

Modelli a particelle indipendenti

1 Introduzione

Nei modelli a particelle indipendenti, o meglio a campo medio, il problema a multicorpi viene enormemente semplificato.

Supponendo che esistano solo interazioni a due corpi, l'hamiltoniana nucleare, può essere scritta come:

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i<j}^A V(i,j), \quad (1)$$

dove $T(i)$ è l'energia cinetica, e $V(i,j)$ l'interazione tra le particelle i e j . All'hamiltoniana si aggiunge e toglie un termine ad un corpo (il campo medio):

$$H = \left[\sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] + \left[\sum_{i<j}^A V(i,j) - \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] = H_0 + V_{res}. \quad (2)$$

Il modello a campo medio risolve l'equazione di Schrödinger solo per la parte H_0 dell'hamiltoniana, che, per definizione, è somma di hamiltoniane di singola particella:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) = \sum_{i=1}^A [T(i) + V_0(i)]. \quad (3)$$

L'hamiltoniana $h(i)$ genera una base ortonormale di funzioni d'onda di singola particella. L'autovettore dell'hamiltoniana H_0 è un determinante di Slater delle funzioni d'onda di singola particella. Questo garantisce l'antisimmetrizzazione delle funzioni d'onda.

Nei modelli a campo medio i valori degli osservabili di tutto il sistema sono ottenuti sommando i contributi di ogni singolo nucleone. Questo è strettamente vero per quegli osservabili descrivibili da operatori ad un corpo, come ad esempio densità ed energia cinetica, ma non per osservabili descrivibili solo con operatori a più corpi come, ad esempio, l'energia totale del sistema.

2 Il modello a gas di Fermi

2.1 Introduzione

Il modello a gas di Fermi descrive il nucleo come fosse un sistema infinito di nucleoni non interagenti

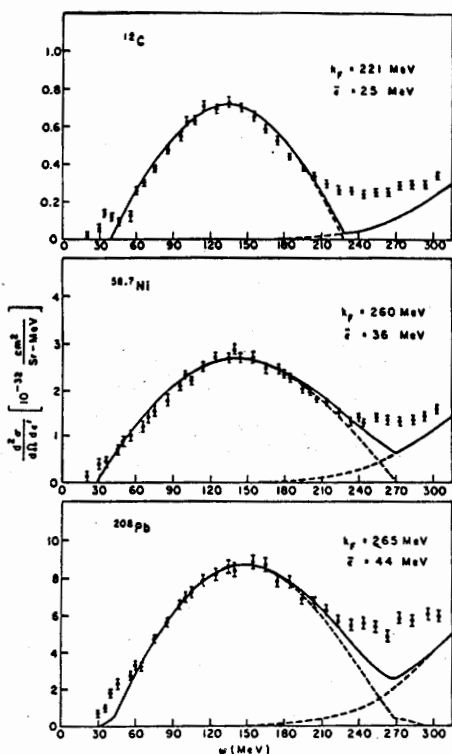


Figura 1: Sezioni d'urto di diffusione anelastica di elettroni su nuclei nella regione del picco quasi-elastico, calcolate con il modello a gas di Fermi e confrontate con dati sperimentali.

tra loro. Il modello estremo, che tratterò in queste note, prevede che il numero di protoni e di neutroni sia lo stesso, e che l'interazione di Coulomb sia spenta. Un sistema infinito gode di invarianza traslazionale, quindi la base di funzione d'onda di singola particella è quella delle onde piane che

offre indubbi vantaggi nella trattazione analitica.

Considerare il nucleo come sistema infinito non è comunque un puro artificio teorico. Fenomeni che non coinvolgono le dimensioni globali del nucleo, sono ben descritti dal modello di nucleo infinito. Ad esempio, l'eccitazione del nucleo nella regione del picco quasi-elastico, quindi per energie di eccitazione di qualche centinaia di MeV e momenti trasferiti di varie centinaia di MeV/c, è ben descritta da modelli di nucleo infinito (vedi la figura 1).

Dal punto di vista empirico gli osservabili più studiati con modelli di nucleo infinito sono la densità e l'energia di legame per nucleone. I due osservabili non sono indipendenti tra loro. La ricerca di una teoria che, partendo dall'interazione realistica tra due nucleoni, riesca a prevedere la stabilità della materia nucleare nella regione della stabilità empirica è uno dei problemi ancora aperti della fisica nucleare.

Una discussione sulle teorie a multicorpi utilizzate nello studio della materia nucleare è al di là degli scopi di queste note. Mi limiterò a discutere come si ottengono i valori empirici di energia di legame e densità per un sistema infinito. Poi considererò il modello di Fermi gas estremo per mostrare come si possa ottenere una equazione di stato.

2.2 Valori empirici della densità e dell'energia di legame

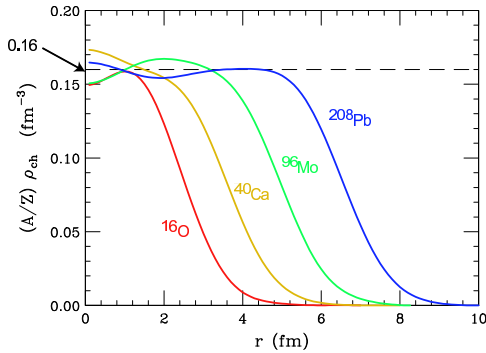


Figura 2: Densità di carica di alcuni nuclei.

Le evidenze empiriche provenienti dalla diffusione elastica di elettroni da nuclei indicano che le distribuzioni di carica nel centro dei nuclei hanno valori simili per i diversi nuclei su tutta la tavola periodica (Fig. 2). Semplificando la situazione, consideriamo il nucleo come una sfera a densità costante di raggio R . Quindi la densità costante si ottiene dividendo il numero di nucleoni per il volume della sfera:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} \\ &= \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.17 \pm 0.02 \text{ fm}^{-3} \end{aligned} \quad (4)$$

Nell'equazione precedente abbiamo utilizzato la relazione empirica $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ con $r_0 = 1.12 \text{ fm}$.

Per quanto riguarda il valore dell'energia di legame, consideriamo la formula semi-empirica della massa e analizziamone il comportamento facendo tendere all'infinito sia il volume sia il numero di nucleoni. Ovviamente la quantità per nucleone deve rimanere finita perché possa avere significato fisico.

L'energia di legame di un nucleo espressa dalla formula semi-empirica della massa è:

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \\ &+ a_i \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \end{aligned} \quad (5)$$

Come accennato nell'introduzione, nel sistema considerato abbiamo lo stesso numero di protoni e neutroni. Questa ipotesi che cancella il termine di asimmetria è introdotta per semplificare la presentazione, ma non è necessaria per assicurare la stabilità del sistema. Infatti ci sono studi su materia nucleare asimmetrica, con differente numero di protoni e neutroni, e addirittura studi su materia neutronica. Le stelle di neutroni, che si identificano con le pulsar, sono al momento i sistemi fisici esistenti in natura più simili alla materia nucleare.

Ben più rilevante l'altra approssimazione menzionata nell'introduzione: l'interazione Coulombiana viene spenta. Questa ipotesi è necessaria per la stabilità del sistema infinito dato che l'interazione coulombiana è a lungo raggio e porterebbe quindi ad una repulsione infinita nel limite per numero di particelle infinito. Utilizzando queste ipotesi, l'espressione dell'energia di legame per nucleone è:

$$\frac{B(A, Z)}{A} = a_v + a_s A^{-\frac{1}{3}} + \frac{\delta(A)}{A}, \quad (6)$$

e nel limite per A tendente all'infinito sopravvive solo il termine $a_v = 16.0$ MeV.

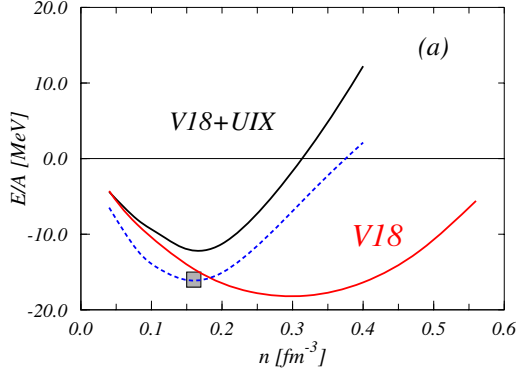


Figura 3: Equazioni di stato di materia nucleare simmetrica per alcune interazioni nucleone-nucleone.

Una corretta descrizione della materia nucleare deve prevedere un'equazione di stato che legni l'energia di legame per nucleone con la densità del sistema, Fig. 3. Il minimo di questa funzione deve cadere nella regione empirica in cui per $\rho = 0.17 \pm 0.02 \text{ fm}^{-3}$ si ha $B(A, Z)/A = 16.0 \pm 1.0$ MeV.

2.3 Equazione di stato nel modello a gas di Fermi

Il sistema che stiamo considerando è infinito ed omogeneo esiste, quindi, invarianza traslazionale. Questo significa che la densità di probabilità di trovare una particella deve essere costante in ogni punto del sistema. Le funzioni d'onda di singola particella che godono di questa proprietà sono le onde piane:

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \chi_{s_a} \chi_{t_a}, \quad (7)$$

dove i sottoindici s e t indicano la terza componente dello spin e dell'isospin della particella e χ è il tradizionale spinore di Pauli normalizzato come

$$\chi_s^\dagger \chi_{s'} = \delta_{s, s'}. \quad (8)$$

Data l'espressione precedente delle funzioni d'onda di singola particella, ogni prodotto scalare deve essere moltiplicato per un fattore $V/(2\pi)^3$, infatti:

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3r \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)}{V}. \quad (9)$$

Il fattore moltiplicativo necessario per la corretta normalizzazione dei prodotti scalari, è lo stesso anche quando il prodotto scalare viene fatto nello spazio complementare degli impulsi.

Se il modulo quadro della funzione d'onda di singola particella dà la probabilità di trovare la particella in un punto dello spazio, per un sistema di particelle non interagenti, la densità totale del sistema, ovvero

la probabilità di trovare una particella qualsiasi in un certo punto dello spazio, è data dalla somma delle probabilità prodotta da ogni particella:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2. \quad (10)$$

In questa equazione la somma è limitata al numero A di nucleoni. Successivamente faremo tendere all'infinito questo numero.

Il sistema in oggetto è composto da fermioni che obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Dato che ciò che distingue le singole particelle è il loro impulso \mathbf{k} , lo stato fondamentale del sistema sarà configurato in modo che tutti gli stati con $0 \leq |\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}|_F$ siano occupati e tutti gli altri siano vuoti. Il massimo valore dell'impulso, $|\mathbf{k}|_F$ è detto impulso di Fermi, e l'energia associata energia di Fermi. L'espressione della densità del sistema diventa:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \sum_{a \leq k_F} |\phi_a(\mathbf{r})|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k_a \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \sum_{s_a} \chi_{s_a}^+ \chi_{s_a} \sum_{t_a} \chi_{t_a}^+ \chi_{t_a} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4}{V} \int_0^{k_F} d^3k_a = \frac{4}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k_a^2 dk_a = \frac{16\pi}{8\pi^3} \frac{k_F^3}{3} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Questo risultato mostra come la densità del sistema sia indipendente da \mathbf{r} . Questo era comunque atteso visto che la densità di ogni singola particella lo è. Più rilevante il fatto che sia indipendente dal numero di nucleoni. Inoltre dipende dal momento di Fermi. Utilizzando il valore empirico della densità si trova che il valore del momento di Fermi è $k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1} = 250 \text{ MeV}/c$. L'energia cinetica associata al momento di Fermi è:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = 38.35 \text{ MeV}. \quad (12)$$

Un calcolo analogo può essere fatto per ottenere l'energia cinetica del sistema. Il valore d'aspettazione dell'energia cinetica di una particella è dato da:

$$\langle \phi_a | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 | \phi_a \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3r \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{\hbar^2}{2m} k_a^2 \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \sum_{s_a, t_a} \chi_{s_a}^+ \chi_{s_a} \chi_{t_a}^+ \chi_{t_a} = 4 \frac{\hbar^2}{2m} k_a^2.$$

L'energia cinetica del sistema è:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{a \leq k_F} \langle \phi_a | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 | \phi_a \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} 4 \int_0^{k_F} d^3k_a \frac{\hbar^2}{2m} k_a^2 \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4(4\pi) \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} k_a^2 dk_a k_a^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} 16\pi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{5} k_F^5. \end{aligned} \quad (13)$$

Dalla relazione (11) si ottiene un'espressione per k_F^3 che inserita nella precedente equazione dà:

$$T = V \frac{16\pi}{8\pi^3} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho \right) k_F^2 = \frac{3}{5} V \rho \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{3}{5} A \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2,$$

da cui

$$\frac{T}{A} = \frac{3}{5} \epsilon_F. \quad (14)$$

Per ottenere un'equazione di stato estendiamo il modello a gas di Fermi inserendo nell'hamiltoniana del sistema un'interazione \mathcal{V} tra le particelle:

$$H = \sum_{i \leq k_F} \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq k_F} \mathcal{V}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (15)$$

L'interazione che consideriamo dipende soltanto dalla distanza tra le particelle.

Calcoliamo il valore di aspettazione dell'hamiltoniana (15) rispetto a determinanti di Slater $|\Phi\rangle$ costruiti con le funzioni d'onda piana (7). Questi non sono gli autostati di H e il valore di aspettazione che stiamo cercando è una prima stima del corretto valore dell'energia.

$$\begin{aligned}
E = \langle \Phi | H | \Phi \rangle &= \sum_{i \leq k_F} \langle \phi_i | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 | \phi_i \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq k_F} \left[\int d^3 r_1 d^3 r_2 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) V(r_{12}) \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2) \right. \\
&\quad \left. - \int d^3 r_1 d^3 r_2 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) V(r_{12}) \phi_j(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \right].
\end{aligned}$$

L'ultimo termine dell'equazione è detto di scambio e verrà trascurato in seguito per semplificare i calcoli.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3}{5} A \epsilon_F + \frac{1}{2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \sum_{i \leq k_F} |\phi_i(\mathbf{r}_1)|^2 \sum_{j \leq k_F} |\phi_j(\mathbf{r}_2)|^2 V(r_{12}) \\
&= \frac{3}{5} A \epsilon_F + \frac{1}{2} \rho^2 \int d^3 R \int d^3 r_{12} V(r_{12}) = \frac{3}{5} A \epsilon_F + \frac{1}{2} \rho^2 V \int d^3 r_{12} V(r_{12}) \\
&= \frac{3}{5} A \epsilon_F + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{A}{\rho} \int d^3 r_{12} V(r_{12}) = \frac{3}{5} A \epsilon_F + \frac{1}{2} A \rho \int d^3 r_{12} V(r_{12}).
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ e $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Utilizzando l'equazione (11), è possibile riscrivere l'equazione di stato come:

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \rho \int d^3 r_{12} V(r_{12}). \quad (16)$$

Evidentemente il termine di energia cinetica è positivo, quindi il sistema risulta legato per il contributo del termine di interazione, che è negativo. Il termine attrattivo dipende linearmente dalla densità, mentre quello repulsivo dipende dalla densità con la potenza $2/3$. Per grandi valori della densità è il termine attrattivo che domina, al punto che, per densità tendenti all'infinito, anche il valore di E/A diventa infinito. In gergo si dice che il sistema collassa. È evidente che il sistema così descritto non è stabile. Dal punto di vista fisico la stabilità è data dal nocciolo fortemente repulsivo dell'interazione V per piccoli valori di r_{12} . Nel nostro modello questo significa inserire una dipendenza dalla densità dell'interazione V , in modo che questa cominci a diventare repulsiva per grandi valori della densità.

3 Modello a strati (a shell)

3.1 Evidenze sperimentali

In corrispondenza ad alcuni valori del numero di protoni, o di neutroni, i nuclei presentano delle proprietà simili a quelle dei gas nobili. Questi valori sono detti numeri magici e sono:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. \quad (17)$$

Alcuni fatti sperimentali:

- Le deviazioni dell'energia di legame per nucleone nella formula semi-empirica della massa avvengono in corrispondenza dei nuclei doppio magici, che risultano molto più legati (figura 4).

- L'abbondanza degli isotopi aumenta nell'intorno dei numeri magici (figura 5).
- I nuclei doppio magici sono sferici, non hanno momento di quadrupolo elettrico (6).
- I primi livelli eccitati dei nuclei doppio magici sono ad energie più elevate che per gli altri nuclei (7).
- C'è una diminuzione della sezione d'urto di assorbimento di neutroni per i nuclei in cui il numero di neutroni è magico (figura 8).
- Le energie di separazione per l'ultimo nucleone sono più grandi nei nuclei doppio magici che per gli altri nuclei (figura 9).

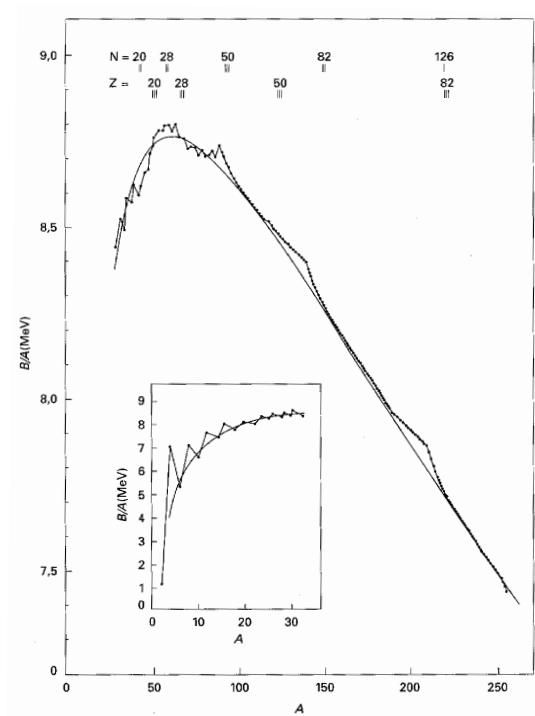


Figura 4: Energia di legame per nucleone nei nuclei con numero di massa A pari. La linea continua corrisponde alla formula semi-empirica della massa di Weißäcker. Nel riquadro sono presentate le energie di legame di nuclei leggeri. Anche nei nuclei più pesanti si possono osservare delle deviazioni in corrispondenza ai numeri magici. I nuclei magici sono più legati degli altri.

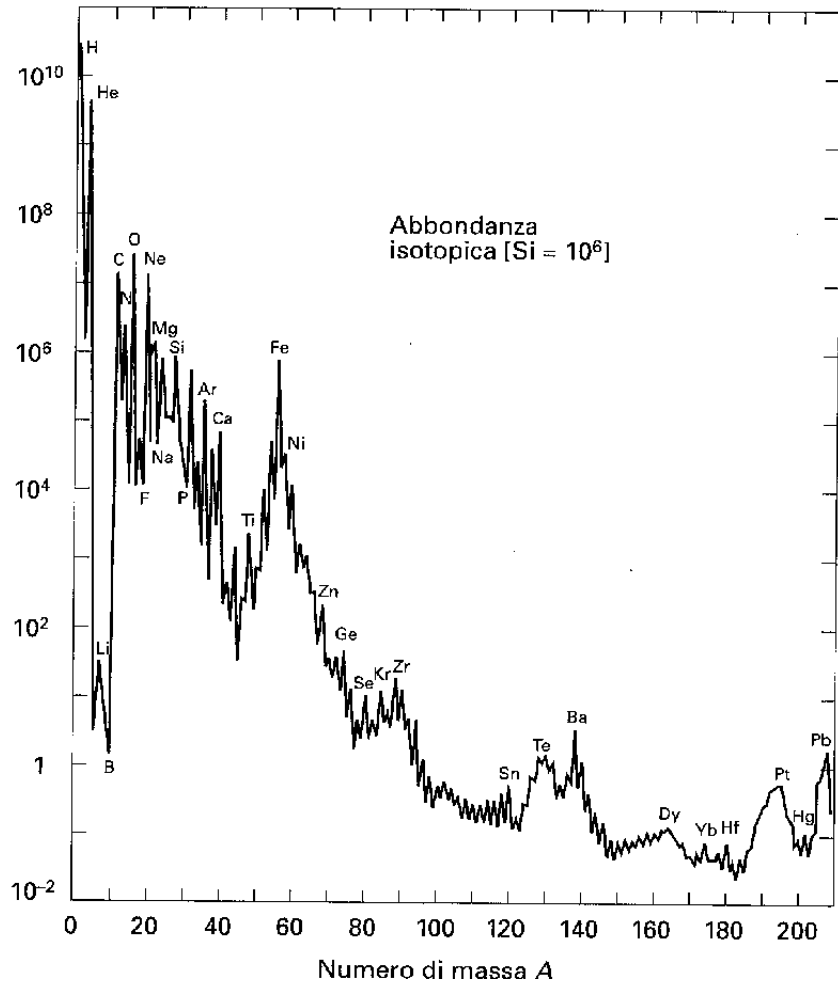


Figura 5: Abbondanza degli elementi del sistema solare in funzione del numero di massa A, normalizzata all'abbondanza del silicio ($=10^6$).

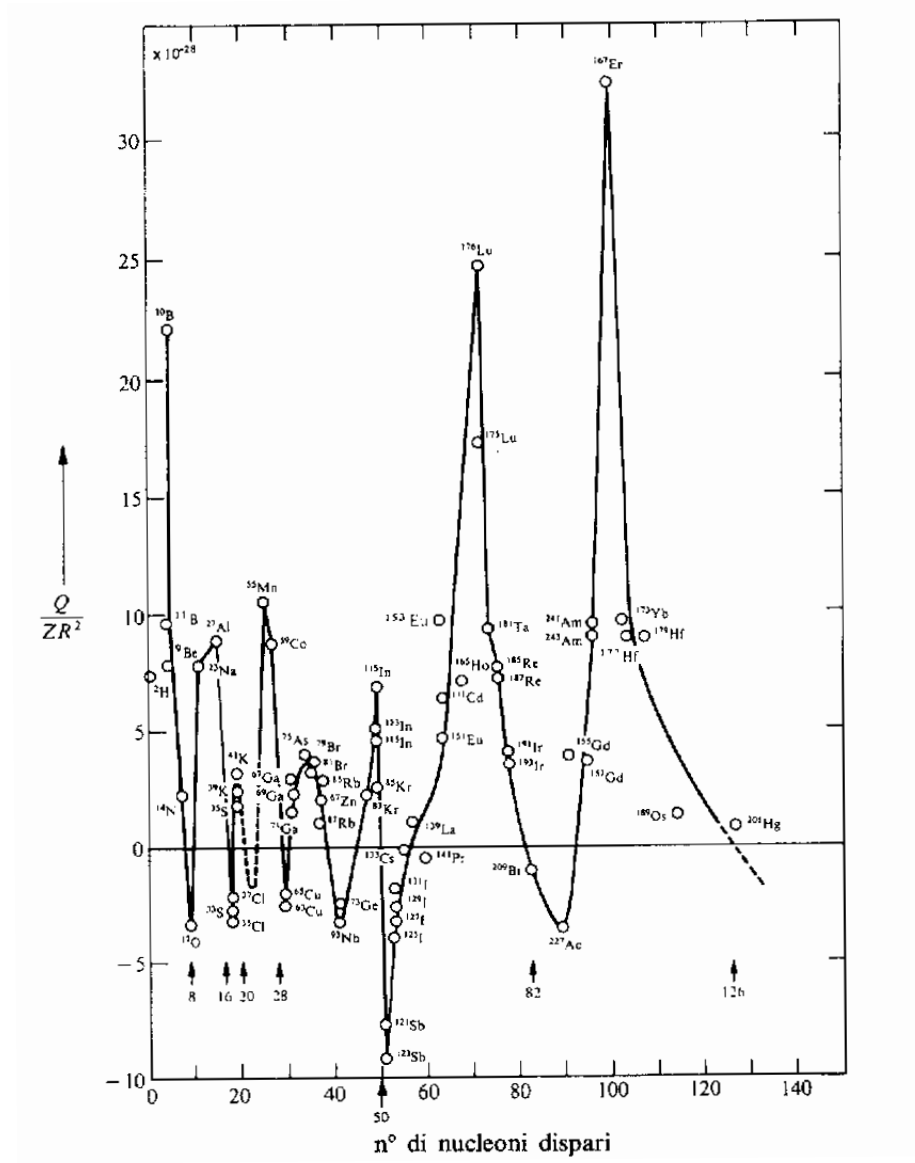


Figura 6: Momenti nucleari ridotti di quadrupolo elettrico, in funzione del numero d'ordine del nucleone dispari. La quantità Q/ZR^2 fornisce una misura della deformazione nucleare indipendente dalla grandezza del nucleo.

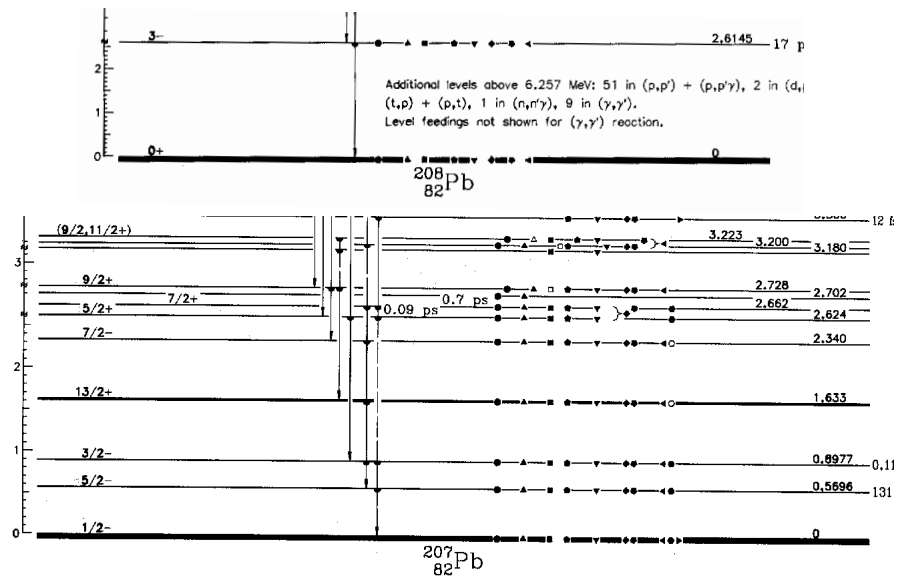


Figura 7: Schema dei livelli del ^{208}Pb , doppio magico, e del ^{207}Pb semi-magico, per energie di eccitazione fino a 3 MeV.

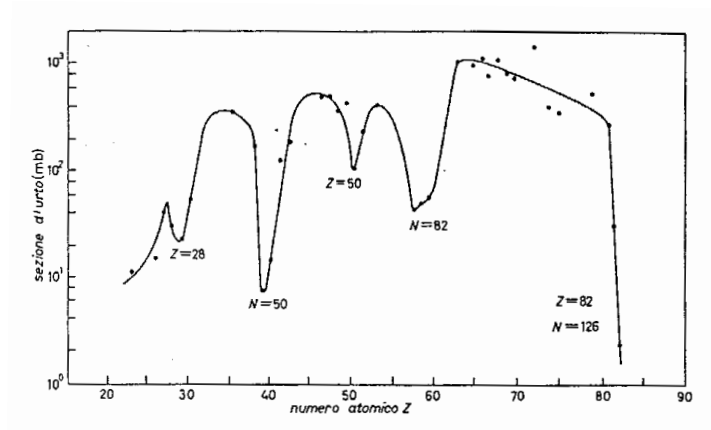


Figura 8: Sezione d'urto di cattura neutronica, per neutroni di energia di 30 keV, in funzione del numero di protoni.

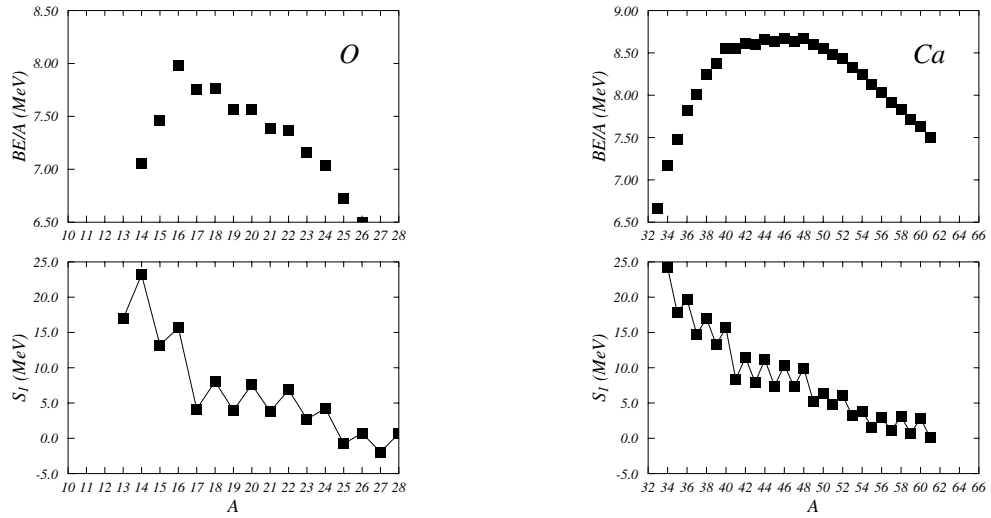


Figura 9: Nei pannelli superiori sono mostrate le energie di legame per nucleone delle catene di isotopi dell'ossigeno e del calcio. Nei pannelli inferiori le energie di separazione dei neutroni $S_1(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z)$. In corrispondenza al numero magico più uno si riscontra una diminuzione dell'energia di separazione.

Questi fatti indicano che i nuclei doppio magici hanno delle caratteristiche di stabilità superiori a quelle degli altri nuclei, come i gas nobili nel confronto con gli altri atomi. Queste somiglianze con le caratteristiche dei gas nobili hanno spinto a formulare, in analogia con il caso atomico, un modello in cui i nucleoni si muovono in un campo medio indipendentemente l'uno dall'altro.

Nell'atomo, il campo medio è generato dalla carica positiva del nucleo. L'interazione tra gli elettroni è molto più piccola dell'interazione elettrone-nucleo, e, in prima approssimazione, può essere trascurata.

Nel caso nucleare non esiste un centro di forze che produce il campo medio, e l'unica interazione esistente è quella tra i nucleoni. Per questo motivo un modello di campo medio può sembrare a prima vista inadeguato per descrivere il nucleo atomico. In realtà il campo medio a cui è soggetto il singolo nucleone è prodotto dall'interazione di quel nucleone con tutti gli altri. Questo risulta evidente nell'ambito della teoria di Hartree-Fock. Bisogna aggiungere che il nucleone, all'interno di questo campo medio, si muove quasi liberamente cioè senza che il suo stato sia modificato dalla collisione con altri nucleoni. Questo è legato al principio di esclusione di Pauli che, impedendo ai nucleoni di occupare stati già occupati da altri nucleoni, allunga notevolmente il libero cammino medio del nucleone nel mezzo nucleare.

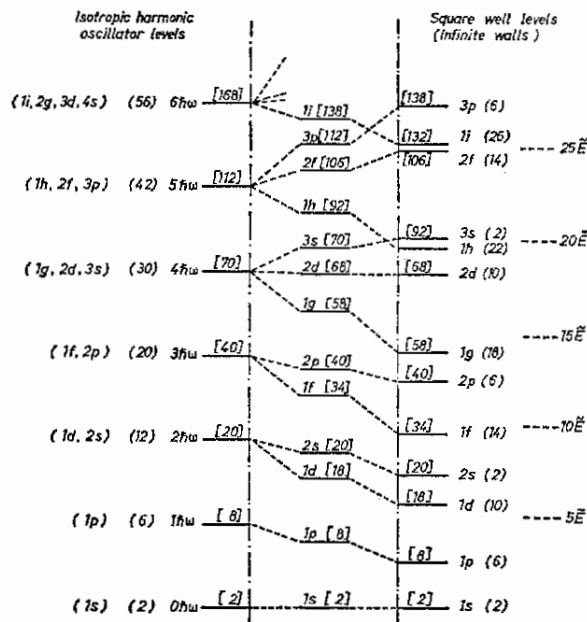


Figura 10: Schema dei livelli di singola particella per tre potenziali centrali, oscillatore armonico, buca quadrata e un potenziale intermedio.

3.2 Il modello

Nel modello a gas di Fermi il campo medio gioca ruolo poco interessante dato che si tratta di una termine costante dell'hamiltoniana nucleare. Molto diversa è la situazione nel caso del modello a strati basato sulla simmetria sferica.

Per un potenziale sferico, le funzioni d'onda di singola particella sono caratterizzate dall'auto-valore ϵ_i (l'energia di singola particella) dal momento angolare orbitale l , dallo spin s e dall'isospin t del nucleone. Per un tipo di nucleone (protone o neutrone) ogni livello è degenere, dato che l'energia non dipende dalla terza componente del momento angolare e dello spin. Definendo l'autovalore di \mathbf{I}^2 come $l(l+1)$ in unità

\hbar^2 , la degenerazione di ogni livello è $2(2l + 1)$. Questo è dato dal prodotto del numero di autovalori di l_z , $2l + 1$, e di s_z , 2.

In analogia con il caso atomico, i nuclei, nel loro stato fondamentale, sono costruiti riempiendo i livelli energetici di singola particella compatibilmente con il principio di Pauli. I numeri magici dovrebbero apparire in corrispondenza con il riempimento di ogni livello.

I primi numeri magici vengono riprodotti da potenziali centrali. Nella figura 10, viene mostrata la sequenza di livelli che si ottiene per un potenziale sferico del tipo buca quadrata, e uno del tipo oscillatore armonico. La buca quadrata riproduce i primi due numeri magici. Il potenziale tipo oscillatore armonico riesce a riprodurre anche un terzo numero magico. Varie forme di potenziali centrali sono stati utilizzate, ma nessuna riesce a riprodurre la sequenza completa dei numeri magici.

Per ottenere i valori sperimentali dei numeri magici, è necessario aggiungere al potenziale puramente centrale anche un termine di accoppiamento spin-orbita.

L'equazione di Schrödinger che descrive il moto di un nucleone nel campo medio, senza termine di spin-orbita, è:

$$\hbar|\psi\rangle = (T + V_0)|\psi\rangle = \epsilon|\psi\rangle,$$

aggiungendo al potenziale V un termine di spin-orbita diventa:

$$(T + V_0 - \frac{2\alpha}{\hbar^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s})|\psi\rangle = \epsilon'|\psi\rangle. \quad (18)$$

In questo esempio abbiamo fatto l'ipotesi che il termine di spin-orbita sia indipendente da \mathbf{r} .

L'autostato $|\psi\rangle$ è anche autostato di \mathbf{l}^2 , \mathbf{s}^2 , \mathbf{j}^2 e j_z dove $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Questo significa che:

$$\mathbf{l}^2|\psi(l, s, j)\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi(l, s, j)\rangle \quad (19)$$

$$\mathbf{s}^2|\psi(l, s, j)\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\psi(l, s, j)\rangle \quad (20)$$

$$\mathbf{j}^2|\psi(l, s, j)\rangle = j(j+1)\hbar^2|\psi(l, s, j)\rangle. \quad (21)$$

Utilizzando il fatto che:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}[\mathbf{j}^2 - \mathbf{s}^2 - \mathbf{l}^2]$$

si può dimostrare che:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}|\psi(l, s, j)\rangle = \frac{l}{2}\hbar^2|\psi(l, s, j)\rangle \quad \text{per } j = l + \frac{1}{2} \quad (22)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}|\psi(l, s, j)\rangle = -\frac{l+1}{2}\hbar^2|\psi(l, s, j)\rangle \quad \text{per } j = l - \frac{1}{2} \quad (23)$$

Questo risultato permette di scrivere l'equazione (18) come:

$$(T + V)|\psi\rangle = (\epsilon - l\alpha)|\psi\rangle \quad \text{per } j = l + \frac{1}{2} \quad (24)$$

$$(T + V)|\psi\rangle = [\epsilon + (l+1)\alpha]|\psi\rangle \quad \text{per } j = l - \frac{1}{2} \quad (25)$$

L'effetto del termine di spin-orbita è quello di separare i livelli degeneri aventi lo stesso valore di \mathbf{l} in due gruppi di livelli degeneri caratterizzati dai due diversi autovalori del momento angolare totale $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$. Per valori positivi della costante α i livelli in cui \mathbf{l} è antiparallelo a \mathbf{s} , ($j = l - 1/2$) sono spostati a energie più alte, mentre nell'altro caso sono spostati a energie più basse.

La sequenza di livelli ottenuta aggiungendo ad un potenziale tipo oscillatore armonico un termine di spin-orbita è mostrata nella figura 11. Si nota come i numeri magici siano prodotti, non tanto dal

riempimento di singoli livelli energetici, ma dal riempimento di un gruppo di livelli energeticamente vicini (strato e shell).

Il potenziale medio nucleare deve avere le seguenti caratteristiche:

- all'interno del nucleo deve essere praticamente costante perché i nucleoni si muovano indisturbati; la forza che agisce su di loro deve essere praticamente nulla,
- deve essere attrattivo alla superficie perché il nucleo sia stabile,
- deve prevedere il continuo, perché fornendo energia al nucleo si ha emissione di nucleoni.

Una forma molto utilizzata, che soddisfa queste caratteristiche è quella di Saxon–Woods:

$$V_0(r_i) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r_i - R_0}{a}\right)}, \quad (26)$$

dove V_0 , R_0 ed a sono parametri che vengono aggiustati per ogni nucleo in modo da riprodurre il valore di alcuni osservabili. Valori tipici di questi osservabili sono:

$$V_0 \simeq -50 \text{ MeV}, \quad R_0 \simeq 1.2A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}, \quad a \simeq 0.5 \text{ fm}. \quad (27)$$

Nell'esempio fatto il termine di spin-orbita è costante. Potenziali più sofisticati considerano una dipendenza di α da r_i .

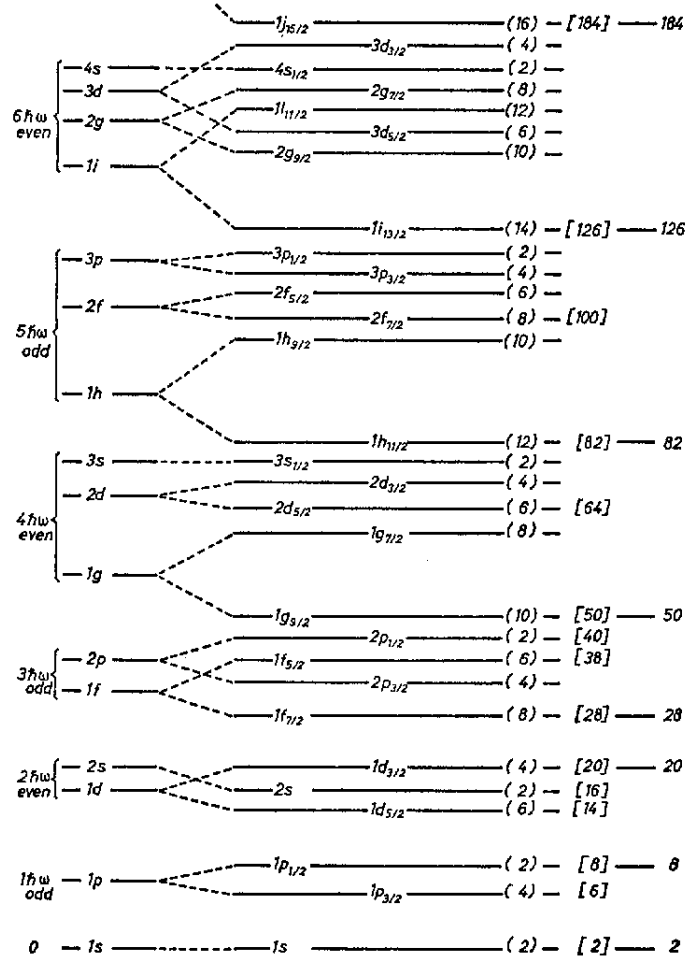


Figura 11: Schema dei livelli di energia per una singola particella in un potenziale centrale intermedio tra oscillatore armonico e buca a pareti infinite, con in aggiunta un termine di spin-orbita. I numeri di nucleoni occupanti ogni singolo livello sono indicati tra parentesi tonde. Il numero cumulativo tra parentesi quadre.

3.3 Interazione di appaiamento

Nella formula semi-empirica della massa è stato introdotto un termine di appaiamento che tiene conto del fatto che i nuclei pari-pari sono più legati degli altri.

La spiegazione di questo fatto è legata alla cosiddetta interazione di appaiamento che non è inserita nell'hamiltoniana di campo medio (3), ma che ha origine nel termine residuo dell'hamiltoniana (1) che viene trascurato.

L'interazione residua di appaiamento è un'interazione che unisce i nucleoni a coppie. All'interno dello stesso livello i due nucleoni si sistemano nello stato relativo di minore energia che risulta essere quello in cui i due nucleoni con momento angolare j, m e j, m' si accoppiano con un momento angolare totale nullo:

$$|00\rangle = \sum_{m, m'} \langle jm, jm' | 00 \rangle |jm\rangle |jm'\rangle, \quad (28)$$

dove $|jm\rangle$ e $|jm'\rangle$ sono gli stati di singola particella dei due nucleoni e $\langle jmj|00\rangle$ è il coefficiente di Clebsch–Gordan. Lo stato (28) ha la maggiore sovrapposizione tra le funzioni d'onda dei due nucleoni, questo favorisce la formazione di stati di questo tipo, dato che l'interazione di appaiamento è attrattiva. I nuclei pari–pari risultano più legati degli altri tipi di nuclei perché per liberare i nucleoni bisogna fornire dell'energia aggiuntiva per spezzare le coppie nucleoni. Questa è l'origine del termine di appaiamento nella formula semi-empirica della massa.

L'interazione di appaiamento è attiva anche nel riempimento dei livelli di singola–particella generati dal modello a shell: i nucleoni si uniscono in coppie con momento angolare nullo. Questo spiega perché tutti i nuclei pari–pari abbiano tutti momento angolare nullo. Nei nuclei pari–dispari, soltanto il nucleone non appaiato ha momento angolare diverso da zero. Il momento angolare del nucleo è quello del nucleone non appaiato (vedi la figura 12). I nuclei dispari–dispari hanno due nucleoni non appaiati, un protone ed un neutrone. Il momento angolare di questi nuclei è dato dalla somma dei momenti angolari di due nucleoni spaiati.

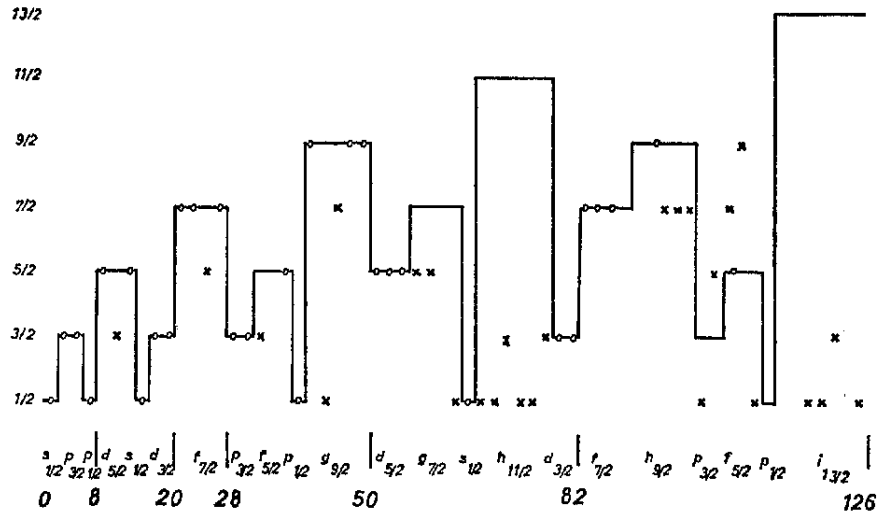


Figura 12: Spin di nuclei con numero dispari di neutroni. La linea presenta le previsioni del modello a shell, cerchi e crocette sono i rappresentano i valori empirici.

La determinazione dello spin del nucleo viene effettuata dall'analisi della struttura iperfine dello spettro di eccitazione atomico. La presenza di uno spin nucleare non nullo implica l'esistenza di un campo magnetico nucleare che interagisce con gli elettroni atomici.

Introduciamo la funzione d'onda $|\Psi(I, J, F)\rangle$ che descrive gli elettroni che si muovono attorno al nucleo ed è autostato comune agli operatori \mathbf{I}^2 , I_z , \mathbf{J}^2 , J_z , \mathbf{F}^2 , F_z , dove ho indicato con \mathbf{I} lo spin del nucleo, con \mathbf{J} il momento angolare totale degli elettroni e con $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ il momento angolare totale del sistema. Questo significa che:

$$\mathbf{J}^2|\Psi(I, J, F)\rangle = J(J+1)\hbar^2|\Psi(I, J, F)\rangle \quad (29)$$

$$\mathbf{I}^2|\Psi(I, J, F)\rangle = I(I+1)\hbar^2|\Psi(I, J, F)\rangle \quad (30)$$

$$\mathbf{F}^2|\Psi(I, J, F)\rangle = F(F+1)\hbar^2|\Psi(I, J, F)\rangle \quad (31)$$

$$\mathbf{F}_z|\Psi(I, J, F)\rangle = M_F\hbar|\Psi(I, J, F)\rangle \quad (32)$$

dove I, J, F e M_F sono numeri interi o semi-interi.

Per le regole di composizione dei momenti angolari si ha che:

$$|I - J| \leq F \leq I + J \quad (33)$$

I valori che F può assumere sono legati a quale dei due momenti angolari, \mathbf{I} o \mathbf{J} sia il maggiore:

$$\text{per } I \geq J \quad F \text{ assume } 2J + 1 \text{ valori} \quad (34)$$

$$\text{per } I \leq J \quad F \text{ assume } 2I + 1 \text{ valori} \quad (35)$$

Il momento magnetico legato ad \mathbf{I} si accoppia a quello generato da \mathbf{J} e inserisce un nuovo termine nell'hamiltoniana atomica che distrugge la degenerazione in energia. Il termine legato a questo accoppiamento nell'hamiltoniana è proporzionale a:

$$\epsilon = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \quad (36)$$

Dalla definizione di \mathbf{F} si può vedere che :

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2) \quad (37)$$

Utilizzando l'equazione precedente si può calcolare il valor medio del termine (36) che risulta:

$$\langle \Psi(I, J, F) | \epsilon | \Psi(I, J, F) \rangle = \frac{A}{2}(F(F+1) - I(I+1) - J(J+1))\hbar^2 \quad (38)$$

Questa equazione mostra come a parità dei valori di J e I gli autovalori di energia siano diversi per diversi valori di F .

Per determinare I con questo metodo si contano le linee spettroscopiche. Si suppone di conoscere J da altre misure. Si presentano quindi due casi:

1. il numero dei livelli non è uguale a $2J + 1$, si è quindi nella situazione di eq. (35) e quindi il numero dei livelli dà direttamente $2I + 1$,
2. il numero dei livelli è uguale a $2J + 1$. In questo caso bisogna misurare la differenza di energia tra i due livelli tra cui avviene la transizione. Sperimentalmente la differenza di energia è data da $\Delta\epsilon = h\nu$, dove ν è la frequenza della radiazione emessa. Per semplificare il discorso chiamiamo $F = I + J$. Supponiamo che la transizione avvenga tra due livelli con momento angolare $F_1 = F$ e $F_2 = F - 1$. Usando l'equazione (38) si ha che la differenza di energia tra questi due livelli è:

$$\Delta\epsilon_{12} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = A(I + J) \quad (39)$$

Analogamente per la transizione tra F_2 e $F_3 = F - 2$

$$\Delta\epsilon_{23} = \epsilon_2 - \epsilon_3 = A(I + J - 1). \quad (40)$$

Il rapporto tra queste due equazioni permette di ricavare un'espressione priva della costante A da cui si ricava I dato che tutti gli altri termini sono noti.

Domande

[N1-14] [N1-12] [N2-11] [N2-12] [N2-18] [N3-6] [N3-7] N3-14 [N4-5] [N4-13] [N4-14] [N4-6]