

## Lezione 15

# Struttura del protone

## Momento magnetico anomalo

$$\mu = \frac{e\hbar}{2Mc} = g \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{2Mc}$$

Analogo semi-classico. Elettone che orbita. Corrente generata.

$$I = e\nu = e \frac{\omega}{2\pi}$$

Momento di dipolo magnetico

$$|\mathbf{M}| = A \frac{I}{c} = \pi r^2 \frac{1}{c} e \frac{\omega}{2\pi}$$

A area del circuito

Momento angolare

$$|\mathbf{L}| = m_e r^2 \omega = \hbar |l|$$

Sostituendo gli autovalori di  $l$   $\omega = \hbar l / m_e r^2$  quindi

$$|\mathbf{M}| = \frac{e r^2}{c} \frac{\hbar l}{2 m_e r^2} = \frac{e\hbar}{2m_e c} l$$

Unità minima ( $l = 1$ ) è il magnetone di Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

Momento magnetico dell'elettrone

$$\mu_e = g \frac{1}{2} \mu_B$$

In QED  $g = 2$  fino a  $10^{-8}$

Per i nucleoni

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N c} \quad m_N = \frac{1}{2}(m_p + m_n)$$

protone  $\mu_p = 2.79\mu_N$

neutrone  $\mu_n = -1.91\mu_N$

# Diffusione elastica di elettroni da protoni

## 1) Cinematica

$$k_i + p_i = k_f + p_f \quad ; \quad \epsilon_i + M = \epsilon_f + E_f \quad ; \quad \mathbf{k}_i + 0 = \mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f$$

$$E_f - M = \epsilon_i - \epsilon_f \equiv \omega \quad ; \quad \mathbf{p}_f = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \equiv \mathbf{q}$$

$$E_f^2 = M^2 + \mathbf{p}_f^2 \quad ; \quad (\omega + M)^2 = M^2 + \mathbf{q}^2$$

$$\omega^2 + 2M\omega + M^2 = M^2 + \mathbf{q}^2 \quad ; \quad \omega^2 + 2M\omega - \mathbf{q}^2 = 0$$

$$\omega = -M \pm \sqrt{M^2 + \mathbf{q}^2} = -M \pm M \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}^2}{M^2} + \dots \right)$$

Selezionando la soluzione +.

$$\omega = -M + M + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}^2}{M} = \frac{\mathbf{q}^2}{2M}$$

Relazione univoca tra  $q$  e  $\omega$ .

## Sezione d'urto

Rinculo del bersaglio non più trascurabile

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \frac{1}{1 + \frac{2\epsilon_i}{M} \sin^2 \theta/2} = \sigma_M \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \sigma_M f_{rec}$$

Sezione d'urto di Mott

$$\sigma_M = \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta/2}{4\epsilon_i^2 \sin^4 \theta/2}$$

$$|\mathbf{k}| = \epsilon \quad ; \quad m_e \ll \epsilon \quad ; \quad q^2 = \epsilon_i^2 + \epsilon_f^2 - 2\epsilon_i\epsilon_f \cos \theta$$

$$\epsilon_i^2 \simeq \epsilon_f^2 \quad ; \quad q^2 \simeq 2\epsilon_i\epsilon_f(1 - \cos \theta) = 4\epsilon_i\epsilon_f \sin^2 \theta/2$$

$$1 + \frac{2\epsilon_i}{M} \sin^2 \theta/2 = 1 + \frac{q^2}{2M\epsilon_f} = \frac{1}{\epsilon_f} \left( \epsilon_f + \frac{q^2}{2M} \right) = \frac{1}{\epsilon_f} (\epsilon_f + \omega) = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f}$$

## Sezione d'urto

Momento magnetico del bersaglio.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{punt} = f_{rec} \sigma_M \left[ 1 + 2 \frac{\mathbf{q}^2 - \omega^2}{4M^2} \tan^2 \theta/2 \right]$$

Cambio di variabili

$$Q^2 = -q_\mu q^\mu = \mathbf{q}^2 - \omega^2 \quad \tau = \frac{Q^2}{4M^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{punt} = f_{rec} \sigma_M \left[ 1 + 2\tau \tan^2 \theta/2 \right]$$

## Fattori di forma

Dirac

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right) = f_{rec} \sigma_M \left[ F_E(Q^2) + 2\tau F_M(Q^2) \tan^2 \theta/2 \right]$$

Sachs (più usati)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right) = f_{rec} \sigma_M \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \theta/2 \right]$$

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= 1 & ; & & G_E^n(0) &= 0 \\ G_M^p(0) &= 2.79 & ; & & G_M^n(0) &= -1.91 \end{aligned}$$

Separazione di Rosenbluth

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)}{f_{rec} \sigma_M} = \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \theta/2 \right]$$

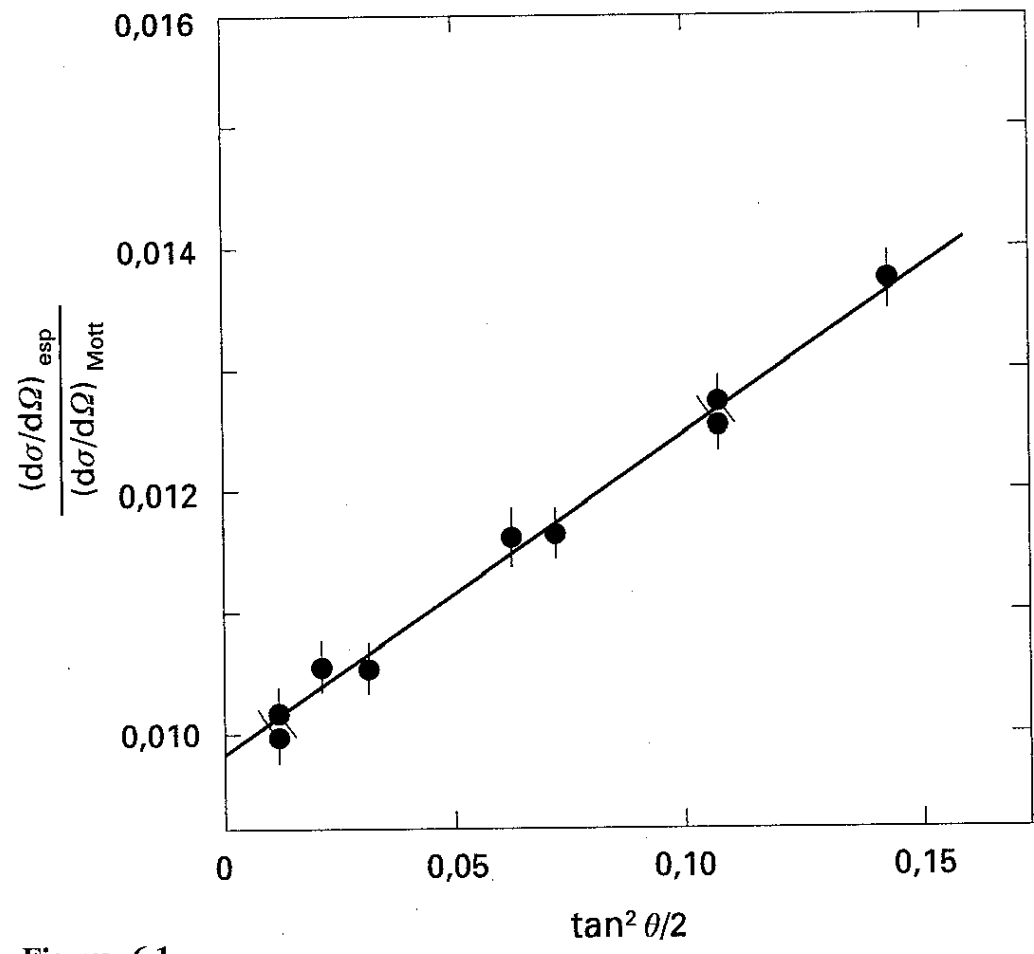


Figura 6.1



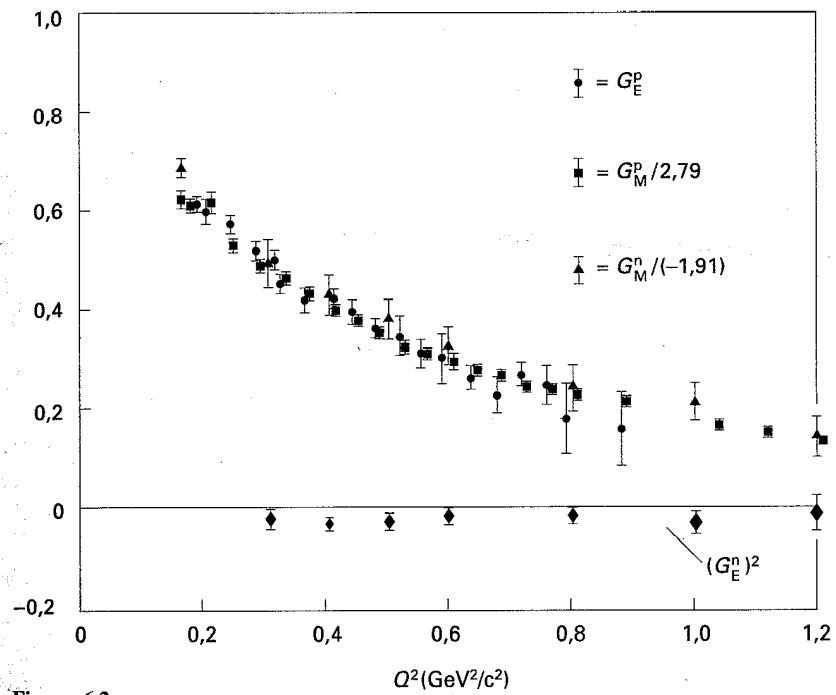


Figura 6.2

$$G_E^p(Q^2) \simeq \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} \simeq \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91} \simeq G^{\text{dipolo}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71[\text{GeV}^2]}\right)^{-2}$$

$$\omega \ll M$$

$$\begin{aligned} F(|\mathbf{q}|^2) &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(r) = \int d^3r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^n \right] \rho(r) \\ &= \int d\Omega \int_0^{\infty} dr r^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (|\mathbf{q}||\mathbf{r}|)^2 \cos^2 \theta + \dots \right] \rho(r) \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \rho(r) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos^2 \theta \int_0^{\infty} dr r^2 (|\mathbf{q}||\mathbf{r}|)^2 \rho(r) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{6} |\mathbf{q}|^2 4\pi \int_0^{\infty} dr r^4 \rho(r) + \dots = 1 - \frac{1}{6} |\mathbf{q}|^2 \langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{dF(|\mathbf{q}|^2)}{d|\mathbf{q}|^2} = -\frac{1}{6} \langle r^2 \rangle \quad ; \quad \langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(|\mathbf{q}|^2)}{d|\mathbf{q}|^2} \Big|_{q^2=0}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_p} \simeq 0.862 \text{ fm}$$

# Domande

[P2-1] Presenta alcune evidenze empiriche del fatto che il protone abbia dimensioni finite e struttura interna.

[P2-3] Come sono normalizzati i fattori di forma  $G_E(Q^2)$  e  $G_M(Q^2)$  del protone e del neutrone nel limite in cui il quadrimomento  $Q$  tende a zero?

[P4-2] La sezione d'urto di diffusione elastica di elettroni su muoni nel sistema del laboratorio è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f_{rec}\sigma_M \left[ 1 + 2\frac{\mathbf{q}^2 - \omega^2}{4M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dove  $f_{rec}$  è un fattore che considera il rinculo del bersaglio,  $\sigma_M$  la sezione d'urto di Mott,  $\mathbf{q}$  il trimomento trasferito, e  $\omega$  l'energia persa dall'elettrone. Che tipo di processi descrive la sezione d'urto di Mott? Quali sono le ipotesi che portano alla sua espressione? Perché nel caso in questione la sezione d'urto di Mott è corretta dalla presenza del secondo termine tra parentesi quadre?

[P4-3] La sezione d'urto elastica di diffusione di elettroni su protoni nel sistema del laboratorio può essere scritta come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f_{rec}\sigma_M \left[ F_E(\mathbf{q}^2) + 2F_M(\mathbf{q}^2) \frac{\mathbf{q}^2 - \omega^2}{4M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dove  $f_{rec}$  è un termine che considera il rinculo del nucleo,  $\sigma_M$  la sezione d'urto di Mott,  $\mathbf{q}$  il trimomento trasferito, e  $\omega$  l'energia persa dall'elettrone. Qual' è l'interpretazione fisica dei fattori  $F_E$  ed  $F_M$ ?