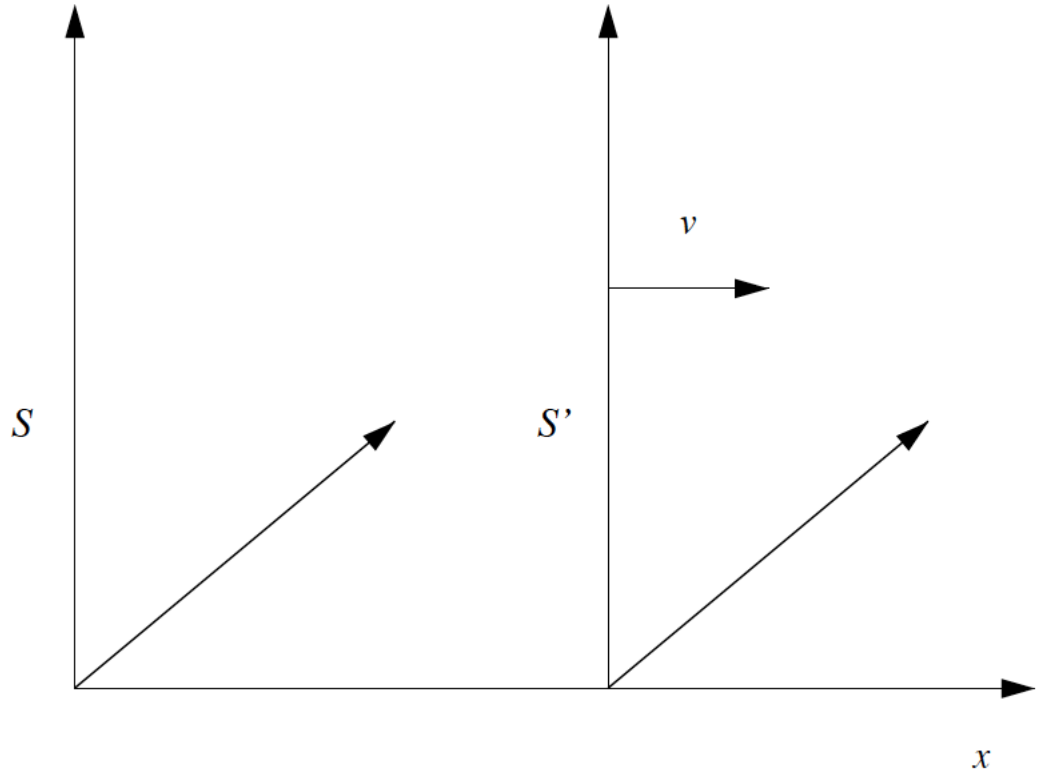
Lezione 2

# Etere




Moto rettilineo uniforme

Trasformazioni di Galilei

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad ; \quad t' = t$$

# Conseguenze delle trasformazioni di Galilei

1. Invarianza intervalli di tempo: $\Delta t' = \Delta t$
   Questo implica che l'informazione viaggi a velocità infinita.

2. Invarianza delle lunghezze

$$L = |x_b - x_a|$$

$$L' = |x'_b - x'_a| = |(x_b - vt) - (x_a - vt)| = |x_b - x_a| = L$$

   Il tempo $t$ in $b$ è lo stesso che in $a$.

3. Composizione vettoriale delle velocità

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d\mathbf{x} - \mathbf{v}dt}{dt} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

4. Invarianza delle accelerazioni

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a}$$

# Covarianza

Quando una relazione tra varie grandezze fisiche rimane la stessa in ogni sistema di riferimento (inerziale). Se uno dei membri di un'equazione fisica cambia da un sistema di riferimento all'altro anche l'altro cambia in maniera appropriata in modo da mantenere l'ugaglianza.

Esempio. Per due corpi.

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{K}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}' &= m_1\mathbf{u}'_1 + m_2\mathbf{u}'_2 = m_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + m_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \\
&= m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 - (m_1 + m_2)\mathbf{v} = \mathbf{K} - \text{cost.} = \mathbf{K}'
\end{aligned}$$

# Invarianza

Quando entrambi i membri dell'equazione rimangono immutati passando da un sistema all'altro.

$$|\mathbf{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = |m_1\mathbf{a}|$$

dato che $\mathbf{a}$ rimane costante per ogni sistema di riferimento.

# Princìpi della dinamica

1. Un sistema di riferimento è inerziale se un punto materiale libero posto in quiete rimane in quiete. Ogni altro sistema che si muove rispetto al primo in moto rettilineo uniforme è inerziale.
   (Covariante)

2. $$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$
   (Invariante)

3. In un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto totale,
   $$\mathbf{P} = m\mathbf{v}\ ,$$
   (ed il momento angolare totale rispetto ad un polo fisso) di un sistema materiale libero si conservano.
   (Covariante)

# Equazioni di Maxwell (1865) nel vuoto in cgs

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Da cui

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Poiché

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

si ha

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

Ipotesi campo elettrico vari solo in una direzione $x$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(x,t) = 0$$

Come appaiono nel sistema $S'$ dove

$$x' = x - vt \quad ; \quad t' = t$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x'} = \frac{\partial E}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial x'} = \frac{\partial E}{\partial t'} - v\frac{\partial E}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{\partial E}{\partial t'} - v\frac{\partial E}{\partial x'}\right] + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial E}{\partial t'} - v\frac{\partial E}{\partial x'}\right] \\
&= \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - v\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} - v\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} - v\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}\right]
\end{aligned}$$

Nel sistema S' l'equazione si trasforma in

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} + v^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}\right] = 0$$

Non è covariante.

Tre possibilità per risolvere il problema.
1) Modifica delle Eq. di Maxwell per soddisfare le trasformazioni di Galilei.
2) Principio di relatività è valido solo per la meccanica.
3) Modifica delle trasformazioni di Galilei.

Queste ipotesi sono
a) logicamente possibili,
b) vicendevolmente alternative,
c) da selezionare con il confronto con l'esperienza.

# Soluzione 1

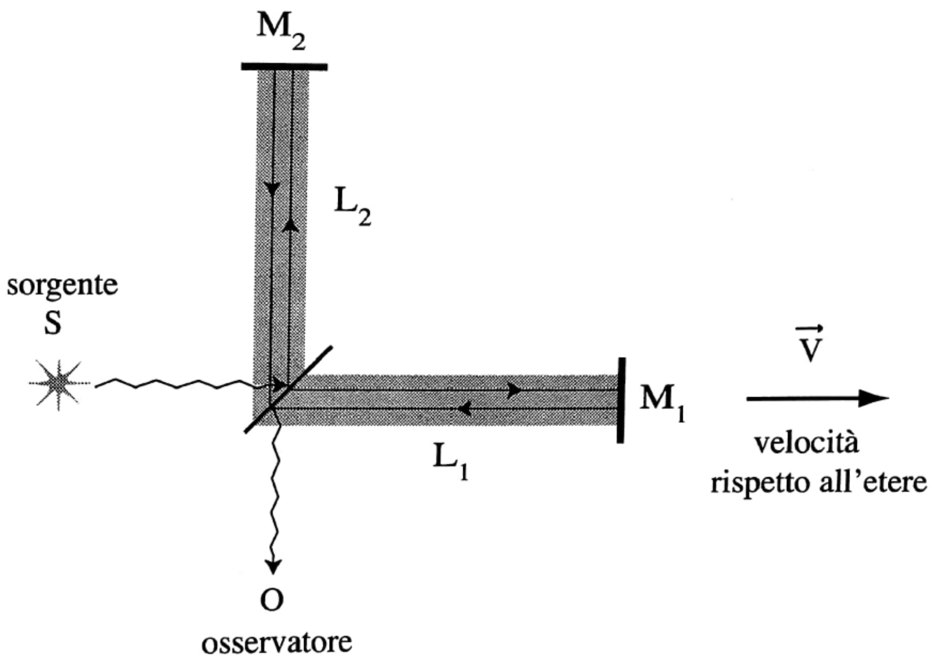
Nella prima ipotesi la velocità della luce dipende dalla velocità della sorgente. Modificando in maniera appropriata $c$ si possono trovare delle equazioni universali.

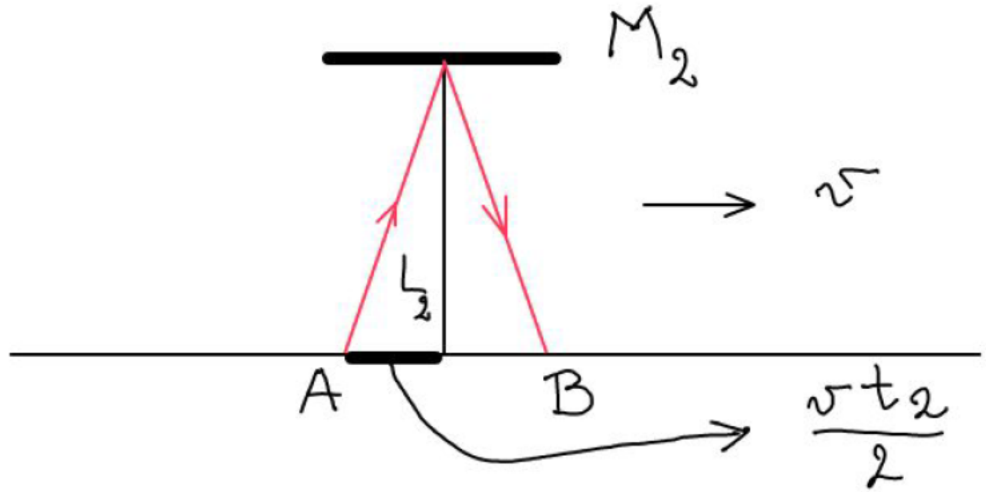
Stelle binarie mostrano orbite ellittiche, cosa non accettabile se $c$ dipendesse dalla velocità in avvicinamento o allontanamento dall'osservatore.

Più moderno in laboratorio.
Il decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ mostra che $c$ non dipende dalla velocità del $\pi^0$ nel laboratorio.

## Soluzione 2

La soluzione 2 ipotizza l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato nel quale $c$ e e le Eq. di Maxwell assumono la forma nota.
Le onde e.m. NON si propagano nel vuoto ma in un mezzo detto *ETERE* che riempie lo spazio in maniera omogenea e isotropa e contribuisce al meccanismo di propagazione.




Tempo andata e ritorno lungo $L1$

$$t_1 = \frac{L_1}{c - v} + \frac{L_1}{c + v} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Percorso lungo $L_2$ (teorema di Pitagora)

$$d^2 = \left(c\frac{t_2}{2}\right)^2 = L_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2$$

da cui

$$t_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{L_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \neq 0$$

Formazione di frange di interferenza.
Ruotando di $\pi/2$.

$$(\Delta t)_{\pi/2} = \frac{2}{c}\left(\frac{L_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{L_2}{1 - v^2/c^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta t - (\Delta t)_{\pi/2} &= \frac{2}{c}\left(\frac{L_1 + L_2}{1 - v^2/c^2} - \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \\
&= \frac{2}{c}(L_1 + L_2)\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)\right] \\
&\simeq \frac{L_1 + L_2}{c}\frac{v^2}{c^2}
\end{aligned}$$

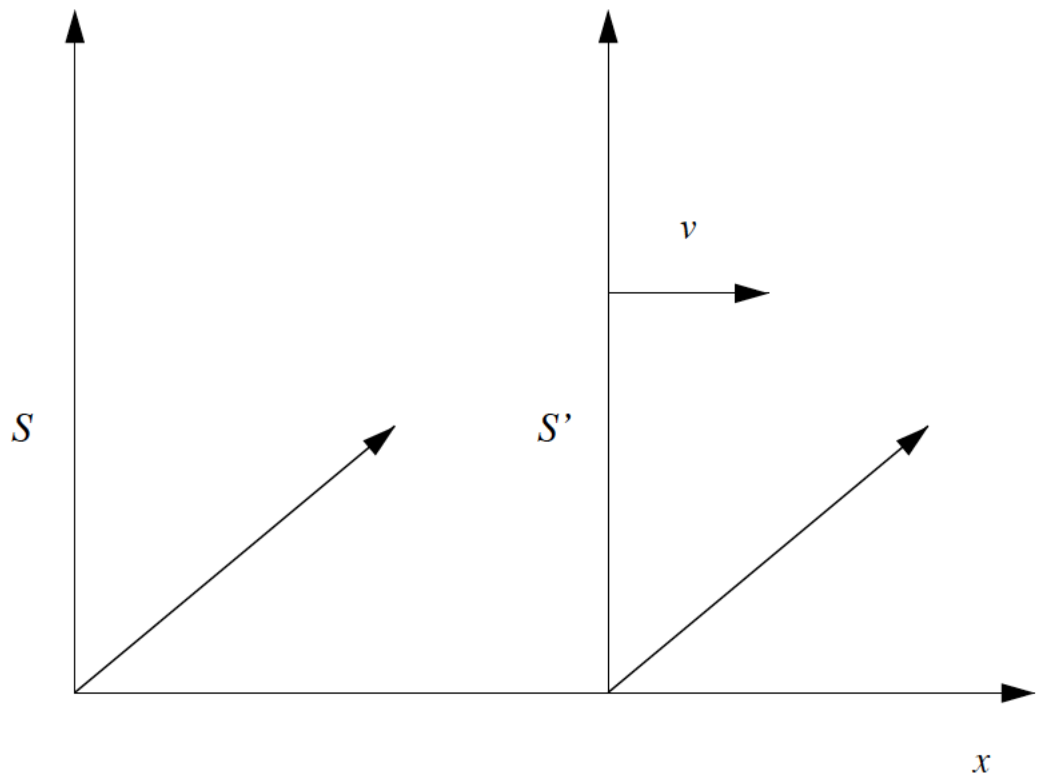
Differenza tra picchi dell'onda $(\Delta t - (\Delta t)_{\pi/2})c/\lambda$.
Valore atteso, Sole - Terra, 0.4, sensibilità Michelson-Morley 0.01, oggi 0.0027.

Mai identificate Contrazione del braccio. Trascinamento dell'etere. Scartate dal punto di vista osservativo.

# Principio di Relatività di Einstein

- La velocità dei segnali e.m. nel vuoto (in modulo) è la stessa in tutti i sistemi inerziali.

- Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali.




Se la velocità è data da spazio/tempo e deve rimanere costante, modificando lo spazio di deve modificare anche il tempo.
Al tempo $t' = t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono $x(0) = x'(0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 &= c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \mathbf{r}'^2 &= c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

Relazione tra le coordinate nei due sistemi di riferimento.

a) Per simmetria $y = y'$ e $z = z'$

b) La trasformazione deve essere lineare in $x$ e $t$, perché un moto rettilineo uniforme in $S$ deve rimanere tale anche in $S'$.

$$x' = K(x - vt) \quad ; \quad t' = A(t - Bx)$$

Per $K = A = 1$ e $B = 0$ abbiamo le trasformazioni di Galilei.

Consideriamo $y' = y = 0$ e $z = z' = 0$.
Quindi nel sistema $S'$

$$
\begin{aligned}
c^2 t'^2 &= x'^2 \\
c^2 A^2 (t - Bx)^2 &= K^2 (x - vt)^2 \\
c^2 A^2 (t^2 + B^2 x^2 - 2Bxt) &= K^2 (x^2 + v^2 t^2 - 2vxt)
\end{aligned}
$$

$$(K^2 - B^2 A^2 c^2) x^2 - 2(K^2 v - BA^2 c^2) xt = \left( A^2 - K^2 \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 t^2$$

Deve essere uguale a

$$x^2 = c^2 t^2$$

Quindi

$$(K^2 - B^2 A^2 c^2) = 1 \;\; ; \;\; (K^2 v - BA^2 c^2) = 0 \;\; ; \;\; \left( A^2 - K^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = 1$$

da cui

$$A^2 = \frac{K^2 v}{Bc^2} \;\; ; \;\; K^2 = \frac{1}{1 - Bv} \;\; ; \;\; (vc^2) B^2 - (v^2 + c^2) B + v = 0$$

Risolvendo l'ultima equazione

$$B = \frac{c^2 + v^2 \pm \sqrt{(c^2 - v^2)^2}}{2vc^2}$$

la soluzione $B = 1/v$ è da scartare perché $K \to \infty$

la soluzione fisicamente accettabile è $B = v/c^2$.

## Trasformazioni di Lorentz

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned}
}
$$

## Invarianza Eq. di Maxwell

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \;\; ; \;\; t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \;\; ; \;\; \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v \;\; ; \;\; \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma(-\frac{v}{c^2}) \;\; ; \;\; \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t'} \equiv \mathcal{A}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial x'} = \gamma\frac{\partial E}{\partial t'} - \gamma v\frac{\partial E}{\partial x'} \equiv \mathcal{B}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}(\mathcal{A}) + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}(\mathcal{A}) = \gamma^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}(\mathcal{B}) + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}(\mathcal{B}) = \gamma^2\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 v\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}$$

Eq. di Maxwell

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left[\gamma^2\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 v\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}\right] \\
&= \gamma^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right] = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right]
\end{aligned}$$

# Conseguenze cinematiche

1. Contrazione delle lunghezze

$$L' = \left| x'_b - x'_a \right| = \left| \frac{x_b + vt - x_a - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right| = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 \;\; ; \;\; L = L'/\gamma$$

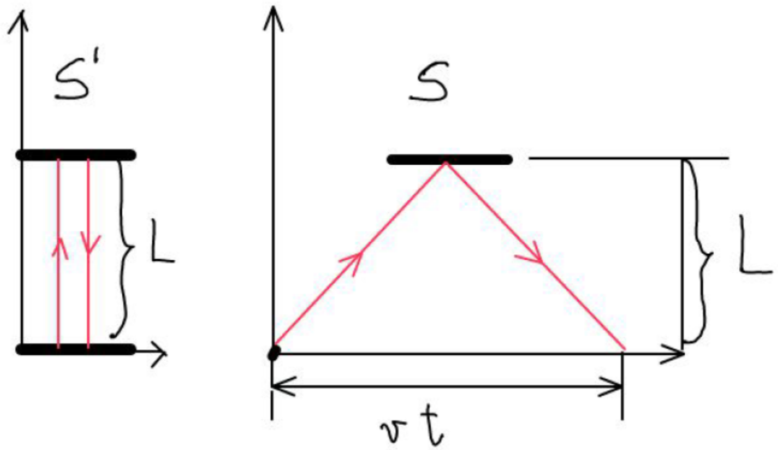
Le lunghezze misurate in $S'$, se viste da $S$ sono inferiori.

I tempi sono gli stessi in $a$ e $b$.

## 2. Dilatazione dei tempi

Orologio: successione di eventi regolari.
Due eventi $a$ e $b$.
Nel sistema di riferimento solidale con i due eventi, che avvengono nello stesso luogo $x'$.

$$\Delta T' = t'_b - t'_a$$




Nel sistema di riferimento $S$ che vede muoversi $S'$ si ha

$$\Delta T = t_b - t_a = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t'_b - t'_a) = \gamma \Delta T'$$

Dalla figura

$$\Delta T' = \frac{2L}{c}$$

Pitagora per $S$

$$\left(\frac{1}{2} c \Delta T\right)^2 = L^2 + \left(\frac{1}{2} v \Delta T\right)^2 \quad ; \quad \Delta T^2 = \frac{4L^2}{c^2}(1 - v^2/c^2)^{-1} \quad ; \quad \Delta T = \gamma \Delta T'$$

Decadimento del muone $\mu$.

$$\tau \simeq 2.2 \times 10^{-6}\text{s} \ ; \ \ \mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$$

alla velocità della luce $c$ percorre $\sim$ 660 m = 2.2 $10^{-6}$ s $\times$ 3 $\times 10^8$ m/s.

Osserviamo il $\mu$ che si muove rispetto alla terrra.

| $v_\mu/c$ | $\tau$ [s] | $L$ (km) |
|---|---|---|
| 0.9 | $5.0 \times 10^{-6}$ | 1.5 |
| 0.99 | $1.5 \times 10^{-5}$ | 4.6 |
| 0.999 | $4.9 \times 10^{-5}$ | 15.0 |
| 0.9999 | $1.5 \times 10^{-4}$ | 45.0 |

Paradosso dei gemelli.

Effetto quadratico delle velocità quindi perfettamente simmetrico per lo scambio dei due sistemi in moto relativo.

Composizione delle velocità

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \;\; ; \;\; \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \;\; ;$$

$$x' = \gamma(x - vt) \;\; ; \;\; y' = y \;\; ; \;\; z' = z \;\; ; \;\; t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - vdt) = \gamma(u_x - v)dt \;\; ; \;\; dy' = dy \;\; ; \;\; dz' = dz \;\; ; \;\; dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) = \gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)dt$$

Dividendo le prime tre equazioni per la quarta ottengo

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\
u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]^{-1} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2} \\
u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]^{-1} = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}
\end{aligned}$$

Consideriamo un raggio di luce che si propaga nella direzione $x$, quindi

$$u_x = c \ ; \ u_y = u_z = 0 \ .$$

Per le trasformazioni delle velocità abbiamo che

$$u'_x = \frac{c-v}{1-\frac{vc}{c^2}} = c \ ; \ u'_y = 0 \ ; \ u'_z = 0$$

Supponiamo ora che il raggio di luce si propaghi in direzione $y$

$$u_x = 0 \ ; \ u_y = c \ ; \ u_z = 0$$

Le velocità nel sistema S' sono:

$$u'_x = -v \ ; \ u'_y = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ ; \ u'_z = 0$$

La direzione di propagazione rispetto agli assi del sistema è cambiata, ma il modulo è lo stesso

$$\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = \sqrt{v^2 + c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + 0} = c$$

$c$ costante in ogni sistema di riferimento.
$v$ non può essere $> c$ perché rende immaginario $\gamma$.
Ogni composizione è fatta per mantenere $v < c$ in ogni sistema di riferimento.