

Lezione 27

Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

1 Momenti magnetici

La misura del momento magnetico di una particella, o di un insieme di particelle, dà informazioni sullo spin del sistema in osservazione.

L'unità di misura utilizzata per descrivere i momenti magnetici del nucleo è il magnetone nucleare:

$$\frac{e\hbar}{2m_p c} \equiv \mu_N \quad (1)$$

È da notare che, in unità di magnetoni nucleari, il momento di dipolo magnetico del protone non è uguale a 1, come ci si sarebbe aspettato, ma a 2.79, e quello del neutrone non è nullo, ma è uguale a -1.81. Questa è un'indicazione che protone e neutrone sono particelle con una struttura interna.

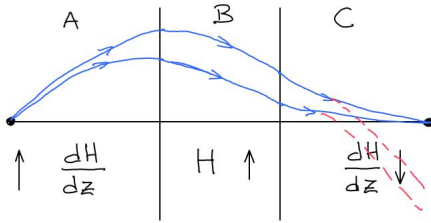


Figura 1: Schema dell'apparato di Rabi.

to è costruito per analizzare fasci molecolari con momento angolare degli elettroni $J = 0$, in modo che il momento angolare totale del sistema \mathbf{F} dipenda soltanto dallo spin del nucleo \mathbf{I} .

Lo schema dell'apparato è presentato in Figura 1. Nella prima zona, A, è presente un campo magnetico non uniforme con gradiente positivo nella direzione indicata dalla freccia che identifichiamo come la direzione z . Nella seconda zona c'è un campo magnetico uniforme e nella terza zona un campo magnetico non uniforme identico a quello presente in A, ma con gradiente negativo.

L'energia di un nucleo con momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ che attraversa un campo magnetico \mathbf{H} è data da:

$$\epsilon = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = \mu_N g \mathbf{I} \cdot \mathbf{H} \quad (2)$$

dove g , detto fattore giroscopico, è un numero dell'ordine di grandezza dell'unità, che misura il valore del momento di dipolo magnetico in unità di magnetoni nucleari μ_N moltiplicati per lo spin del nucleo \mathbf{I} .

La forza che agisce sui fasci molecolari è:

$$\mathbf{F} = -\nabla \epsilon \quad (3)$$

e data la geometria dell'apparato

$$F_z = -\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\mu_N g m_I \hbar \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial z} \quad (4)$$

1.1 Metodo dei fasci molecolari

Le misure più accurate dei momenti magnetici dei nuclei si ottengono con un metodo, detto dei fasci molecolari, che è essenzialmente una generalizzazione fatta da Rabi dell'esperienza di Stern e Gerlach.

L'apparato consiste in un tubo a vuoto in cui fasci di molecole vengono prodotti da una fornace e dopo essere stati collimati vengono rivelati su uno schermo. L'apparato

dove m_I è l'autovalore di I_z , in unità \hbar e abbiamo indicato con $\langle H \rangle$ il valore di aspettazione del campo magnetico tra due autostati di I .

Nella prima e nella terza regione c'è una forza che curva la traiettoria del fascio molecolare a secondo del valore di m_I .

- Nella prima zona, il fascio viene diviso in m_I fasci,
- nella seconda zona, i fasci hanno un percorso circolare dato che qui il campo magnetico è uniforme,
- nella terza zona, il campo magnetico è tale che i fasci si ricompongono su uno schermo.

Nella seconda zona lo spin dei nuclei ha un moto di precessione con frequenza ν_L detta di Larmor, attorno alla direzione del campo magnetico uniforme \mathbf{H} (vedi la figura 1). In questa zona viene applicato un campo magnetico rotante \mathbf{H}_ν con frequenza ν . Fino a che la frequenza ν è diversa dalla frequenza di Larmor ν_L non ci sono effetti visibili sulla composizione dei fasci molecolari perchè gli effetti del campo magnetico ruotante sul singolo momento magnetico si annullano in media. Quando $\nu = \nu_L$ il momento magnetico del nucleo precede anche attorno a \mathbf{H}_ν . In questo caso la direzione di \mathbf{I} rispetto a z cambia, quindi cambia m_I (vedi fig. 2). I nuclei in cui avviene questo cambio non percorreranno la traiettoria che dovrebbe permettere loro di unirsi agli altri nuclei nel punto D, ma percorreranno un'altra traiettoria. (vedi fig. 1).

Misurando la corrente che arriva sullo schermo nel punto R si ha un minimo in corrispondenza di ν_L . Nota l'espressione della frequenza di Larmor si ottiene il momento magnetico del nucleo usando l'espressione:

$$\nu_L = \frac{e}{4\pi m_p c} g |\mathbf{H}| = \frac{1}{2\pi\hbar} \mu_N g |\mathbf{H}| \quad (5)$$

Questa tecnologia è alla base della tecnica di analisi non distruttiva dei materiali oggi denominata Risonanza Magnetica Nucleare.

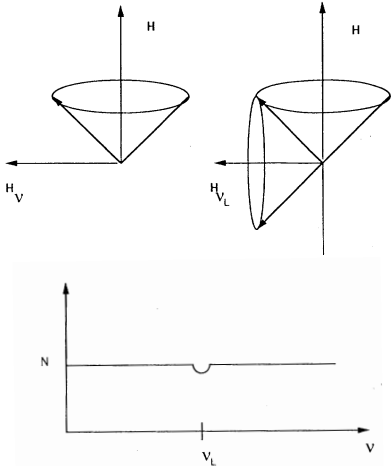


Figura 2: Schema di rotazione degli spin delle molecole, nell'apparato di Rabi.

1.2 Momenti di dipolo magnetico

Il momento di dipolo magnetico del nucleo è legato al momento angolare del nucleo.

Nel modello a strati il momento angolare è dovuto al solo nucleone spaiato. Il calcolo del momento di dipolo magnetico nell'ambito del modello a shell conduce al seguente risultato:

$$\mu = \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) g^l + g^s \right) \mu_N \quad \text{per} \quad j = l + \frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\mu = \frac{j}{j+1} \left(\left(j + \frac{3}{2} \right) g^l - g^s \right) \mu_N, \quad \text{per} \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (7)$$

dove μ_N è il magnetone nucleonico e i fattori giroscopici g valgono $g^l = 1$, $g^s = 2.793$ per i protoni e $g^l = 0$, $g^s = -1.913$ per i neutroni.

I valori dei momenti magnetici dati dalle equazioni (6) e (7) producono le cosiddette linee di Schmidt, vedi la figura 3. I valori sperimentali dei momenti di dipolo magnetico cadono tutti all'interno di queste linee.

Queste discrepanze tra valori sperimentali dei momenti magnetici e previsioni del modello a shell sono legate a due effetti fisici differenti. Il primo effetto è dovuto all'interazione del nucleone spaiato con il resto del nucleo. Questa interazione, che nel modello a shell viene trascurata, provoca una deformazione del core doppio-magico del nucleo che modifica il valore del momento di dipolo magnetico. Il secondo effetto è dovuto al fatto che nel calcolo dei valori di Schmidt (6) e (7) si è considerato soltanto la corrente generata dai nucleoni. Correzioni a questo modello sono dovute al fatto che i nucleoni interagiscono tra loro scambiandosi mesoni, e questo produce correnti elettromagnetiche legate allo scambio dei mesoni carichi.

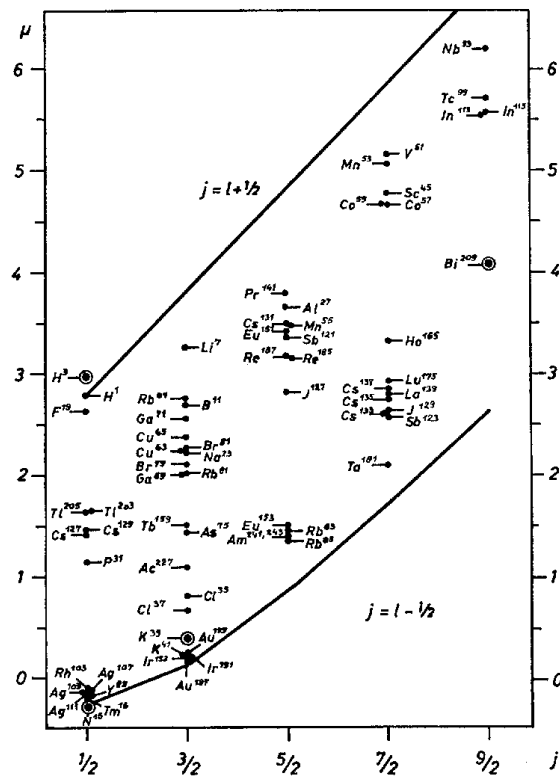
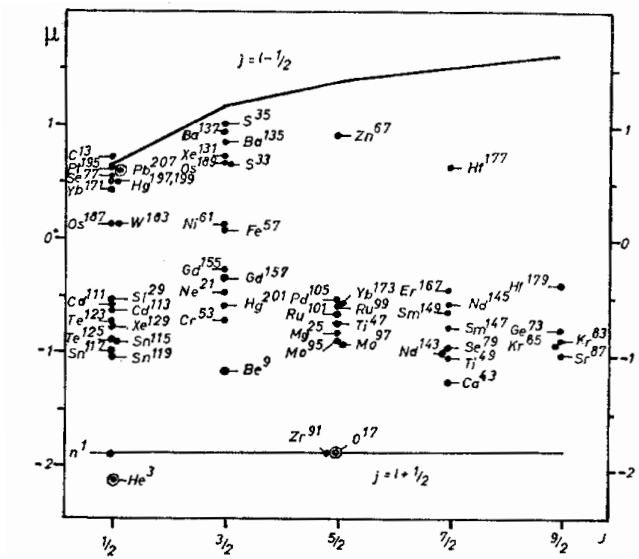


Figura 3: Linee di Schmidt e momenti magnetici empirici per nuclei con neutroni dispari (sopra) e protoni dispari (sotto).

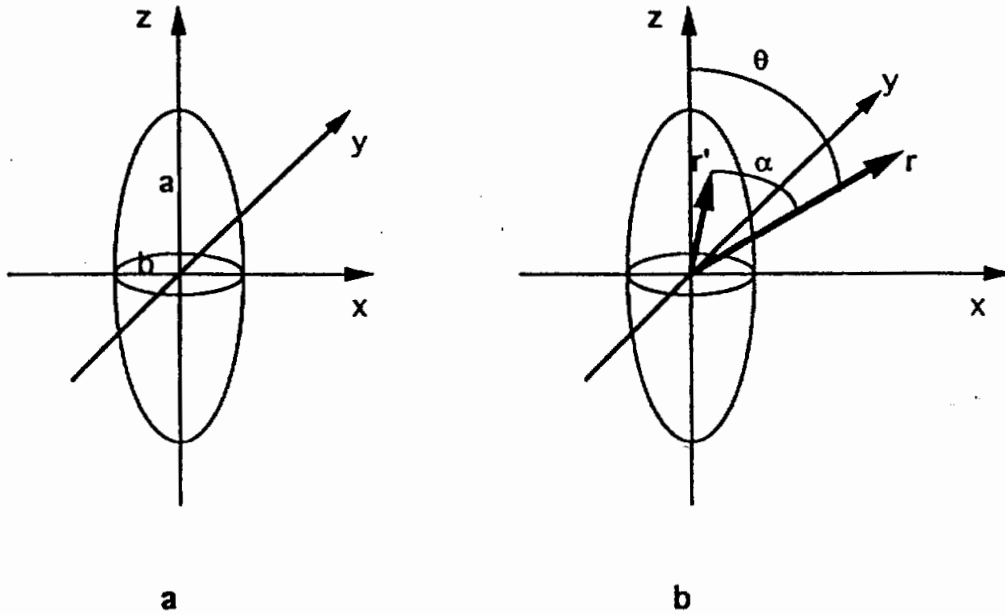


Figura 4: Ellissi per il calcolo del momento di quadrupolo elettrico.

2 Momenti di quadrupolo elettrico

Fino ad ora non abbiamo considerato la possibilità che la distribuzione di carica dei nuclei, e di materia, possa differire dalla forma sferica. I momenti di quadrupolo elettrico sono una misura delle deviazioni della distribuzione di carica nucleare dalla distribuzione sferica.

Consideriamo un nucleo non sferico ma che possieda una simmetria rotazionale attorno ad un'asse, che definiremo come z (vedi la figura 4). Stiamo parlando, ad esempio di un ellissoide di rotazione. Questo rappresenta sia la distribuzione di materia che di carica.

Il potenziale $V(r, \theta)$ generato da questa distribuzione di carica in un punto esterno al nucleo \mathbf{r} può essere sviluppato sulla base ortonormale dei polinomi di Legendre:

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r} \left[Z + \frac{D}{r} P_1(\cos \theta) + \frac{Q}{r^2} P_2(\cos \theta) + \dots \right] \quad (8)$$

dove e è la carica unitaria, $r = |\mathbf{r}|$, Z il numero di protoni e D e Q sono costanti da determinare. Nota che per la simmetria attorno a z il potenziale non dipende dall'angolo ϕ .

Nel caso di simmetria sferica nell'equazione (8) i termini dipendenti dall'angolo θ scompaiono e rimane soltanto il termine con Z . Quindi i termini legati a D e Q rappresentano le deviazioni rispetto alla simmetria sferica. Per calcolare il valore di queste costanti calcoliamo il potenziale $V(r, \theta)$ usando le regole dell'elettrodinamica classica e confrontando l'espressione che otterremo con l'equazione (8) identificheremo D e Q .

L'espressione del potenziale nel punto \mathbf{r} esterno al nucleo, generato dalla carica infinitesima dq che si trova in \mathbf{r}' è:

$$dV(r, \theta) = \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\rho_c(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9)$$

dove $\rho_c(\mathbf{r}')$ è la densità di carica.

Supponiamo che $\rho_c(\mathbf{r}')$ sia nullo all'esterno dell'elissoide. Il potenziale si ottiene integrando sul volume dell'elissoide.

$$V(r, \theta) = \int \frac{\rho_c(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int \frac{\rho_c(\mathbf{r}') d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \int \frac{\rho_c(\mathbf{r}') d^3 r'}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha}} \quad (10)$$

dove abbiamo indicato con α l'angolo tra \mathbf{r}' e \mathbf{r} .

Dato che normalmente $|\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'|$, è ragionevole fare uno sviluppo di Taylor del denominatore. Utilizziamo l'espressione

$$(1 + X)^n = 1 + nX + \frac{1}{2!}n(n-1)X^2 + \dots \quad (11)$$

Nel nostro caso

$$X = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha \quad (12)$$

quindi

$$\begin{aligned} (1 + X)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \right] X^2 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^4 + 4\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cos^2 \alpha - 4\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \cos^3 \alpha \right] + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 [3 \cos^2 \alpha - 1] + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Fatto questo l'espressione precedente diventa:

$$V(r, \theta) = \int d^3 r' \frac{\rho_c(\mathbf{r}')}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + \dots \right\} \quad (14)$$

Sia la (8) che la (14) esprimono il potenziale nel punto \mathbf{r} . Queste due formule sono state ottenute con considerazioni differenti ma del tutto generali. Questo significa che le due espressioni devono produrre lo stesso potenziale qualsiasi sia il punto dello spazio. Per questo motivo scelgo un punto che mi permetta di ottenere l'espressione di D e Q semplificando i calcoli: il punto $\mathbf{r} = (z, 0, 0)$, quindi $P_l(\cos \theta) = 1$. Con questa scelta le due equazioni diventano:

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r} \left(Z + \frac{D}{r} + \frac{Q}{r^2} + \dots \right) \quad (15)$$

e

$$V(r, \theta) = \int d^3 r' \frac{\rho_c(\mathbf{r}')}{r} \left\{ 1 + \frac{z'}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{3z'^2 - r'^2}{r^2} \right) + \dots \right\} \quad (16)$$

Eguagliando termine per termine si ha:

$$eZ = \int d^3 r' \rho_c(\mathbf{r}') \quad \text{normalizzazione della carica} \quad (17)$$

$$eD = \int d^3 r' \rho_c(\mathbf{r}') z' \quad \text{momento di dipolo elettrico} \quad (18)$$

$$eQ = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho_c(\mathbf{r}') (3z'^2 - r'^2) \quad \text{momento di quadrupolo elettrico} \quad (19)$$

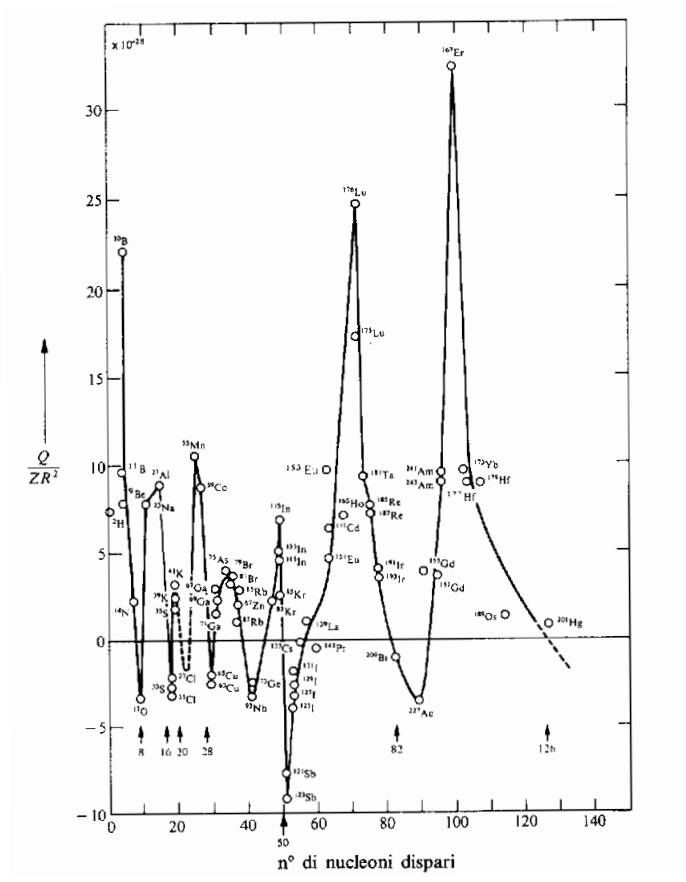


Figura 5: Momenti ridotti di quadrupolo.

Dalle equazioni precedenti si vede che D ha le dimensioni di una lunghezza, e Q quelle di una lunghezza al quadrato.

Consideriamo la densità di carica $\rho_c(\mathbf{r}')$ come la probabilità di trovare un protone nel punto \mathbf{r}' moltiplicata per la carica unitaria.

$$\rho_c(\mathbf{r}') = e\rho_p(\mathbf{r}') = e \sum_{i=1}^Z P_i(\mathbf{r}') = e \sum_{i=1}^A P_i(\mathbf{r}') \frac{1}{2}(1 + \tau^3(i)) \quad (20)$$

dove $P_i(\mathbf{r}')$ è la probabilità di trovare l' i -esimo nucleone in \mathbf{r}' e

- $\tau^3(i) = 1$ per protoni
- $\tau^3(i) = -1$ per neutroni

La densità di protoni è data dal valore di aspettazione dell'operatore

$$\rho_p(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2}(1 + \tau^3(i)) \quad (21)$$

tra le funzioni d'onda che descrivono il nucleo. Analogamente gli operatori che descrivono la densità di neutroni e di materia, sono rispettivamente:

$$\rho_n(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2}(1 - \tau^3(i)) \quad (22)$$

e

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \quad (23)$$

Utilizzando l'espressione operatoriale della densità di carica, possiamo riscrivere le equazioni (17-19) come:

$$Z = \int d^3r' d^3r_1 \dots d^3r_A |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2}(1 + \tau^3(i)) \quad (24)$$

$$D = \int d^3r' d^3r_1 \dots d^3r_A z' |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2}(1 + \tau^3(i)) \quad (25)$$

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3r' d^3r_1 \dots d^3r_A (3z'^2 - r'^2) |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2}(1 + \tau^3(i)) \quad (26)$$

Considero ora la conservazione della parità nelle interazioni forti. Più formalmente questo fatto può essere espresso dicendo che gli autovalori dell'operatore di parità Π , che scambia \mathbf{r} in $-\mathbf{r}$, sono ± 1

$$\Pi\Psi(\mathbf{r}) = \pm\Psi(-\mathbf{r}) \quad (27)$$

Da questo risulta che $|\Psi|^2$ è invariante per lo scambio di \mathbf{r} in $-\mathbf{r}$. Questo comporta che l'integrando dell'equazione (25) sia una funzione dispari delle variabili di integrazione, quindi D è nullo.

Il primo termine significativo che descrive deviazioni dalla simmetria sferica è il momento di quadrupolo Q . Dalla sua definizione si vede che:

$$Q = \frac{1}{2}(3\langle z^2 \rangle - (\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle)) \quad (28)$$

dove abbiamo indicato con $\langle a^2 \rangle$ il valore medio del quadrato dell'operatore a .

Dato che stiamo trattando un ellissoide $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$. Si hanno quindi tre casi:

1. $Q = 0$ quando $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$, quindi la simmetria è sferica,
2. $Q \leq 0$ si ha $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \geq \langle z^2 \rangle$, si ha un nucleo oblato (a forma di disco volante),
3. $Q \geq 0$ si ha $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \leq \langle z^2 \rangle$, si ha un nucleo prolato (a forma di sigaro).

Nella figura 5 sono mostrati i momenti di quadrupolo per nuclei pari-dispari in funzione del numero d'ordine del nucleone dispari. I valori del momento di quadrupolo sono divisi per ZR^2 dove R è il raggio del nucleo. La quantità che si ottiene è indipendente dalle dimensioni del nucleo, e dà una misura relativa della deformazione. E' da notare che le deformazioni maggiori sono presenti nella regione delle terre rare.

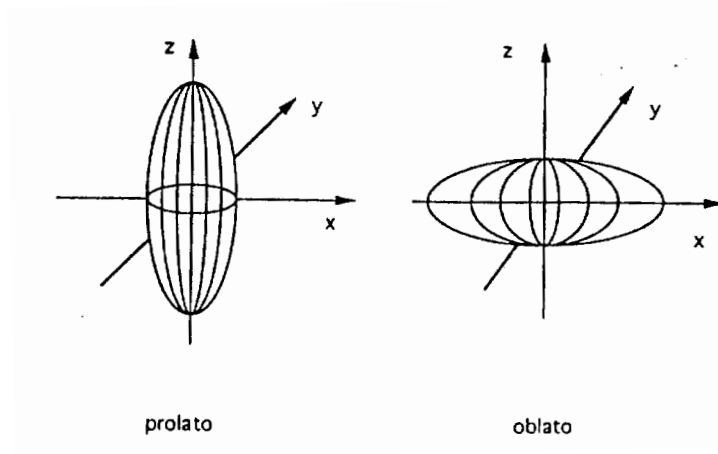


Figura 6: Deformazione prolata (a sigaro) e oblata (a disco volante) del nucleo.

E' interessante notare nella figura 5 che la linea che congiunge i vari punti passa per lo zero in coincidenza con i nuclei doppio-magici.

I nuclei pari-dispari con un nucleone in più o in meno rispetto ai doppio-magici, hanno invece momento di quadrupolo elettrico diverso da zero. In analogia con quanto è stato fatto per il momento di dipolo magnetico, nel modello a strati si calcola il momento di quadrupolo elettrico di questi nuclei considerando che tutto il valore del momento di quadrupolo sia dovuto al nucleone spaiato. In questo modello si ottiene:

$$Q = \mp \langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2(j+1)} \quad (29)$$

con

$$\langle r^2 \rangle = \int dr r^4 |R_j(r)|^2 \quad (30)$$

dove $R_j(r)$ è la funzione d'onda radiale dello stato di singola particella del nucleone in oggetto, e j è il momento angolare caratterizzante questo stato.

Nella tabella 1 confrontiamo i valori sperimentali del momento di quadrupolo elettrico Q_{ex} con quelli ottenuti con la (29) sostituendo a $\langle r^2 \rangle$ il quadrato del raggio nucleare $R = 1.12A^{\frac{1}{3}}$ fm.

Si può notare nella tabella che, per i nuclei con un protone in più o in meno rispetto ai doppio-magici, ^{39}K , ^{209}Bi , i valori del momento di quadrupolo calcolati con il modello a shell sono piuttosto vicini ai valori misurati. Questo non è il caso del ^{17}O che ha un neutrone in più rispetto al doppio magico. Il modello a shell (che utilizza una carica efficace per il neutrone) prevede un momento di quadrupolo molto più piccolo di quello osservato. Nel caso del ^{175}Lu , un nucleo che ha shell solo parzialmente riempite, sia per protoni che per neutroni, il segno del momento di quadrupolo è addirittura sbagliato. I casi presentati nella tabella 8.1 sono comunque rappresentativi della

Nucleo	Z	N	j	Q_{ex}	Q_{sp}
^{17}O	8	9	5/2	-2.6	-0.1
^{39}K	19	20	3/2	+5.5	+5.0
^{175}Lu	71	104	7/2	+560	-25
^{209}Bi	83	126	9/2	-35	-30

Tabella 1: Momenti di quadrupolo elettrico espressi in fm^2 , calcolati Q_{th} , ed osservati Q_{ex} .

situazione generale. Il modello a strati non riesce a riprodurre i valori osservati del momento di quadrupolo che risultano essere normalmente molto più grandi.

Nel modello a strati si suppone che il nocciolo del nucleo, prodotto dalla chiusura delle shell non contribuisca al momento di quadrupolo del nucleo: questo nocciolo è sferico. In realtà il nucleone di valenza (quello in più o in meno del numero magico) interagisce con il nocciolo provocandone una deformazione permanente.

La presenza di una deformazione permanente si manifesta non soltanto nella presenza di momenti di quadrupolo elettrico, come abbiamo già visto, ma anche in altre proprietà dei nuclei.

Domande

[N2-19] [N4-15]