

## Lezione 8

# Decadimento $\alpha$

Il decadimento radioattivo  $\alpha$  avviene spontaneamente quando il  $Q$  valore della reazione

$$M(A, Z) \rightarrow M(A - 4, Z - 2) + M(4, 2)$$

è positivo.

Empiricamente la zona di emissione  $\alpha$  risulta essere quella dei nuclei con  $Z \geq 83$ , anche se si conoscono alcuni nuclei che decadono  $\alpha$  pur avendo un valore di  $Z$  più basso.

Un altro dato empiricamente rilevante è il fatto che ogni specie radioattiva  $\alpha$  emette uno o più gruppi di particelle  $\alpha$ . Gli spettri energetici delle particelle  $\alpha$  sono discreti.

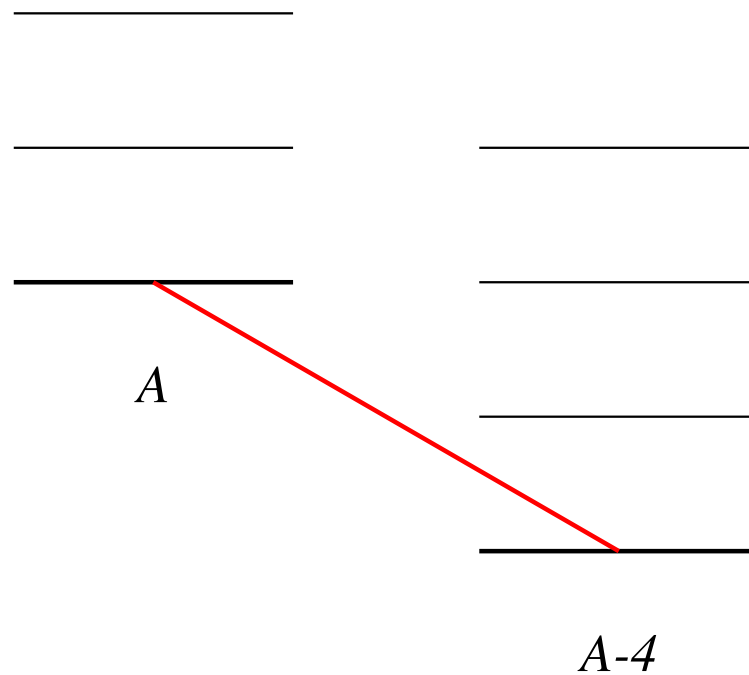
$$M = M_1 + M_2 + T_1 + T_2 \quad ; \quad M - M_1 - M_2 = T_1 + T_2$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

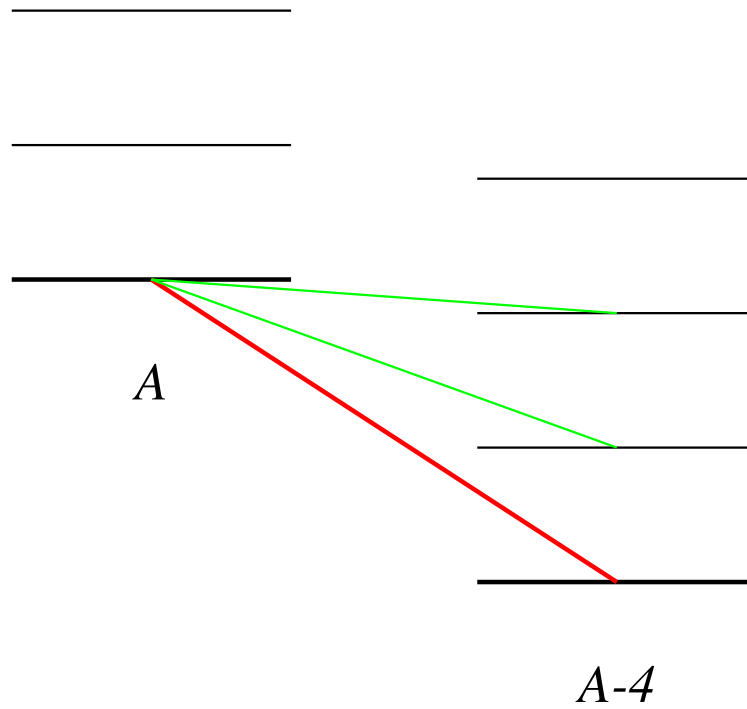
$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_2} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2} \left[ \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right] = M - M_1 - M_2$$

Si osservano spettri di tre tipi.

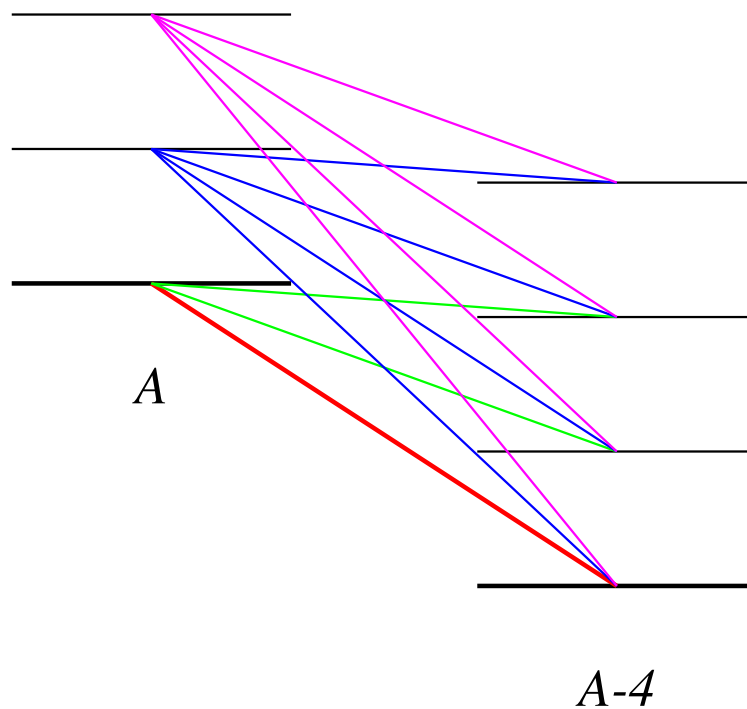
1) Spettri con una sola riga di emissione.

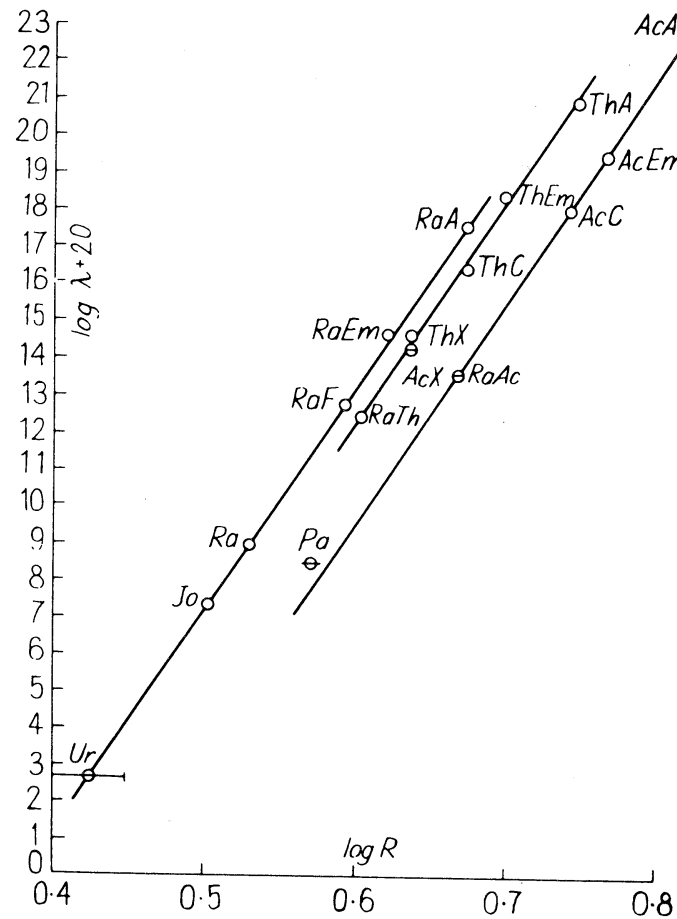


2) Spettri con più righe la cui riga più intensa è quella con energia massima.



3) Spettri in cui alle righe tipiche dei casi precedenti, si aggiungono gruppi di righe di particelle  $\alpha$  di energia più elevata ma poco intensi.





## La legge di Geiger e Nuttal (1911)

$$\log \lambda = B \log R_{\alpha} - C.$$

$\lambda$  costante di decadimento

$R_{\alpha}$  percorso in aria ( $15^{\circ}$ , 1 atmosfera) ;  $B$  e  $C$  costanti

## Descrizione del processo di emissione $\alpha$

Costante di decadimento

$$\lambda = f \nu P$$

$f$  frazione di tempo in cui nel nucleo esiste  $\alpha$

$\nu$  frequenza dei tentativi di emissione

$P$  probabilità di emissione (per ogni tentativo)

Schema del potenziale visto dalla particella  $\alpha$

$R$  - raggio del nucleo

$Z$  - numero di protoni del nucleo figlio ( $Z+2$  quelli del nucleo genitore)

$z$  - protoni della particella emessa ( $z=2$  nel nostro caso)

$K = e^2/4\pi\epsilon_0 \simeq 1.44 \text{ MeV fm}$  - costante di interazione elettrostatica

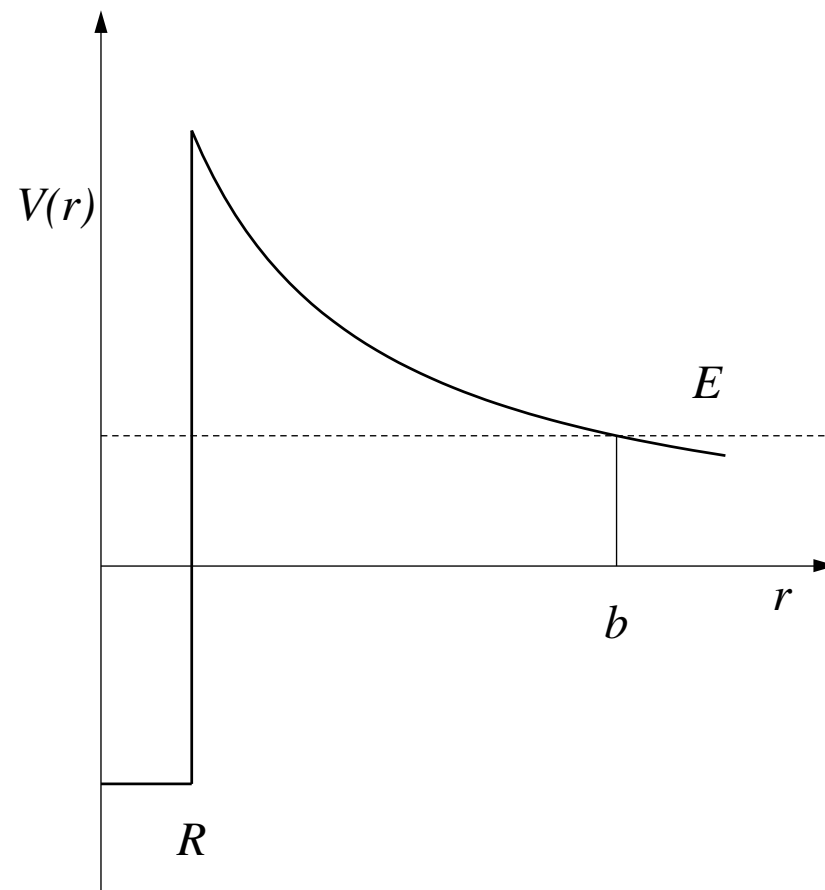
$$V(r) = v(r) \quad ; \quad r < R$$

$$V(r) = K \frac{Zz}{r} \quad ; \quad r > R$$

$R$  definito quando le interazioni nucleari sono spente.

$$K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha \hbar c \simeq \frac{200 \text{ MeV fm}}{137} \simeq 1.44 \text{ MeV fm}$$





Schema del potenziale visto dalla particella  $\alpha$

Energia della particella  $\alpha$ .

$$E = K \frac{Zz}{b}$$

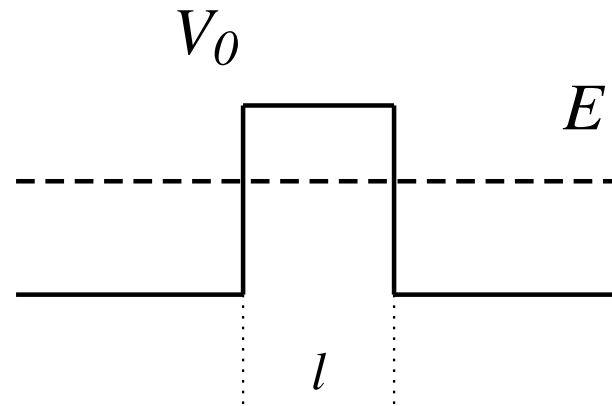
Valore del potenziale nel suo massimo

$$V(R) = K \frac{Zz}{R}$$

$z = 2, Z \simeq 100, R \simeq 10 \text{ fm}$

$$V(R) \simeq \frac{(1.44)(100)(2) \text{ MeV fm}}{10 \text{ fm}} \simeq \frac{300}{10} \text{ MeV}$$

L'emissione  $\alpha$  avviene per effetto tunnel



Coefficiente di trasmissione

$$T \sim e^{-G} \quad ; \quad G = 2l \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

$$m = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \text{ massa ridotta}$$

Nel nostro caso

$$G = 2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E)} dr$$

$$\begin{aligned}
G &= 2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E)} \, dr \\
&= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K Z z} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} \, dr \\
&= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K Z z} \sqrt{b} \left[ \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]
\end{aligned}$$

## Calcolo dell'integrale

$r = b \cos^2 \theta$  cambio di variabile

$\theta_i = 0$  ,  $r(\theta_f) = b$

$R = b \cos^2 \theta_i$ ,  $R/b = \cos^2 \theta_i$ ,  $\theta_i = \arccos \sqrt{R/b}$

$dr = -2b \cos \theta \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[ \frac{1}{b \cos^2 \theta} - \frac{1}{b} \right]^{\frac{1}{2}} (-2b \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= -2 \sqrt{b} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[ \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \sin^2 \theta d\theta = 2 \sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \sqrt{b} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_i} = 2 \sqrt{b} \left[ \frac{\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_i \right] \\ &= \sqrt{b} \left[ \theta_i - \frac{1}{2} 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \right] = \sqrt{b} \left[ \theta_i - \cos \theta_i \sqrt{\sin \theta_i} \right] \\ &= \sqrt{b} \left[ \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \end{aligned}$$

$$\lambda = f \nu T = f \frac{v}{2R} e^{-G}$$

$(v/2R)$  numero di volte che la particella  $\alpha$  attraversa il nucleo.

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - G$$

per  $z = 2$  abbiamo

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - 4 \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} K Z} \sqrt{b} \left[ \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]$$

Normalmente si ha che  $b \gg R$  quindi

$$\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} \simeq \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2} K Z} \sqrt{b} \frac{\pi}{2} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2} K Z} \sqrt{b} \left[ \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2ZK}{E}} \quad ; \quad \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \simeq 1$$

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - KZ \frac{4\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{1}{E}} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2} K Z R}$$

Dipendenza dall'energia proporzionale a  $-1/\sqrt{E}$ .

In Geiger e Nuttal  $\log E$ .

Nell'intervallo energetico in esame  $-A/\sqrt{E} \simeq B \log E$  con errori attorno al 3%

# Approssimazioni

- Abbiamo utilizzato l'espressione per  $b \gg R$ . Questa semplificazione non era necessaria ma ci ha facilitato il confronto tra le due equazioni.
- Abbiamo considerato costante la probabilità di trovare una particella  $\alpha$  all'interno del nucleo.
- Abbiamo semplificato il potenziale all'interno del nucleo con una semplice buca quadrata.
- Abbiamo ipotizzato che i nuclei fossero sferici e pari-pari.



# Domande

[N2-2] [N2-15] [N3-1]