

# Lezione 28

## Eccitazioni nucleari

### 1 Spettro rotazionale

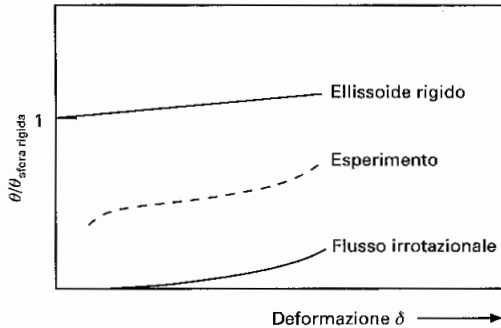
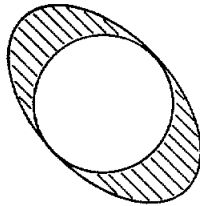
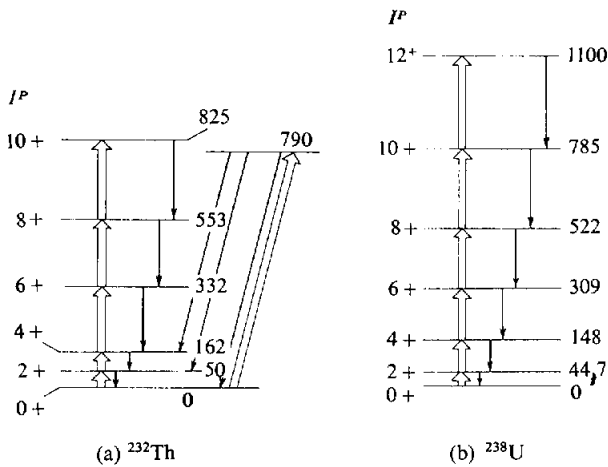


Figura 1: Spettri rotazionali di due nuclei deformati (sopra). Rotatore con core superfluido (sotto).

autostati dell'energia di rotazione sono

$$E_L = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} L(L+1) \quad L = 0, 2, 4, \dots \quad (5)$$

Consideriamo un nucleo pari-pari, con spin zero, che abbia però una deformazione permanente. Supponiamo, inoltre, che il nucleo goda di una simmetria rotazionale attorno all'asse  $z$ . Per questo motivo, la scelta degli assi  $x$  e  $y$  è arbitraria nel piano ortogonale a  $z$ .

Dal punto di vista della meccanica quantistica la rotazione attorno all'asse di simmetria non è definita. La simmetria del problema implica che la funzione d'onda  $\Psi(\mathbf{r})$  che descrive il nucleo sia indipendente dall'angolo di rotazione  $\phi$  rispetto all'asse  $z$ . Se  $L_z$  è la componente dell'operatore momento angolare di rotazione attorno all'asse  $z$  si ha che:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (1)$$

Ovviamente le rotazioni attorno ad assi perpendicolari all'asse di simmetria sono permesse. Supponendo che il nucleo possenga un momento angolare di rotazione  $L$ , l'espressione classica dell'energia di rotazione è:

$$H_{rot} = \frac{\mathbf{L}^2}{2\mathfrak{I}} \quad (2)$$

dove  $\mathfrak{I}$  è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Passando alla meccanica quantistica, utilizzando il principio di corrispondenza, l'equazione agli autovalori che descrive la rotazione è:

$$\frac{\mathbf{L}^2}{2\mathfrak{I}} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (3)$$

dove adesso  $\mathbf{L}^2$  è un operatore. Autostati dell'operatore di rotazione sono le armoniche sferiche  $Y_{LM}(\theta, \phi)$ :

$$\mathbf{L}^2 Y_{LM}(\theta, \phi) = L(L+1)\hbar^2 Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (4)$$

con  $L = 0, 1, 2, \dots$ . La parità delle armoniche sferiche è  $(-1)^L$ . Il nucleo che stiamo considerando è simmetrico per riflessioni nel piano  $xy$ . Le armoniche sferiche con  $L$  dispari cambiano segno per riflessioni in questo piano, quindi non possono essere autostati del problema preso in esame. Per questo motivo sono permessi soltanto valori pari di  $L$ . Utilizzando le due equazioni precedenti gli

Nella parte superiore della figura 1 sono mostrati gli spettri sperimentali dei nuclei pari-pari  $^{232}\text{Th}$  e  $^{238}\text{U}$ . Si vede come tutti i valori dei momenti angolari siano pari e le parità siano positive. Inoltre, le spaziature tra i vari livelli seguono la legge data dall'equazione (5).

Il momento di inerzia empirico è dedotto dalla spaziatura dello spettro di rotazione. Si scopre che il momento di inerzia empirico è sempre più piccolo di quello di un rotore rigido (vedi la parte inferiore della figura 1). Questo indica che nel nucleo esiste un core superfluido che non ruota, e che soltanto la parte esterna del nucleo è in rotazione.

## 2 Spettro vibrazionale

Finora abbiamo considerato stati eccitati del nucleo generati dalla sua rotazione. Un altro modo di eccitazione dei nuclei è dovuto alle vibrazioni della superficie nucleare attorno alla posizione di equilibrio. Lo spettro di eccitazione vibrazionale è ben identificato nei nuclei sferici, come i doppio magici, in cui non esiste spettro di rotazione.

Alcuni tipi di vibrazione attorno alla posizione di equilibrio sono mostrate nella figura 2. Un modello semi-classico che descrive questo tipo di eccitazioni nucleari è quello a goccia di liquido in cui il nucleo è descritto come una goccia di liquido incomprimibile e se ne descrive la superficie utilizzando una funzione della distanza dal centro del nucleo:

$$R = R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) \quad (6)$$

Dove  $R_0$  è il raggio della sfera con lo stesso volume e  $Y_{\lambda\mu}$  è l'armonica sferica. I coefficienti  $\alpha_{\lambda\mu}$  descrivono le deformazioni del nucleo rispetto alla forma sferica. Questo tipo di trattazione è valido per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Processi come la fissione non possono essere trattati con questo modello.

Nel caso  $\lambda = 0$  il volume del nucleo viene modificato ma la forma rimane sferica. Questo moto di vibrazione si chiama *breathing mode* (modo di respiro) e dà informazioni sulla compressibilità della materia nucleare.

Il caso  $\lambda = 1$  corrisponde ad una situazione in cui si ha una traslazione del centro di massa. Questo non è un moto di eccitazione del nucleo, quindi il caso  $\lambda = 1$  non viene considerato. Consideriamo stati vibrazionali con  $\lambda \geq 2$  che sono detti fononi, in analogia a quanto avviene per i moti di compressione nello stato solido.

Se i coefficienti  $\alpha_{\lambda\mu}$  sono indipendenti dal tempo, si descrive una deformazione permanente del sistema. Le vibrazioni attorno alla posizione, sferica, di equilibrio sono quindi descritte da coefficienti  $\alpha_{\lambda\mu}$  dipendenti dal tempo.

Per piccole deformazioni attorno alla posizione di equilibrio, il moto può essere trattato come armonico. L'hamiltoniana classica che descrive questo tipo di moto è:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} (B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2) \quad (7)$$

dove i valori delle costanti  $B_{\lambda}$  e  $C_{\lambda}$  sono espressi da numeri reali. La soluzione dell'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana (7) produce uno spettro armonico come quello presentato nella figura 2, con:

$$E_{N,\lambda} = \left( N + \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \hbar\omega, \quad (8)$$

dove  $N$  è il numero di fononi di multipolarità  $\lambda$  e con

$$\omega^2 = \frac{C_{\lambda}}{B_{\lambda}}.$$

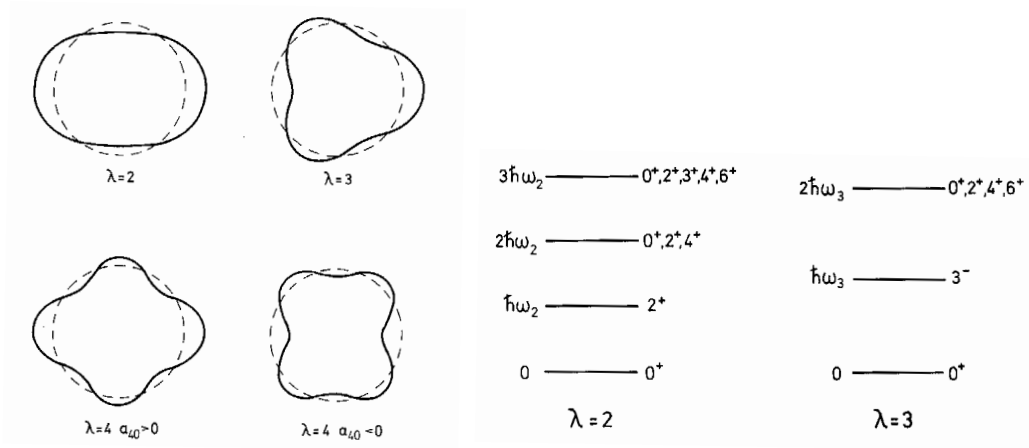


Figura 2: Sinistra: vibrazioni di quadrupolo ( $\lambda=2$ ), ottupolo ( $\lambda=3$ ), esadecapolo ( $\lambda=4$ ) attorno alla forma sferica. Destra: schema dello spettro di eccitazione per deformazioni armoniche di quadrupolo ( $\lambda=2$ ) e ottupolo ( $\lambda=3$ ).

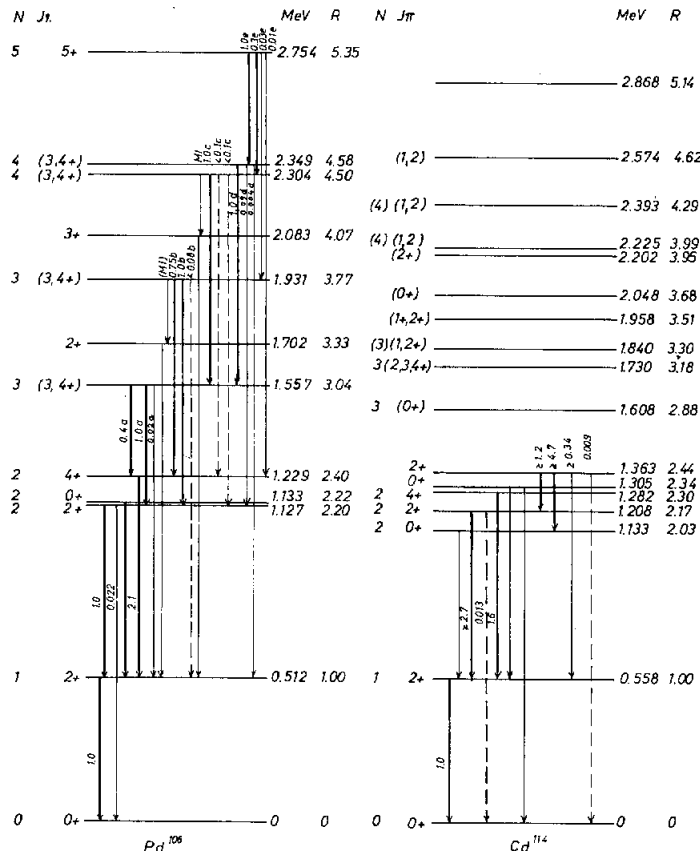


Figura 3: Spettro sperimentale vibrazionale.

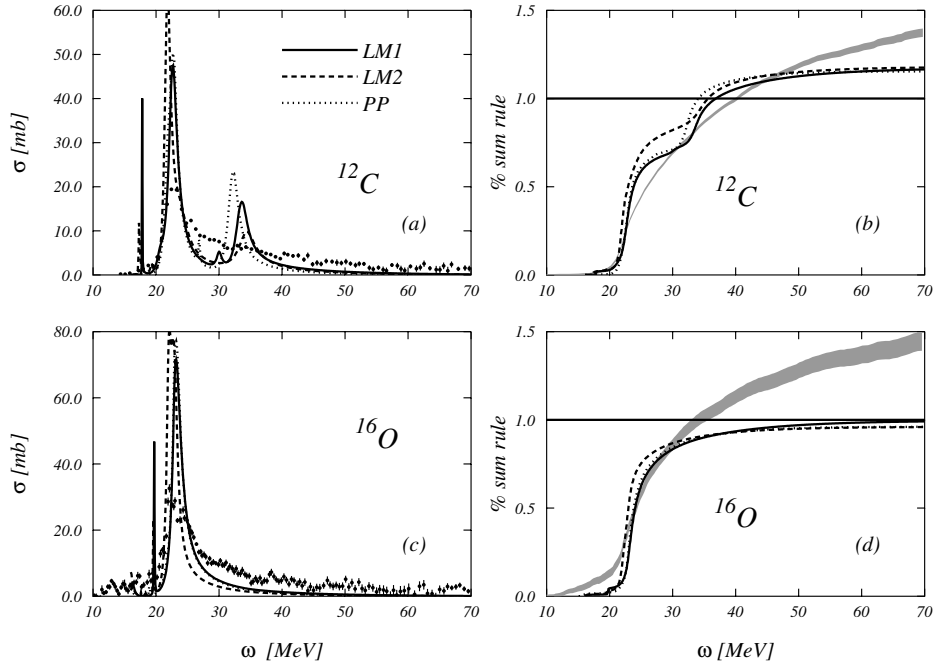


Figura 4: Sezioni d'urto totali di fotoassorbimento in  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ .

Gli stati eccitati superiori al primo sono prodotti dall'accoppiamento del momento angolare, e della parità del fonone eccitato. Ad esempio il secondo stato eccitato per  $\lambda = 2$  è dato dall'accoppiamento di due eccitazioni di tipo  $2^+$ . L'energia di eccitazione è  $2\hbar\omega$  ed i momenti angolari possibili sono:  $0^+$ ,  $2^+$  e  $4^+$ . I termini con 1 e 3 sono nulli perché producono funzioni d'onda antisimmetriche per lo scambio dei due fononi (che seguono la statistica bosonica).

I nuclei mostrano spettri con le caratteristiche previste dal modello vibrazionale. La degenerazione tra  $0^+$ ,  $2^+$  e  $4^+$  è rimossa per la presenza di forze residue (vedi fig. 3).

Il modello appena presentato non descrive un'importante moto di eccitazione presente in tutti i nuclei con  $A > 10$ : la risonanza gigante di dipolo.

Già nel 1947 fu osservato che, ad energie di eccitazione che variano a seconda dei nuclei in un intervallo tra i 15 e 25 MeV, la sezione d'urto di fotoassorbimento mostra un grande picco, che fu denominato risonanza gigante (vedi fig. 4).

La risonanza gigante di dipolo, viene spiegata supponendo che sotto l'influenza del campo elettromagnetico del fotone, i protoni si muovono coerentemente in una direzione. Rispetto al centro di massa del nucleo è come se esistessero due fluidi, uno protonico e uno neutronico, che oscillano in opposizione di fase, figura 5. Questo moto viene descritto da equazioni classiche dell'idrodinamica. Si trova che la dipendenza della posizione del picco della risonanza gigante dipende dal numero di massa come  $\sim 70A^{-1/3}$  MeV, che è una buona approssimazione di

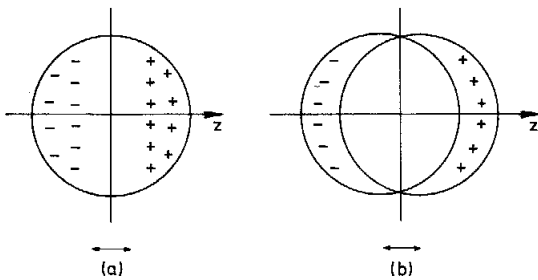


Figura 5: Modello a due fluidi della risonanza di dipolo.

quanto si verifica sperimentalmente.

## 2.1 Eccitazioni di particella singola

Le eccitazioni nucleari che abbiamo discusso finora sono di tipo collettivo, cioè eccitazioni in cui gran parte dei nucleoni che formano il nucleo sono coinvolti. In aggiunta a questi stati, lo spettro di eccitazione del nucleo presenta anche stati eccitati prodotti promuovendo un nucleone da uno stato che si trova al di sotto della superficie di Fermi ad uno che si trova al di sopra (vedi fig. 6).

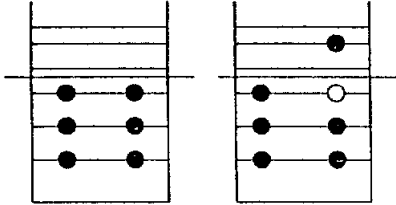


Figura 6: Schema di eccitazione di singola particella.

Un esempio classico di questi stati è dato dagli stati  $12^-$  e  $14^-$  nello spettro di eccitazione del  $^{208}\text{Pb}$ . Questi stati ad alto spin sono praticamente generati da pure eccitazioni particella-buca. Il  $14^-$  è costituito dalla transizione neutronica  $1j_{15/2}, 1i_{13/2}^{-1}$  (il primo è lo stato *particella* sopra il livello di Fermi, il secondo è lo stato *buca* sotto il livello di Fermi). I due stati  $12^-$  sono combinazioni della stessa transizione neutronica con la transizione protonica  $1i_{13/2}, 1h_{11/2}^{-1}$ . I fattori di forma elettromagnetici degli stati  $12^-$  sono mostrati nella figura 7.

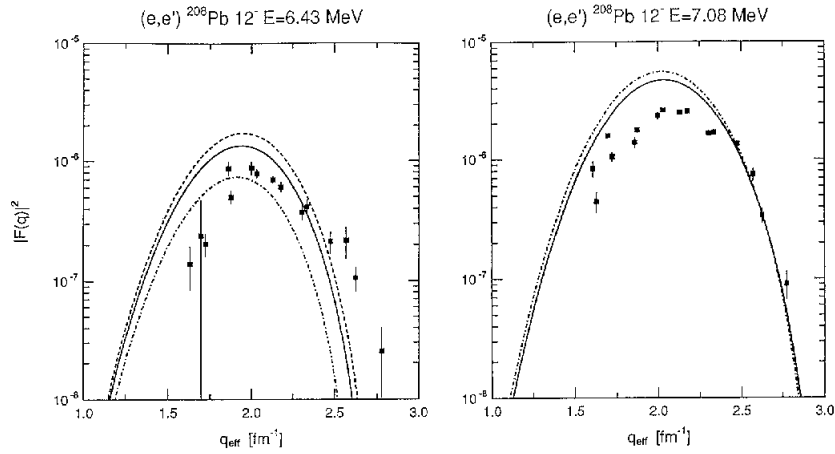


Figura 7: Fattori di forma elettromagnetici di due stati  $12^-$  nel nucleo  $^{208}\text{Pb}$ .

### 3 Descrizioni microscopiche

Da quanto abbiamo discusso risulta chiaro come lo spettro di eccitazione del nucleo sia estremamente complicato. Nello stesso intervallo di energia si trovano stati collettivi, generati sia da rotazioni che da vibrazioni, e stati prodotti da eccitazioni di singola particella. Abbiamo descritto gli stati collettivi utilizzando modelli macroscopici, rotatore rigido o goccia di liquido, pensati ed adattati per descrivere specificamente alcuni tipi di eccitazione. Questi modelli sono ormai obsoleti. La moderna descrizione degli stati eccitati utilizza teorie che permettono una visione unificata di eccitazioni di singola particella e collettive. Qui sotto presento un modello schematico che però riassume le idee principali su cui si basano queste teorie microscopiche.

Il punto di partenza di queste teorie è la definizione dei gradi di libertà da utilizzare per la descrizione del sistema a multicorpi e la loro mutua interazione. Nel caso del nucleo atomico questi gradi di libertà sono i nucleoni che interagiscono tra loro con una interazione ricavata dallo studio dei sistemi a due corpi, deutone e processi di diffusione elastica tra nucleoni.

Una volta fissati questi due punti si tratta di risolvere l'equazione di Schrödinger a multicorpi

$$\left[ \sum_{i=1}^A \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A v(i,j) \right] |\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (9)$$

dove  $v(i,j)$  è l'interazione tra due nucleoni. La soluzione di questa equazione senza fare alcune approssimazioni è tecnicamente un problema molto difficile da risolvere. Al momento questo problema è stato risolto soltanto per nuclei fino ad  $A = 12$ . Per sistemi nucleari con un maggior numero di nucleoni si utilizzano tecniche approssimate.

Il punto di partenza è la separazione dell'hamiltoniana in una parte ad un corpo  $H_0$  e in una interazione residua  $V_{\text{res}}$

$$H|\Psi\rangle = (H_0 + V_{\text{res}})|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (10)$$

L'equazione di Schrödinger definita dalla parte ad un corpo è risolvibile

$$H_0|\Phi_i\rangle = \sum_{i=1}^A h_i|\Phi_i\rangle = \mathcal{E}_i|\Phi_i\rangle \quad (11)$$

dove  $|\Phi_i\rangle$  è un determinante di Slater composto dalle autofunzioni dell'hamiltoniana di singola particella

$$h_i|\phi_i\rangle = \epsilon_i|\phi_i\rangle \quad (12)$$

Il determinante di Slater che descrive lo stato fondamentale,  $|\Phi_0\rangle$ , è composta da tutti gli stati di singola particella occupati al di sotto della superficie di Fermi. I determinanti che descrivono gli stati eccitati sono ottenuti sostituendo uno, o più, stati sotto la superficie di Fermi, detti stati buca, con altrettanti al di sopra, detti stati particella. Questa operazione in gergo viene descritta come eccitazione di una, o più, coppie particella-buca. I valori dell'energia di eccitazione  $\mathcal{E}_i$  sono ottenuti sottraendo alle energie degli stati di particella le energie degli stati di buca.

I determinanti di Slater formano una base completa, quindi è possibile descrivere gli autostati  $|\Psi\rangle$  dell'hamiltoniana generale come combinazione lineare di determinanti di Slater.

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\Phi_i\rangle \quad (13)$$

Moltiplicando l'equazione di Schrödinger (10) per il determinante di Slater  $\langle\Phi_k|$  otteniamo

$$\langle\Phi_k|H|\Psi\rangle = \langle\Phi_k|(H_0 + V_{\text{res}}) \sum_i c_i |\Phi_i\rangle = \sum_i c_i (\mathcal{E}_k \delta_{k,i} + V_{ki}) = E \sum_i c_i \delta_{ki} \quad (14)$$

che è una equazione agli autovalori. In forma matriciale assume l'aspetto

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 + V_{1,1} & V_{1,2} & \cdots & V_{1,N} \\ V_{2,1} & \mathcal{E}_2 + V_{2,2} & \cdots & V_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{N,1} & V_{N,2} & \cdots & \mathcal{E}_N + V_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_N \end{pmatrix} \quad (15)$$

dove abbiamo definito gli elementi di matrice dell'interazione come

$$V_{k,i} = \langle \Phi_k | V_{\text{res}} | \Phi_i \rangle \quad (16)$$

Da questa formulazione del problema, risulta evidente che quando i termini  $V_{k,i}$  sono trascurabili rispetto a  $\mathcal{E}_i$  si producono eccitazioni di particella singola. Nel limite in cui tutti i  $V_{k,i}$  sono nulli, la matrice è diagonale e quindi gli autovalori  $E$  coincidono con le  $\mathcal{E}_i$ . In questo limite, la funzione d'onda  $|\Psi\rangle$  per ogni autovalore  $E = \mathcal{E}_i$  è descritta da un singolo determinante di Slater. Questo equivale ad affermare che per ogni autostato c'è un  $c_i = 1$  e tutti gli altri sono nulli.

Al contrario, quando i termini  $V_{k,i}$  sono confrontabili con  $\mathcal{E}_i$ , o addirittura più grandi, si ha che gli autovalori  $E$  sono molto differenti da  $\mathcal{E}_i$ . I coefficienti  $c_i$  assumono valori ben diversi da quelli dello stato di singola particella, e lo stato è descritto da una combinazione lineare di vari determinanti di Slater. Lo stato collettivo è così descritto come sovrapposizione di eccitazioni di singola particella.

Questo è un modello schematico, ma anche teorie più raffinate si basano sullo stesso principio: lo stato collettivo è descritto come combinazione ben pesata di eccitazioni particella-buca.

# Domande

[N2-20] [N3-15] [N4-16]