = j_l(kr) \mathbf{Y}_{l,l,\mu}(\Omega) , \quad (3.7)$$

e quelle elettriche dal multipolo

$$\mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}; \mathcal{E}) = \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) - \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} j_{l+1}(kr) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega) \quad (3.8)$$

La probabilità di transizione può essere calcolata considerando le tecniche di accoppiamento di momento angolare [Edm57] legate al fatto che l'operatore di corrente può essere definito come tensore sferico irriducibile. Come esempio di calcolo mi limiterò a considerare le transizioni elettriche, le più intense, nel limite per grandi lunghezze d'onda.

## 3.2 Transizioni elettriche

Prima di calcolare l'espressione della probabilità di transizione per le transizioni elettriche discuterò dell'approssimazione di grande lunghezza d'onda, LWA per Long Wave Approximation. La condizione di validità della LWA è  $kr \ll 1$ . Per i nuclei, consideriamo transizioni di pochi MeV, quindi abbiamo

$$k = \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar c} \sim \frac{1 \text{ MeV}}{200 \text{ MeV fm}} = \frac{1}{200} \text{ fm}^{-1}$$

dato che i raggi nucleari raggiungono valori massimi di circa 10 fm, la LWA è valida. Nel caso atomico consideriamo transizioni di qualche eV, quindi

$$k = \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar c} \sim \frac{1 \text{ eV}}{200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 10^{-15} \text{ m}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} \text{ Å}^{-1},$$

dato che sistemi atomici e molecolari hanno dimensioni di qualche Å, anche in questo caso la LWA è valida.

Per piccoli valori dell'argomento le funzioni di Bessel sferiche hanno il seguente limite

$$\lim_{kr \ll 1} j_J(kr) \longrightarrow \frac{(kr)^J}{(2J+1)!!}, \quad (3.9)$$

dove il doppio punto esclamativo indica un prodotto fattoriale che considera solo i termini dispari. Nell'approssimazione di onda lunga consideriamo il rapporto tra le funzioni di Bessel sferiche che compongono il multipolo elettrico (3.8)

$$\lim_{kr \ll 1} \frac{j_{J+1}(kr)}{j_{J-1}(kr)} \longrightarrow \frac{(kr)^{J+1}}{(2J+3)!!} \frac{(2J-1)!!}{(kr)^{J-1}} = \frac{(kr)^2}{(2J+3)(2J+1)}. \quad (3.10)$$

È evidente che il termine  $j_{J-1}$  domina sul termine  $j_{J+1}$ , questo ci permette di approssimare il multipolo elettrico  $\mathcal{E}$  con quello longitudinale  $\mathcal{L}$ . Consideriamo il termine longitudinale del campo elettromagnetico

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{L}) &= \frac{1}{k} \nabla j_l(kr) Y_{l,\mu}(\Omega) \\ &= \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) + \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} j_{l+1}(kr) \mathbf{Y}_{l+1,l,\mu}(\Omega) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dato che in LWA i termini  $j_{l+1}$  sono trascurabili rispetto a quelli legati a  $j_{l-1}$  posso legare  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathcal{L})$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathcal{E})$  trascurando i termini con  $l+1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E}) &\simeq \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} j_{l-1}(kr) \mathbf{Y}_{l-1,l,\mu}(\Omega) \simeq \left( \frac{l+1}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{l,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{L}) \\ &= \left( \frac{l+1}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} \nabla j_l(kr) Y_{l,\mu}(\Omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considero una transizione con un  $J$  fissato

$$M_{if}^J = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\sqrt{2\pi}\hat{J}(i)^{J+1} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu \mathbf{A}_{J,\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E}) , \quad (3.13)$$

Utilizzando le semplificazioni indotte dalla LWA otteniamo, per la (3.12),

$$M_{if}^J = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\sqrt{2\pi}\hat{J}(i)^{J+1} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu \left( \frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} \nabla j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega) \quad (3.14)$$

Applichiamo la regola di integrazione per parti

$$\begin{aligned} M_{if}^J &= -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\sqrt{2\pi}\hat{J}(i)^{J+1} \left( \frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} \\ &\quad \sum_{\mu=\pm 1} \left\{ [\langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega)]_{-\infty}^\infty - \int d^3r \nabla \cdot \langle \beta | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega) \right\} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dato che le correnti generate dal *sistema adronico* sono limitate nello spazio, il primo termine dell'integrazione per parti è nullo. Nel secondo termine sostituiamo il gradiente della densità di corrente con un termine che dipende dalla densità di carica utilizzando l'equazione di continuità (3.5). Questa sostituzione è nota in letteratura come **teorema di Siegert** [Eis70]. L'applicazione del teorema di Siegert porta ad una grande semplificazione del problema di costruire le correnti elettromagnetiche prodotte dal *sistema adronico*. L'espressione dell'operatore che definisce la densità di carica di un sistema a molti corpi è molto più semplice di quella degli operatori legati alla densità di corrente. Ritengo necessario mettere in evidenza i punti fondamentali che permettono di applicare il teorema di Siegert. In primo luogo è necessaria la validità della LWA. In secondo luogo si applica l'equazione di continuità (3.5). Questo significa che in situazioni dove la LWA non è valida, il contributo di correnti traverse, ovvero tali che  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , può non essere trascurabile. Applicando il teorema di Siegert abbiamo che

$$\begin{aligned} M_{if}^J &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\sqrt{2\pi}\hat{J}(i)^{J+1} \left( \frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} (-i) \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}(2\pi)(i)^J (-i)^2 \left[ \frac{(2J+1)(J+1)}{J} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} kc \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega) \\ &= -c \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}(2\pi)(i)^J \left[ \frac{(2J+1)(J+1)}{J} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r j_J(kr) Y_{J,\mu}(\Omega) \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu , \end{aligned}$$

dove ho considerato  $E_\beta - E_\alpha = \omega = kc$ .

Data la validità della LWA sostituiamo la funzione di Bessel sferica con la sua espressione asintotica (3.9), e otteniamo

$$M_{if}^J = -c \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}(2\pi)(i)^J \left[ \frac{(2J+1)(J+1)}{J} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=\pm 1} \int d^3r \frac{(kr)^J}{(2J+1)!!} Y_{J,\mu}(\Omega) \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu . \quad (3.16)$$

Inseriamo questa espressione nell'espressione (3.1) della probabilità di transizione, identificata dal momento angolare  $J$ .

$$\begin{aligned} W_{if}^J &= \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \mathcal{D}(\omega) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} c^2 \frac{(2\pi)^2 \hbar}{\omega} \frac{(2J+1)(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2} k^{2J} \left| \sum_{\mu} \int d^3r r^J \langle \beta | \rho(\mathbf{r}) | \alpha \rangle_\mu Y_{J,\mu}(\Omega) \right|^2 \mathcal{D}(\omega) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

La parte non ancora definita dell'espressione precedente è l'elemento di matrice della densità di carica del *sistema adronico*. Il calcolo di questo termine richiede un modello che descriva il *sistema adronico* sia nello stato iniziale  $|\alpha\rangle$  che nello stato finale  $|\beta\rangle$ . Il compito di descrivere gli stati di questi sistemi è lo scopo delle teorie a molticorpi. Procederò per dare altre informazioni su come calcolare l'elemento di matrice del *sistema adronico* fino al punto in cui sarà indispensabile formalizzare il modello a molticorpi che descrive il *sistema adronico*.

L'operatore densità di carica è definito come

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.18)$$

dove ho indicato con  $e_i$  la carica elettrica di ogni componente microscopico del *sistema adronico*. Nel caso atomico la somma è limitata agli elettroni. In quello nucleare ai protoni ed ai neutroni, dove, in unità della carica elementare,  $e_i = 1$  per i primi e  $e_i = 0$ . In un adrone  $e_i$  assumerà la carica elettrica associata al sapore del quark considerato.

La delta di Dirac della definizione (3.18) permette di inserire l'integrale in  $\mathbf{r}$  della (3.16) nell'elemento di matrice del *sistema adronico*. Gli stati iniziale e finale del *sistema adronico* sono caratterizzati dal momento angolare  $J$ , la sua proiezione  $M$  sull'asse  $z$ , e dalla parità  $\Pi$ , quindi  $|\alpha\rangle \equiv |J_\alpha M_\alpha \Pi_\alpha\rangle$ , e analogamente per  $|\beta\rangle$ . Inoltre, l'ortogonalità delle armoniche sferiche impedisce termini di interferenza tra valori diversi di  $\mu$ , quindi la somma su  $\mu$  può essere portata fuori dal modulo quadro. La quantità che contiene l'elemento di matrice del *sistema adronico* viene normalmente definita come

$$B(EJ : J_\alpha \rightarrow J_\beta) = \sum_{\mu=\pm 1} \left| \sum_i \langle J_\beta M_\beta \Pi_\beta | e_i r_i^J Y_{J,\mu}(\Omega_i) | J_\alpha M_\alpha \Pi_\alpha \rangle \right|^2 \quad (3.19)$$

dove la somma in  $i$  corre su tutte le particelle che formano il sistema, e quella su  $\mu$  sulle possibili polarizzazioni del fotone, che ricordiamo è trasverso, quindi non ha componente  $\mu = 0$ .

### Fotoassorbimento

Consideriamo il caso in cui un fotone di multipolarità  $J$  colpisca il *sistema adronico* e venga assorbito, portando così il *sistema adronico* dallo stato  $|\alpha\rangle$  allo stato  $|\beta\rangle$ . In questo caso, nella probabilità di transizione (3.17), la densità di stati finali  $\mathcal{D}(\omega)$  è 2 poiché la transizione finisce in uno stato del *sistema adronico* con ben definita energia,  $E_\beta$ , e può avere due possibilità a seconda che  $\mu = \pm 1$ . La probabilità di transizione è

$$W_{if}^J = \frac{(2\pi)^3}{\hbar} c \frac{\hbar}{k} \frac{(2J+1)(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2} k^{2J} B(EJ : J_\alpha \rightarrow J_\beta) \cdot 2 \quad (3.20)$$

dove ho sostituito  $\omega = kc$ .

Per ottenere la sezione d'urto bisogna dividere per il flusso di fotoni incidenti e mediare sugli stati iniziali. Il flusso è dato da  $c/V$ , e se consideriamo un volume unitario  $V = L^3 = 1$  è dato dalla velocità della luce. Il numero di stati iniziali del *sistema adronico* bersaglio sono  $2J_\alpha + 1$ . Quelli del fotone di multipolarità  $J$  sono  $2(2J+1)$  dove il primo 2 si riferisce alle due possibili polarità del fotone. Quindi

$$\sigma_{J\Pi}(J_\alpha \rightarrow J_\beta) = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{2J_\alpha + 1} \right) \left[ \frac{1}{2(2J+1)} \right] W_{if}^J \quad (3.21)$$

$$= \frac{8\pi^3}{2J_\alpha + 1} \frac{J+1}{J} \frac{1}{J[(2J+1)!!]^2} k^{2J-1} B(EJ : J_\alpha \rightarrow J_\beta) \quad (3.22)$$

### Fotoemissione

Consideriamo adesso il caso in cui il *sistema adronico* faccia una transizione da uno stato iniziale  $|\alpha\rangle$  ad uno stato  $|\beta\rangle$  con energia inferiore ed emetta un fotone di energia  $\hbar\omega = E_\alpha - E_\beta$ .

Considerando la struttura delle condizioni al contorno periodiche abbiamo per la densità degli stati finali del fotone

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} k^2 \frac{1}{\hbar c} d\Omega_k \quad (3.23)$$

La funzione d'onda del fotone è un'onda piana. Consideriamo un cubo di lato  $L$ . Le condizioni al contorno periodiche impongono che la funzione d'onda si ripeta per ogni componente cartesiana dell'impulso del fotone

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i$$

dove  $n_i$  è un numero intero positivo. Considerando le tre dimensioni abbiamo

$$\mathbf{k} = \frac{(2\pi)^3}{L^3} \mathbf{n}_i$$

dove  $\mathbf{n}_i$  è composto da tre numeri interi, ognuno per le tre componenti cartesiane. In termini differenziali, il numero di stati compreso tra le frequenze  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ , quindi tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  è

$$d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3k = \frac{L^3}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega_k$$

dove  $\Omega_k$  è la direzione di  $\mathbf{k}$ . Consideriamo un volume unitario  $L^3 = 1$ , la densità degli stati è

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{d^3n}{d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dk}{d\omega} d\Omega_k = \frac{1}{(2\pi)^3} k^2 \frac{1}{\hbar c} d\Omega_k$$

dove ho considerato  $k = \omega/\hbar c$ .

La probabilità di transizione (3.17) è stata calcolata ipotizzando che l'asse  $z$  fosse nella direzione di  $\mathbf{k}$ . Per tener conto che il fotone può essere emesso in ogni direzione bisogna integrare su tutto lo spazio. Per un fotone di multipolo  $J$ , questo integrale implica la presenza delle matrici di rotazione [Edm57], e fornisce un fattore  $4\pi/(2J+1)$  [Eis70]. La polarizzazione del fotone, infine, contribuisce per un altro fattore 2. Il numero di stati iniziali su cui mediare è  $2J_\alpha+1$ . La probabilità di transizione è data dall'espressione

$$\begin{aligned} T_{\alpha \rightarrow \beta}^{J\pi} &= \frac{1}{2J_\alpha+1} \frac{4\pi}{(2J+1)} 2 W_{if}^J \\ &= \frac{1}{2J_\alpha+1} \frac{8\pi}{(2J+1)} \frac{(2\pi)^3}{\hbar} c \frac{\hbar}{k} \frac{(2J+1)(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2} k^{2J} B(EJ : J_\alpha \rightarrow J_\beta) \frac{k^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar c} \\ &= \frac{1}{2J_\alpha+1} \frac{8\pi}{\hbar} k^{2J+1} \frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2} B(EJ : J_\alpha \rightarrow J_\beta) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.3 Regole di selezione

L'emissione o l'assorbimento di un fotone è conseguenza, o produce, una transizione tra due stati del *sistema adronico* con ben definiti numeri quantici. La conservazione della parità, e del momento

angolare, ha delle conseguenze ben precise nelle regole di selezione tra i multipoli che eccitano o diseccitano il *sistema adronico*.

Consideriamo le conseguenze della conservazione della parità.

$$\Pi_\beta \Pi_\alpha \Pi_{A_{J,M}} \Pi_\gamma = 1 \quad (3.25)$$

dove  $\Pi_\beta$  e  $\Pi_\alpha$  sono le parità degli stati iniziali e finali del bersaglio,  $\Pi_{A_{J,M}}$  è la parità del multipolo elettromagnetico e  $\Pi_\gamma = -1$  è la parità intrinseca del fotone. Quindi abbiamo

$$\Pi_\beta \Pi_\alpha = \Pi_{A_{J,M}} \Pi_\gamma \quad (3.26)$$

$J$	$EJ; \Pi = (-1)^J$	$MJ; \Pi = (-1)^{J+1}$
0	$0^+$	$0^-$
1	$1^-$	$1^+$
2	$2^+$	$2^-$
3	$3^-$	$3^+$
4	$4^+$	$4^-$
5	$5^-$	$5^+$

Tabella 3.1: Eccitazioni di tipo elettrico,  $EJ$ , e magnetico,  $MJ$ , catalogate sulla base del momento angolare e della parità della transizione.

Per uno specifico valore di  $J$  possiamo avere due tipi di parità legate alle eccitazioni di tipo elettrico o magnetico. Le eccitazioni elettriche, denominate in letteratura come  $EJ$  sono caratterizzate da un parità definita come  $(-1)^J$ , detta parità naturale. Le eccitazioni di tipo magnetico  $MJ$  sono caratterizzate da parità  $(-1)^{J+1}$ , non naturale. Nella tabella 3.3 presento una lista di eccitazioni elettriche e magnetiche.

La conservazione del momento angolare implica che  $J$  soddisfi la relazione triangolare di somma dei momenti angolari

$$|J_\alpha - J_\beta| \leq J \leq J_\alpha + J_\beta . \quad (3.27)$$

Sempre per lo stesso motivo si ha che  $M_\alpha - M_\beta = \mu = \pm 1$ .

Da notare che i fotoni reali non producono transizioni con  $J = 0$ . Questo fatto può essere compreso considerando che il fotone è traverso. Questo significa che ogni fotone ha sempre una componente di momento angolare  $\mu = \pm 1$  sull'asse  $z$ , che viene trasferita al *sistema adronico*. Se eccitasse transizioni con  $J = 0$  il *sistema adronico* riceverebbe, come sola possibilità,  $\mu = 0$ , componente esclusa dalla trasversalità del fotone reale.

Le transizioni che abbiamo presentato posseggono una ben precisa gerarchia basata sull'intensità della transizione. La relazione (3.10) indica che le transizioni con  $J$  più basso sono favorite. Propongo qui un modello molto semplice per stimare gli ordini di grandezza delle transizioni.

Supponiamo che il valore  $B$  della (3.24) possa essere descritto nel seguente modo. Consideriamo uguale ad uno il calcolo della parte angolare. Per quanto riguarda la parte radiale, supponiamo che le funzioni d'onda che descrivono il *sistema adronico* siano costanti fino al raggio nucleare  $R$  e poi siano nulle. Gli integrali radiali presenti nel valore  $B$  sono quindi

$$\frac{\int_0^R r^J r^2 dr}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{3}{J+3} R^J \quad (3.28)$$

dove il termine al denominatore è stato inserito per normalizzare l'integrale al volume del nucleo. L'Eq. (3.24) diventa

$$T_{\alpha \rightarrow \beta}^{J\Pi} \frac{1}{2J_\alpha + 1} \frac{8\pi}{\hbar c} \left( \frac{\omega}{\hbar c} \right)^{2J+1} \frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2} e^2 \left( \frac{3}{J+3} \right)^2 R^{2J}$$

dove  $e^2 \simeq 1.44$  MeV fm è la carica elementare. Sostituendo il raggio nucleare con  $R = r_0 A^{1/3}$  dove  $A$  è il numero di nucleoni, protoni più neutroni, con  $r_0 = 1.12$  fm, ed esprimendo in MeV l'energia  $\omega$  del fotone otteniamo

$$\begin{aligned} T^{1^-} &= 1.0 \times 10^{14} A^{2/3} \omega^3 \\ T^{2^+} &= 7.3 \times 10^7 A^{4/3} \omega^5 \\ T^{3^-} &= 34 A^2 \omega^7 \\ T^{4^+} &= 1.1 \times 10^{-5} A^{8/3} \omega^9 \end{aligned}$$

Con un procedimento analogo si ottiene per le transizioni magnetiche [Kra88]

$$\begin{aligned} T^{1^+} &= 5.6 \times 10^{13} \omega^3 \\ T^{2^-} &= 3.5 \times 10^7 A^{2/3} \omega^5 \\ T^{3^+} &= 16 A^{4/3} \omega^7 \\ T^{4^-} &= 4.5 \times 10^{-6} A^2 \omega^9 \end{aligned}$$

Quanto presentato mostra che c'è la seguente gerarchia tra le intensità delle transizioni elettromagnetiche

$$\begin{aligned} |E(J+1)|^2 &< |E(J)|^2 \\ |M(J+1)|^2 &< |M(J)|^2 \\ |M(J)|^2 &< |E(J)|^2 \end{aligned}$$

dove il segno minore implica circa un ordine di grandezza di differenza.

In questa scala gerarchica il multipolo con maggiore intensità è il dipolo elettrico  $1^-$ . Nello sviluppo in multipoli che abbiamo presentato l'operatore di dipolo elettrico è rappresentato da

$$\mathbf{D} = r Y_{1,\mu}(\theta, \phi)$$

Consideriamo che in coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{i\phi} = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,1}(\theta, \phi) \\ r_0 &= z = r \cos \theta = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,0}(\theta, \phi) \\ r_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{-i\phi} = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,-1}(\theta, \phi) . \end{aligned}$$

Questo indica che la comune trattazione nel quale l'operatore di dipolo è sempre indicato come

$$\mathbf{D} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i .$$

corrisponde al primo termine dello sviluppo in multipoli che abbiamo presentato.

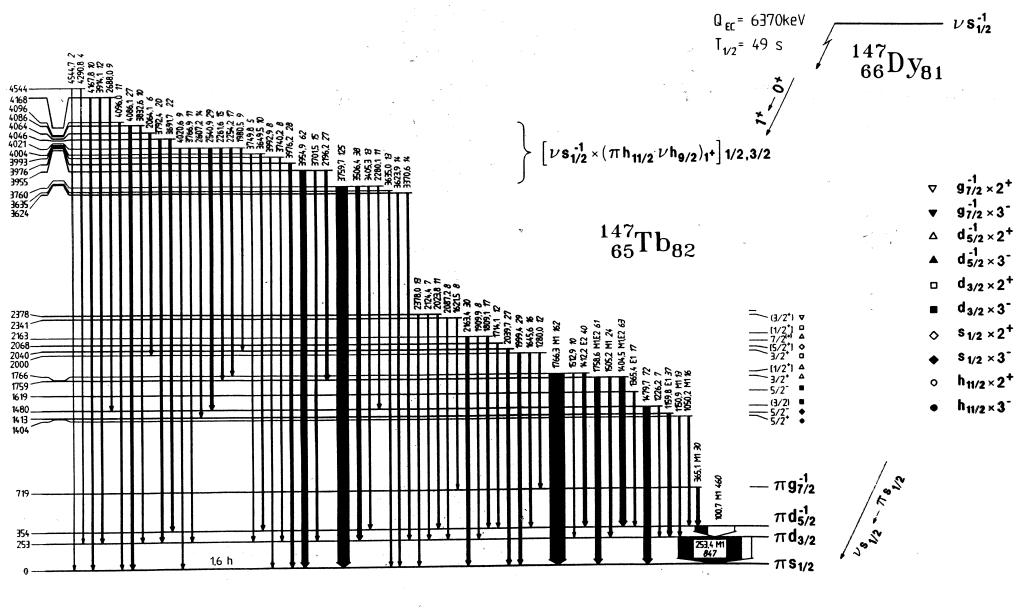


Figura 3.1: Spettro di decadimento  $\gamma$  misurato nel nucleo  $^{147}\text{Tb}$  [Led78]. L'ampiezza delle righe è proporzionale al valore  $B$ . I numeri sull'asse  $y$  sono le energie del livello in keV. I numeri su ogni riga indicano l'energia del  $\gamma$ , in keV.

### 3.4 Confronto con l'osservazione

Ogni *sistema adronico* ha uno spettro di emissione  $\gamma$  che lo identifica univocamente. Per questo motivo che lo studio dello spettro di emissione  $\gamma$  è uno dei passi fondamentali per la comprensione della struttura di ogni *sistema adronico*. Il lavoro sperimentale legato allo studio dello spettro di emissione di radiazione elettromagnetica, in ogni settore della fisica microscopica, è molto sviluppato ed avanzato. Nella Figura 3.1 mostro, come esempio, lo spettro di emissione  $\gamma$  misurato nel nucleo  $^{147}\text{Tb}$ . Come di può osservare, la struttura dello spettro è estremamente complicata, ed identifica univocamente questo isotopo. Moderni esperimenti riescono ad identificare i fotoni emessi in un angolo solido di poco inferiore a  $4\pi$  attorno al nucleo emettitore. Identificando l'energia del fotone emesso, e la distribuzione angolare, è possibile ricostruire la multipolarità, cioè il momento angolare. Questo permette di ricostruire lo schema degli stati, fondamentale ed eccitati, del *sistema adronico*.

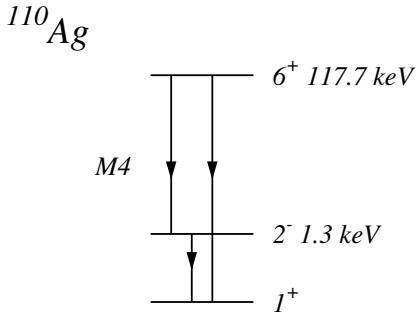


Figura 3.2: Schema dei livelli del nucleo  $^{110}\text{Ag}$ .

da quella del  $^{110}\text{Ag}$  nel suo stato fondamentale. Quindi il nucleo  $^{110}\text{Ag}$  nello stato  $6^+$  viene detto isomero e normalmente viene contrassegnato come  $^{110}\text{Ag}^*$ .

La descrizione dei livelli energetici del *sistema adronico* è una sfida per ogni teoria a molticorpi. Non entro nei dettagli di una possibile descrizione del nucleo  $^{147}\text{Tb}$ , estremamente complicata, ma mi soffermo a discutere i risultati ottenuti per la descrizione di un *sistema adronico* più semplice, il nucleo  $^{16}\text{O}$ . Si tratta di un sistema sferico nel quale tutti i livelli di singola particella sono occupati. Il nucleo è detto doppio-magico, ed è l'analogo nucleare dei gas nobili in fisica atomica. Nella figura 3.3 mostro i risultati ottenuti con vari modelli nucleari che descrivono la sezione d'urto totale di fotoassorbimento, Eq. (3.22), in funzione dell'energia del fotone assorbito.

I dati sperimentali mostrano un picco attorno ai 23 MeV. La presenza di un picco analogo nelle sezioni d'urto di tutti i nuclei con un numero di nucleoni superiore a 10, fu un fatto riconosciuto sin dalla metà degli anni '20 del secolo scorso. Questo picco fu denominato *risonanza gigante*. Nella figura vengono presentati i risultati di due diversi modelli nucleari. Il modello identificato con IPM (Independent Particle Model) è un modello a campo medio nel quale i nucleoni si muovono in un potenziale medio attrattivo che li tiene legati, ma si trascura l'interazione tra loro. Ogni nucleone ha una ben precisa energia e il suo moto è caratterizzato dal momento angolare totale, e dalla sua proiezione sull'asse di quantizzazione  $z$ . In questo modello gli stati eccitati sono costruiti promuovendo un nucleone da uno stato di singola particella al di sotto della superficie di Fermi

Nella figura 3.2 presento lo schema dei livelli del nucleo  $^{110}_{47}\text{Ag}_{63}$ . Si tratta di un nucleo dispari-dispari il cui stato fondamentale è caratterizzato dal momento angolare e parità  $1^+$ . Come si vede il primo stato eccitato è un  $2^-$  seguito da un  $6^+$ . L'isotopo  $^{110}\text{Ag}$  nello stato eccitato  $6^+$  può decadere  $\gamma$  nello stato fondamentale con transizione con  $J$  minimo 5 e conservazione di parità. Si tratta di una transizione  $5^+$ , che nella classificazione che abbiamo fatto corrisponde a  $M5$ . D'altra parte può decadere sullo stato eccitato  $2^-$  con  $J$  minimo 4 e cambio di parità. In questo caso, la transizione è  $M4$ . Entrambe queste transizioni sono poco probabili, e quindi la vita media del  $^{110}\text{Ag}$  nel suo stato  $6^+$  è particolarmente lunga. Sufficientemente lunga da permettere a questo *sistema adronico* di entrare in uno spettrometro di massa in modo che la sua massa sia misurata, e risulta differente

ad uno sopra la superficie di Fermi. Nel caso specifico della figura, il modello è stato costruito risolvendo equazioni Hartree-Fock con o due diverse interazioni tra i nucleoni dette D1S e D1M.

Più complicato è il modello denominato CRPA (Continuum Random Phase Approximation). In questo caso il modello descrive gli stati eccitati del sistema come combinazione lineare delle eccitazioni di singola particella su cui si basa l'IPM. I coefficienti di questa combinazione sono legati all'interazione tra i nucleoni, che sono indicate nella figura come D1S e D1M. I risultati CRPA descrivono modi di eccitazione che coinvolgono vari nucleoni.

La figura mostra chiaramente che solo considerando l'interazione tra i nucleoni è possibile descrivere la presenza della risonanza gigante. Si tratta di una eccitazione che coinvolge un gran numero di nucleoni che si muovono con una certa coerenza. Come si vede dalla figura il multipolo dominante è  $1^-$ . Nel pannello (b) viene mostrato il contributo del  $2^+$ , il multipolo che contribuisce di più oltre il dipolo. Si vede chiaramente dalla scala dell'asse  $y$  che il contributo è un ordine di grandezza inferiore a quello dell' $1^-$ , come avevamo previsto nella nostra rozza stima. La descrizione dei dati sperimentali da parte della teoria CRPA non è ancora soddisfacente, ma comunque riesce a descrivere la posizione sperimentale del picco della risonanza gigante.

Nei pannelli inferiori la figura mostra l'andamento dell'integrale della sezione d'urto del pannello superiore dove come limite superiore c'è l'energia dell'asse  $x$

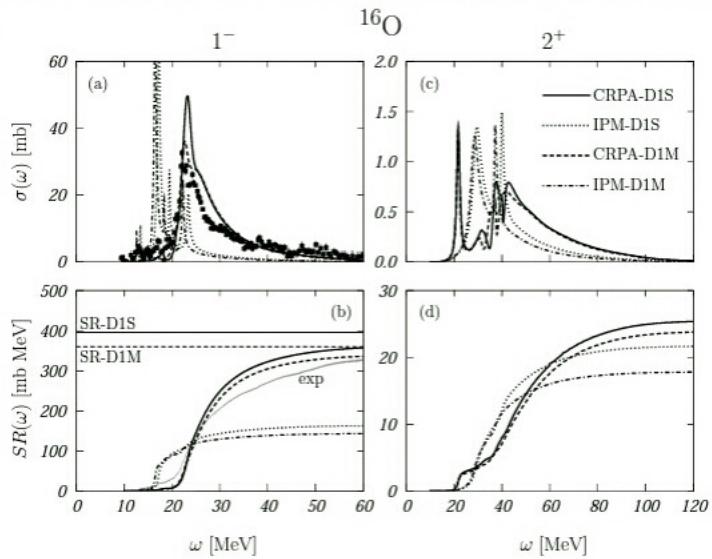


Figura 3.3: Sezione totale di fotoassorbimento del nucleo  $^{16}\text{O}$  in funzione dell'energia di eccitazione. I dati sperimentali [Ahr75] sono confrontati con i risultati di diversi modelli nucleari. I risultati IPM indicano il modello di campo medio dove le funzioni d'onda di singola particella sono ottenute risolvendo le equazioni Hartree-Fock. I risultati indicati come CRPA, che significa Continuum Random Phase Approximation descrivono fenomeni collettivi dell'eccitazione. D1S e D1M indicano due diverse interazioni tra nucleoni. Il pannello (a) mostra la sezione d'urto calcolata per l'eccitazione  $1^-$ , il pannello (c) per la  $2^+$ . I pannelli inferiori della figura mostrano l'andamento degli integrali delle precedenti figure.

$$SR(\omega) = \int_0^\omega dE \sigma_{J\Pi}(E)$$

L'informazione contenuta nei pannelli (b) e (d) è che l'intensità totale della sezione d'urto raggiunge un massimo asintotico. Nel confronto con l'intensità sperimentale fatto nel pannello (b) si vede che la teoria eccede di poco l'intensità osservata.



# Bibliografia

- [Ahr75] J. Ahrens *et al.*, Nucl. Phys. A 251 (1975) 479.
- [Bjo65] J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, New York, (1965).
- [Bra03] B. H. Bransden, C. J. Joachain, Physics of Atoms and Molecules, Prentice Hall, Harlow (2003).
- [Eis70] J. M. Eisenberg, W. Greiner, Excitation Mechanisms of the Nucleus, Nuclear Theory, North Holland, Amsterdam (1970).
- [Edm57] A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton (1957).
- [Jak98] J. D. Jakson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, New York (1998).
- [Kra88] K. S. Krane, Introductory Nuclear Physics, John Wiley, New York (1988).
- [Led78] C. M. Lederer, V. S. Shirley, Table of isotopes, John Wiley and Sons, New York (1978).
- [Mes99] A. Messiah, Quantum Mechanics, North Holland, Amsterdam (1961).
- [Pur71] E. M. Purcell, La fisica di Berkeley. Elettricità e magnetismo. Zanichelli, Bologna (1971).
- [Wal13] J. D. Walecka, Topics in modern physics. Theoretical Foundations, World Scientific, Singapore, (2013).