Lezione 3

Formulazione covariante

Formulazione matriciale e formalismo di Minkowski.
(formalismo usato nelle alte energie)

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\; ; \;\; x'^\mu = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \beta = v/c \;\; ; \;\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$$

lettere greche μ, ν, α, β=0,1,2,3
lettere latine i,j,k,l=1,2,3

$$x'^\mu = \sum_{v=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

convenzione di Einstein

La luce si propaga nella direzione $\mathbf{n}/|n|$ alla velocità c.
La distanza percorsa è $\mathbf{r} = ct\,\mathbf{n}/|n|$ in S.
Nel riferimento S' è $\mathbf{r}' = ct'\,\mathbf{n}'/|n'|$.
Quadrando le due relazioni si ha

$$-\mathbf{r}^2 + c^2t^2 = -\mathbf{r}'^2 + c^2t'^2 = 0$$

Questo può essere scritto come

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu = 0$$

(per la luce).
Un evento è caratterizzato dalle 4 coordinate spazio-temporali che formano il vettore

$$(ct, \mathbf{r}) \equiv (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

La distanza infinitesima tra due eventi è (al quadrato)

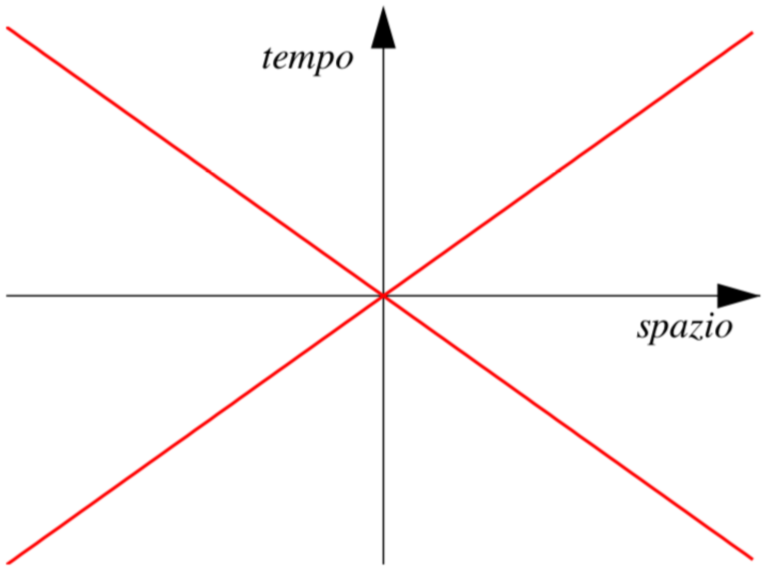
$$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (dS)^2 = (dS')^2 = 0$$

Trasformazione lineare quindi, indicando con v_1, v_2 e v_{12} le velocità relative

$$\begin{array}{rcl} dS' & = & a(v_1)dS \\ dS'' & = & a(v_2)dS' = a(v_{12})dS = a(v_2)a(v_1)dS \\ a(v_{12}) & = & a(v_2)a(v_1) \end{array}$$

Valida solo se $\forall v$ si ha $a(v) = 1$.

Invarianza della distanza tra due eventi.



Il modulo quadro di un quadrivettore non è positivo definito.

$$x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2$$

$|\mathbf{r}| = ct$ e $|\mathbf{r}| = -ct$ formano il cono luce. Per una distanza abbiamo

$$D^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2$$

$D^2 > 0 \rightarrow c^2(\delta t)^2 > \mathbf{r}^2$ tipo tempo. I due eventi possono essere collegati da segnali che hanno velocità inferiori a c.

$D^2 = 0 \rightarrow c^2(\delta t)^2 = \mathbf{r}^2$ tipo luce.

$D^2 < 0 \rightarrow c^2(\delta t)^2 < \mathbf{r}^2$ tipo spazio. I due eventi non sono causalmente collegati.

La quantità $x^\mu x_\mu = c^2t^2 - \mathbf{r}^2$ è invariante di Lorentz.

$$x_\mu \equiv (x_0, -x, -y, -z) \ \ ; \ \ x^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Metrica $g_{\mu\nu}$

$$x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x^0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Metrica dello spazio di Minkowski.

Trasformazione di Lorentz è lineare nelle coordinate e lascia invariata la forma quadratica. (Indici ripetuti sono sommati.)

$$(dS')^2 = g_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\, dx^{\alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = (dS)^2$$

Quindi

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$(\Lambda^T)^{\mu}_{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}$$

$$(\Lambda^T)^{\mu}_{\alpha}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}_{\mu} = g_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^T\, g\, \Lambda = g$$

Gruppo di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo.
a) Il prodotto $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ è ancora una trasformazione di Lorentz.

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^T g\,\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T g\,\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^T g\,\Lambda_2 = g$$

b) Proprietà associativa

$$(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) \otimes \Lambda_3 = \Lambda_1 \otimes (\Lambda_2 \otimes \Lambda_3)$$

c) Elemento neutro I identità $\Lambda \otimes I = \Lambda$, $I = I^T$, appartiene al gruppo. $I^T g\, I = g$.
d) $\exists$ l'inverso perché $\det(\Lambda) \neq 0$.

$$\det(g) = \det(\Lambda^T g\,\Lambda) = \det(\Lambda^T)\det(\Lambda)\det(g) = [\det(\Lambda)]^2\det(g) = \det(g)$$

Quindi $\det(\Lambda) = \pm 1$. $\exists \Lambda^{-1}$ tale che $\Lambda^{-1}\Lambda = I = \Lambda\Lambda^{-1}$

$$g = (\Lambda^T)^{-1}(\Lambda^T g \Lambda)(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^T)^{-1} g (\Lambda)^{-1}$$

Trasformazioni di Lorentz sono rotazioni nello spazio di Minkowski.