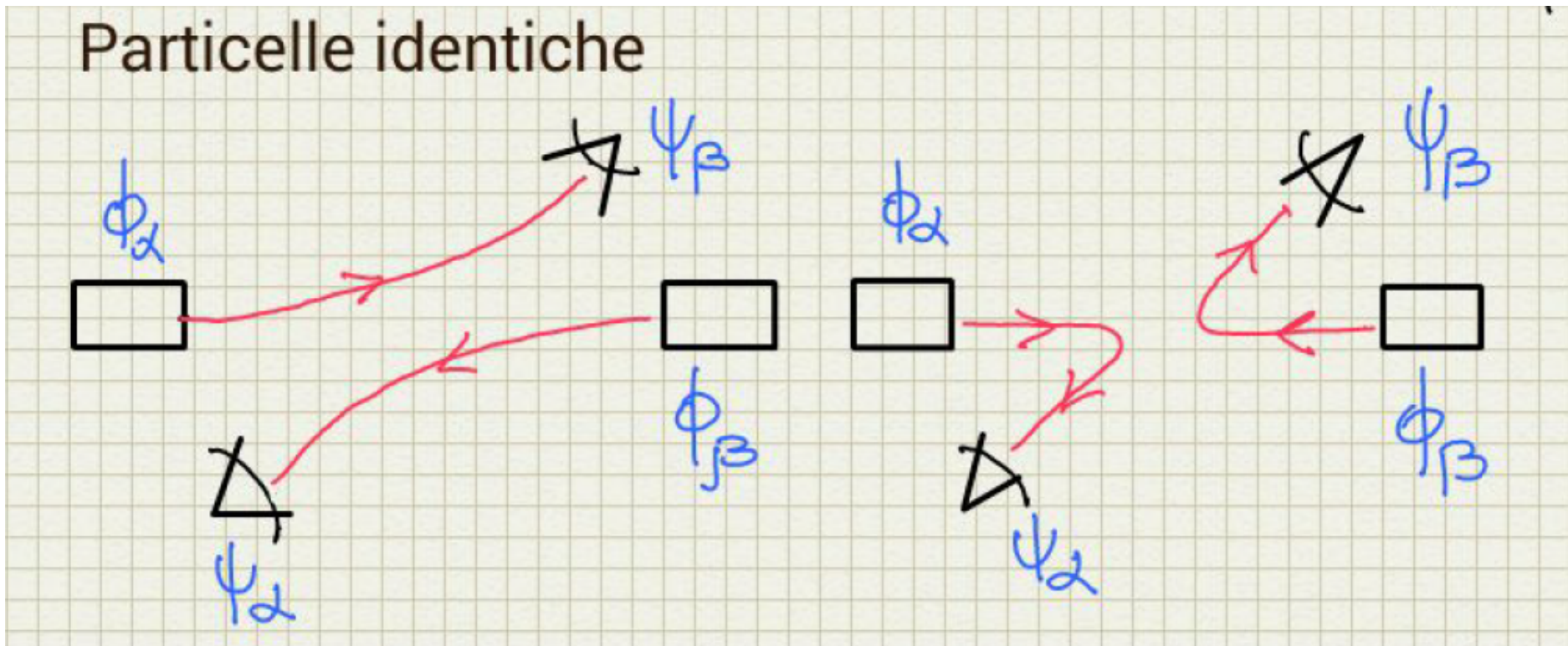


Lezione 15

Particelle identiche

In M.Q. non ci sono traiettorie



I due processi sono indistinguibili.

Nell'ipotesi in cui le particelle non interagiscono.

Sinistra $\langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2) \rangle$

Destra $\langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \rangle$

Spazio di Hilbert $\epsilon(1, 2) = \epsilon(1) \otimes \epsilon(2) = \epsilon(2) \otimes \epsilon(1)$

Operatore di permutazione

$$\mathcal{P}(2, 1) |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle = |\psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\rangle = |\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)\rangle$$

$$\mathcal{P}^2 = I$$

$$\mathcal{P}(2, 1)\mathcal{P}(2, 1) |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle = \mathcal{P}(2, 1) |\psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\rangle = |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle$$

Hermiticit  $\mathcal{P}^+(1, 2) = \mathcal{P}(2, 1)$

$$\langle \psi_{\alpha'}(1)\psi_{\beta'}(2) | \mathcal{P}(2, 1) | \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \rangle = \langle \psi_{\alpha'}(1)\psi_{\beta'}(2) | \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2) \rangle = \delta_{\alpha',\beta}\delta_{\beta',\alpha}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\alpha'}(1)\psi_{\beta'}(2) | \mathcal{P}^+(2, 1) | \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \rangle &= (\langle \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) | \mathcal{P}(2, 1) | \psi_{\alpha'}(1)\psi_{\beta'}(2) \rangle)^* \\ \langle \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) | \psi_{\beta'}(1)\psi_{\alpha'}(2) \rangle^* &= \delta_{\alpha',\beta}\delta_{\beta',\alpha} \end{aligned}$$

Operatore unitario

$$\mathcal{P}^+(2,1)\mathcal{P}(2,1) = \mathcal{P}(2,1)\mathcal{P}^+(2,1) = |\mathcal{P}(2,1)|^2 = I$$

Autovalori ± 1 .

$\mathcal{P}(2,1)|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$ Stato simmetrico

$\mathcal{P}(2,1)|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle$ Stato antisimmetrico

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{2}[I + \mathcal{P}(2,1)] \quad ; \quad \mathcal{A} \equiv \frac{1}{2}[I - \mathcal{P}(2,1)]$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2}[I + \mathcal{P}]\frac{1}{2}[I + \mathcal{P}] = \frac{1}{4}(I + 2\mathcal{P} + \mathcal{P}^2) = \frac{1}{4}(2I + 2\mathcal{P}) = \mathcal{S}$$

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{2}[I - \mathcal{P}]\frac{1}{2}[I - \mathcal{P}] = \frac{1}{4}(I - 2\mathcal{P} + \mathcal{P}^2) = \frac{1}{4}(2I - 2\mathcal{P}) = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \frac{1}{2}[I + \mathcal{P}]\frac{1}{2}[I - \mathcal{P}] = \frac{1}{4}(I + \mathcal{P} - \mathcal{P} - \mathcal{P}^2) = 0$$

$$\mathcal{S}^+ = \mathcal{S} \quad ; \quad \mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \quad ; \quad \mathcal{S} + \mathcal{A} = I$$

$$\mathcal{P}\mathcal{S}|\psi\rangle = \mathcal{P}\frac{1}{2}[I + \mathcal{P}]|\psi\rangle = \frac{1}{2}[\mathcal{P} + \mathcal{P}^2]|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\mathcal{P} + I)|\psi\rangle = \mathcal{S}|\psi\rangle$$

$$\mathcal{P}\mathcal{A}|\psi\rangle = \mathcal{P}\frac{1}{2}[I - \mathcal{P}]|\psi\rangle = \frac{1}{2}[\mathcal{P} - \mathcal{P}^2]|\psi\rangle = -\frac{1}{2}(-\mathcal{P} + I)|\psi\rangle = -\mathcal{A}|\psi\rangle$$

$\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ sono operatori di proiezione.

Osservabili

$$B |\psi_\alpha\rangle = b_\alpha |\psi_\alpha\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(2,1)B(1)\mathcal{P}^\dagger(2,1) |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle &= \mathcal{P}(2,1)B(1) |\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)\rangle \\ &= \mathcal{P}(2,1)b_\beta |\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)\rangle = b_\beta \mathcal{P}(2,1) |\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)\rangle = b_\beta |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(2,1)B(1)\mathcal{P}^\dagger(2,1) = B(2) \quad ; \quad \mathcal{P}(2,1)B(2)\mathcal{P}^\dagger(2,1) = B(1)$$

$$\mathcal{P}(2,1)[B(1) + C(2)]\mathcal{P}^\dagger(2,1) = B(2) + C(1)$$

$$\mathcal{P}(2,1)[B(1)C(2)]\mathcal{P}^\dagger(2,1) = \mathcal{P}(2,1)B(1)\mathcal{P}^\dagger(2,1)\mathcal{P}(2,1)C(2)\mathcal{P}^\dagger(2,1) = B(2)C(1)$$

$$\mathcal{P}(2,1)O(1,2)\mathcal{P}^\dagger(2,1) = O(2,1)$$

Operatore simmetrico $O_S(1,2) = O_S(2,1)$

$$\mathcal{P}O_S(1,2) = \mathcal{P}O_S(1,2)\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P} = O_S(2,1)\mathcal{P} = O_S(1,2)\mathcal{P} \longrightarrow [O_S, \mathcal{P}] = 0$$

Caso di 3 particelle.

Esempio **permutazioni** di 3 particelle.

$$\mathcal{P}(n, p, q) |\psi_\alpha(1), \psi_\beta(2), \psi_\gamma(3)\rangle = |\psi_\alpha(n), \psi_\beta(p), \psi_\gamma(q)\rangle$$

$n, m, q = 1, 2, 3$ Esempio

$$\mathcal{P}(2, 3, 1) |\psi_\alpha(1), \psi_\beta(2), \psi_\gamma(3)\rangle = |\psi_\alpha(2), \psi_\beta(3), \psi_\gamma(1)\rangle$$

Trasposizioni - si invertono solo due particelle, mentre le altre rimangono intatte.

$\mathcal{P}(1, 3, 2)$ è una trasposizione perché 1 rimane nella sua posizione.

Ogni permutazione può essere costruita come prodotto di trasposizioni.

Esempio

$$\mathcal{P}(3, 1, 2) = \mathcal{P}(3, 2, 1)\mathcal{P}(2, 1, 3) = \mathcal{P}(1, 3, 2)\mathcal{P}(3, 2, 1)$$

$$\mathcal{P}(3, 1, 2) |\psi_\alpha(a), \psi_\beta(b), \psi_\gamma(c)\rangle = |\psi_\alpha(c), \psi_\beta(a), \psi_\gamma(b)\rangle$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(3, 2, 1)\mathcal{P}(2, 1, 3) |\psi_\alpha(a), \psi_\beta(b), \psi_\gamma(c)\rangle \\ = & \mathcal{P}(3, 2, 1) |\psi_\alpha(b), \psi_\beta(a), \psi_\gamma(c)\rangle = |\psi_\alpha(c), \psi_\beta(a), \psi_\gamma(b)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(1, 3, 2)\mathcal{P}(3, 2, 1) |\psi_\alpha(a), \psi_\beta(b), \psi_\gamma(c)\rangle \\ = & \mathcal{P}(1, 3, 2) |\psi_\alpha(c), \psi_\beta(b), \psi_\gamma(a)\rangle = |\psi_\alpha(c), \psi_\beta(a), \psi_\gamma(b)\rangle \end{aligned}$$

Gli operatori di permutazione NON COMMUTANO

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(3, 2, 1)\mathcal{P}(1, 3, 2) |\psi_\alpha(a), \psi_\beta(b), \psi_\gamma(c)\rangle \\ &= \mathcal{P}(3, 2, 1) |\psi_\alpha(a), \psi_\beta(c), \psi_\gamma(b)\rangle = |\psi_\alpha(b), \psi_\beta(c), \psi_\gamma(a)\rangle \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{P}(1, 3, 2)\mathcal{P}(3, 2, 1) = \mathcal{P}(3, 1, 2) \neq \mathcal{P}(3, 2, 1)\mathcal{P}(1, 3, 2) = \mathcal{P}(2, 3, 1)$$

Per ogni **permutazione** il numero di **trasposizioni** necessarie per definirle rimane fisso.

$\mathcal{P}(1, 2, 3)$, $\mathcal{P}(3, 1, 2)$, $\mathcal{P}(2, 3, 1)$ hanno un numero PARI di trasposizioni,
 $\mathcal{P}(1, 3, 2)$, $\mathcal{P}(2, 1, 3)$, $\mathcal{P}(3, 2, 1)$ hanno un numero DISPARI di trasposizioni,

Generalizzazione a N particelle.

$\mathcal{P}(\alpha)$ operatore di permutazione che agisce su uno stato di N particelle.

Definisco stati simmetrici S o antisimmetrici A .

$\mathcal{P}(\alpha) |\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$ simmetrico.

$\mathcal{P}(\alpha) |\psi_A\rangle = \epsilon_\alpha |\psi_A\rangle$ con $\epsilon_\alpha = 1$ se $\mathcal{P}(\alpha)$ è pari e $\epsilon_\alpha = -1$ se $\mathcal{P}(\alpha)$ è dispari.

Pari o dispari è il numero di **trasposizioni** necessarie per descrivere la **permutazione**.

I due operatori

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P(\alpha) \quad ; \quad \mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} P(\alpha)$$

sono proiettori. L'indice α è sommato su le $N!$ possibili permutazioni.

Si può dimostrare che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ sono hermitiani.

$$\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{S} \quad ; \quad \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}(\alpha) = \epsilon_\alpha\mathcal{A}$$

Questo perché $\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\gamma)$ e $\epsilon_\alpha\epsilon_\beta = \epsilon_\gamma$; $\epsilon_\eta^2 = 1$

$$\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{N!} \sum_{\gamma} \mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{S}$$

$$\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} \mathcal{P}(\alpha)\epsilon_\beta\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{N!} \sum_{\gamma} \epsilon_\gamma\epsilon_\alpha\mathcal{P}(\gamma) = \epsilon_\alpha\mathcal{A}$$

I due operatori $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ proiettano su sottospazi composti solo da stati S o A .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{S}|\psi\rangle &= \mathcal{S}|\psi\rangle \equiv |\psi_S\rangle \quad \text{forma } E_S \\ \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{A}|\psi\rangle &= \epsilon_\alpha\mathcal{A}|\psi\rangle \equiv |\psi_A\rangle \quad \text{forma } E_A \end{aligned}$$

Per $N > 2$ i sottospazi E_S ed E_A non sono complementari.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} + \mathcal{A} &= \frac{1}{6} [\mathcal{P}(1,2,3) + \mathcal{P}(3,1,2) + \mathcal{P}(2,3,1) + \mathcal{P}(1,3,2) + \mathcal{P}(2,1,3) + \mathcal{P}(3,2,1)] \\ &\quad + \mathcal{P}(1,2,3) + \mathcal{P}(3,1,2) + \mathcal{P}(2,3,1) - \mathcal{P}(1,3,2) - \mathcal{P}(2,1,3) - \mathcal{P}(3,2,1)] \\ &= \frac{1}{3} [\mathcal{P}(1,2,3) + \mathcal{P}(3,1,2) + \mathcal{P}(2,3,1)] \neq I \end{aligned}$$

Postulato di simmetrizzazione

Un sistema di particelle identiche è descritto da stati che godono di un solo tipo di simmetria rispetto alla permutazioni di queste particelle.

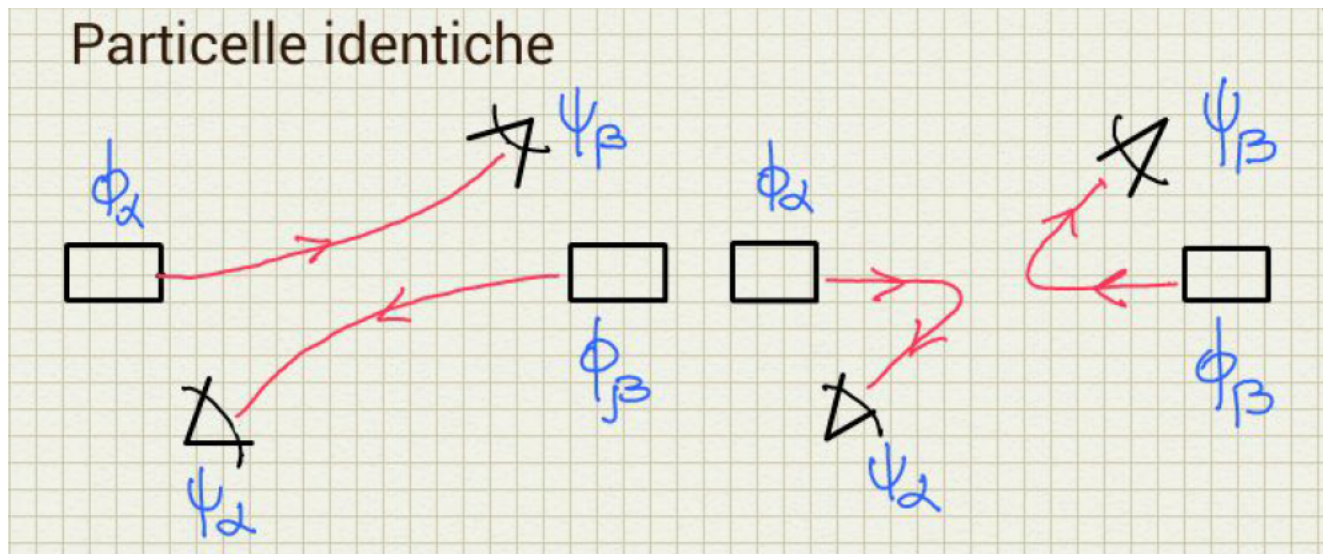
I sistemi di particelle a spin intero (zero incluso), dette **Bosoni**, sono descritti da stati simmetrici.

I sistemi di particelle a spin semi-intero, dette **Fermioni**, sono descritti da stati anti-simmetrici.

Particelle composite.

Teoria dei campi.

Diffusione di due particelle identiche



Stato iniziale

$$|\Phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon\mathcal{P}(1, 2)] |\phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)\rangle$$

Stato finale

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon\mathcal{P}(1, 2)] |\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle$$

con $\epsilon = 1$ per bosoni e $\epsilon = -1$ per fermioni.

Normalizzazione =1, con ortonormalità $\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned}
 & \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon \mathcal{P}^+(1,2)] \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon \mathcal{P}(1,2)] | \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | I + \epsilon \mathcal{P}^+(1,2) + \epsilon \mathcal{P}(1,2) + \epsilon^2 \mathcal{P}^+(1,2)\mathcal{P}(1,2) | \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | I + 2\epsilon \mathcal{P}(1,2) + I | \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) \rangle \\
 &= \underbrace{\langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) \rangle}_1 + \epsilon \underbrace{\langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \phi_\alpha(2)\phi_\beta(1) \rangle}_0
 \end{aligned}$$

Ampiezza di transizione

$$\begin{aligned}
 & \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon \mathcal{P}^+(1,2)] \frac{1}{\sqrt{2}}[I + \epsilon \mathcal{P}(1,2)] | \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \rangle \\
 &= \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \rangle + \epsilon \langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1) \rangle
 \end{aligned}$$

Probabilità = | ampiezza |². Interferenza.

Per fermioni il processo è inibito se $\alpha = \beta$. Principio di esclusione di Pauli.

Diffusione di due nucleoni identici

$$\psi(1, 2) = \sum_{L=0}^{\infty} R_L(r) Y_{L,M}(\Omega) \chi_{S,M}$$

$\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ singoletto, antisimmetrico.

Tripletto simmetrico

$$\chi_{1,1} = \uparrow\uparrow \quad ; \quad \chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \quad ; \quad \chi_{1,-1} = \downarrow\downarrow$$

$$Y_{L,M}(-\Omega) = (-1)^L Y_{L,M}(\Omega)$$

L		S		Totale
0	S	0	A	A
0	S	1	S	S
1	A	0	A	S
1	A	1	S	A

Le situazioni in rosso non sono presenti per fermioni.

Quando si può trascurare lo scambio?



$\phi_\alpha(1)$ e $\phi_\beta(2)$ localizzate in regioni dello spazio molto distanti e NON interagenti.

$$\langle \phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) | \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1) \rangle = \underbrace{\int d\mathbf{r}_1 \phi_\alpha^*(\mathbf{r}_1) \psi_\beta(\mathbf{r}_1)}_{\simeq 0} \underbrace{\int d\mathbf{r}_2 \phi_\beta^*(\mathbf{r}_2) \psi_\alpha(\mathbf{r}_2)}_{\simeq 0}$$

Modello a particelle indipendenti

$$H(1, 2, \dots, N) = \sum_{i=1}^N h(i) \quad ; \quad h(i) |\phi_i\rangle = \epsilon_i |\phi_i\rangle$$

$|\Phi\rangle$ autostato di H è un prodotto antisimmetrizzato di $|\phi_i\rangle$.

$$\Phi(x_1 \dots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{\nu_1}(x_1) & \dots & \phi_{\nu_N}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{\nu_1}(x_N) & \dots & \phi_{\nu_N}(x_N) \end{vmatrix}$$