Lezione 11

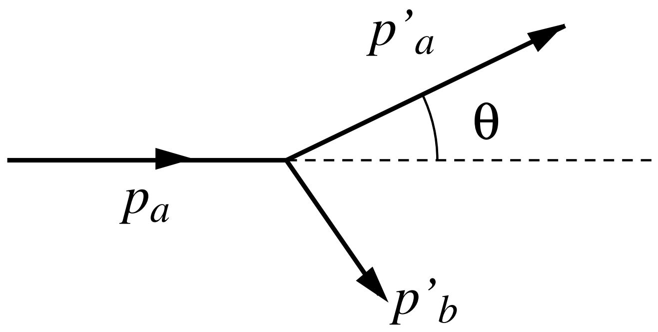
Sezione d'urto

Diffusione elastica

$$a + b \rightarrow a + b$$

a proiettile, b bersaglio.

Solo scambio di energia cinetica tra proiettile e bersaglio.



$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b \quad ; \quad \mathbf{p}_a - \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}'_b = \mathbf{q}$$

Momento trasferito $\mathbf{q} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}'_a$. In laboratorio $\mathbf{p}_b = 0$

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b$$

Energia cinetica

$p = |\mathbf{p}|$

$$\frac{p_a^2}{2m_a} + 0 = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{q^2}{2m_b} = \frac{p_a'^2}{2m_a} + \frac{p_a^2 + p_a'^2 - 2\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_a'}{2m_b} \tag{1}$$

$$\frac{p_a'^2}{2}\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right) - p_a' \frac{p_a}{m_b} \cos\theta + \frac{p_a^2}{2}\left(\frac{1}{m_b} - \frac{1}{m_a}\right) = 0$$

Relazione univoca tra p_a, p_a' e θ.
Se in (1) ci fosse un termine addizionale prodotto dall'assorbimento di energia da parte della struttura interna del bersaglio, o del proiettile, la relazione non sarebbe più univoca.

In processi di diffusione elastica l'energia cinetica totale è conservata.

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{pc} = \frac{\hbar c}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_{kin} + E_{kin}^2}}$$

$$E_{kin} = E - mc^2 \quad ; \quad E^2 - m^2c^4 = (E_{kin} + mc^2)^2 - m^2c^4 = 2mc^2 E_{kin} + E_{kin}^2$$

Potere risolutivo

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad ; \quad \Delta x \geq \frac{\hbar c}{pc} \simeq \frac{200\,\mathrm{MeV\,fm}}{pc}$$

Diffusione anelastica

$$a + b \to a' + b' \quad ; \quad a + b \to c + d + e + \cdots$$

Parte dell'energia cinetica viene trasformata in energia di eccitazione del bersaglio o del proiettile.

Conservazione di

$$E \; , \; \mathbf{p} \; , \; \mathbf{J}, \; , \; \cdots$$

Spettroscopia

Dinamica dell'interazione

Particelle di velocità $\mathbf{v}$ e densità

$$n_a = \frac{N_a}{V}$$

Flusso

$$\Phi_a = n_a|\mathbf{v}| = \frac{N_a}{V}v \qquad\qquad [l^{-2}][t^{-1}]$$

Numero di particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Ipotesi Densità n_a piccola da trascurare l'interazione tra particelle incidenti.

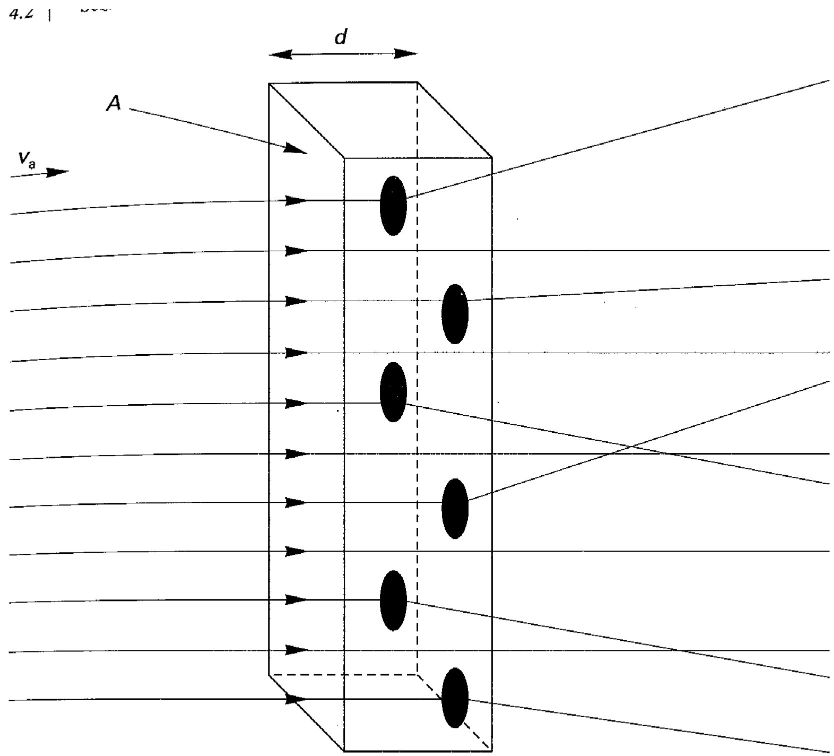
Il numero di particelle rivelate nell'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo è proporzionale al flusso e a Ω.

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \Sigma(\Omega)\Phi_a d\Omega$$

Dimensioni di $\Sigma(\Omega)$ $[superficie]/[sr]$

Ipotesi Nel bersaglio le distanze tra i centri diffusori sono tali da evitare diffusione coerente ($\lambda \ll d$).

Ipotesi Lo spessore è tale da evitare diffusione multipla.



Il numero di particelle diffuse è proporzionale al numero di centri diffusori.

$$\frac{N(\Omega)}{\Delta t} = \sigma(\Omega) N_b \Phi_a d\Omega$$

$\sigma(\Omega)$ sezione d'urto differenziale

$$\sigma(\Omega) = \frac{n^o \text{particelle diffuse per unita}' \text{ di tempo nell}'\text{angolo } d\Omega}{\text{flusso incidente} \qquad \mathrm{N_b}}$$

dimensioni $\sigma(\Omega)$ $[l^2][\mathrm{sr}]$

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega) d\Omega$$

barn $\equiv$ b $= 10^{-28}$ m^2
1 mb $= 10^{-31}$ m^2, 1 fm^2 $= 10^{-30}$ m^2 $=$ 10 mb

$$\frac{d^2\sigma(\epsilon, \epsilon', \Omega)}{d\Omega d\epsilon'}$$

$$\sigma_{tot} = \int_0^\infty d\epsilon' \int_{4\pi} d\Omega \frac{d^2\sigma(\epsilon, \epsilon', \Omega)}{d\Omega d\epsilon'}$$

Regola d'oro di Fermi

Numero di particelle diffuse nell'unità di tempo con energia ϵ'

$$\frac{N(\epsilon')}{\Delta t} = N_a N_b \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(\epsilon')$$

$$M_{fi} = < \psi_f | H_{int} | \psi_i > = \int_V dV \psi_f^* H_{int} \psi_i$$

M_{fi} Elemento di matrice di transizione.

Ampiezza di probabilità di effettuare la transizione.

H_{int} hamiltoniana di interazione.

$\rho(\epsilon')$ densità degli stati finali.

$\psi_{i,f}$ funzioni d'onda stati iniziale e finale del proiettile.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad ; \quad \int_V dV \psi^*(x) \psi(x) = 1$$

Spazio, scatola quadrata di lato L, $V = L^3$. Al termine del calcolo $L \to \infty$.
Condizioni periodiche

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \quad ; \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad ; \quad k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$$

$$d^3n = \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3}k^2dkd\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}p^2\,dp\,d\Omega$$

$$d\epsilon' = d(\frac{1}{2}mv'^2) = \frac{1}{2}m2v'\,dv' = v'\,mdv' = v'\,dp'$$

$$\rho(\epsilon') = \frac{d^3n}{d\epsilon'} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p'^2dp'd\Omega}{v'\,dp'} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p'^2}{v'}d\Omega$$

Definizione empirica = definizione teorica

$$\frac{N(\epsilon')}{\Delta t} = \sigma(\epsilon') N_b \Phi_a d\Omega = \sigma(\epsilon') N_b \frac{N_a}{V} v d\Omega = N_a N_b \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(\epsilon')$$

$$\begin{aligned} \sigma(\epsilon') &= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{V}{v}|M_{fi}|^2 \frac{\rho(\epsilon')}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{V}{v}|M_{fi}|^2 \frac{1}{d\Omega} \qquad \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p'^2}{v'}d\Omega \\ &= \frac{2\pi}{\hbar v}|M_{fi}|^2 \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p'^2}{v'} \end{aligned}$$

$$M_{fi} = < \psi_f | H_{int} | \psi_i > \sim \left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)$$

Domande

[N1-11] [N2-9] [N3-11]