Lezione 5

Riassunto di

Meccanica Classica

Meccanica non relativistica $v << c$ ed $E_{\mathsf{kin}} << mc^2$.

Tre formalismi differenti - equivalenti.

1. Le tre leggi di Newton
2. Formalismo Lagrangiano. Sistema di equazioni differenziali al secondo ordine nel tempo.
3. Formalismo Hamiltoniano. Sistema di equazioni differenziali al primo ordine nel tempo.

L'approccio più vicino a quello della MQ è quello Hamiltoniano.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \;\; ; \;\; \mathbf{p} = m\mathbf{v} \;\; ; \;\; \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Se

$$\mathbf{F} = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

$\mathbf{p}$ costante del moto

Definizione

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \;\; ; \;\; \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Se $\mathbf{N} = 0$ allora $\mathbf{L}$ costante.

Lavoro

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \ \ ; \ \ W_{12} = \frac{1}{2} m(\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2)$$

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m \int \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = T$$

Forza conservativa: il lavoro dipende solo dai punti iniziali e finali e non dal percorso

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Potenziale

$$V(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \ \ ; \ \ \oint \Big(-\nabla V(\mathbf{r}) \Big) d\mathbf{S} = 0$$

$$W_{12} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) = T_2 - T_1 \ \ ; \ \ V(\mathbf{r}_2) + T_2 = V(\mathbf{r}_1) + T_1$$

Conservazione dell'energia

Sistema di N particelle puntiformi.

Definizione di sistema di riferimento inerziale.

Coordinate generalizzate $\{q_j\}$. $s = 3N$ se non ci sono vincoli, altrimenti $s = 3N - f$ se f è il numero di vincoli.

L'altra informazione necessaria per la descrizione completa del moto del sistema è la conoscenza di $\{p_j\}$ impulsi generalizzati.

1. Spazio euclideo a 3-D più una dimensione temporale.

2. Lo stato del sistema in certo istante t è caratterizzato, e completamente, descritto, dall'insieme delle $2s$ quantità $\{q_j(t)\}$ e $\{p_j(t)\}$. Si può pensare come un punto materiale che si muove in uno spazio delle fasi a $2s$ dimensioni e forma una traettoria.

3. Relatività galileiana

   (a) Le leggi della meccanica sono le stesse in ogni riferimento inerziale.

   (b) Fissato un sistema inerziale, ogni altro sistema che si muove, rispetto a questo, in moto rettilineo uniforme è, a sua volta, inerziale.

4. Omogenità ed isotropia dello spazio.

5. Omogeneità del tempo $t = t'$.

Principio di Hamilton

Ogni sistema fisico è caratterizzato da una funzione di stato del sistema dipendente da q e p ed, eventualmente dal tempo t. Questa funzione è detta **Hamiltoniana**.

$$H(q, p, t)$$

Definizione di **azione**

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[\sum_j p_j dq_j - H(q, p, t) dt \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j p_j \frac{dq_j}{dt} - H(q, p, t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \end{aligned}$$

Il moto del sistema è tale che l'azione S ha un estremo rispetto alla variazione $\delta q(t)$ e $\delta p(t)$ con le condizioni al contorno $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

$$\delta S = \delta \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[\sum_j p_j dq_j - H(q,p,t) dt \right] = 0$$

Ipotizzando che solo la variazione rispetto a k non sia nulla

$$\begin{aligned} & \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[\delta p_k dq_k + p_k \delta(dq_k) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt \right] \\ = \; & \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[dq_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} dt \right] \delta p_k + \left[p_k \delta(dq_k) - \frac{\partial H}{\partial q_k} dt dq_k \right] = 0 \end{aligned}$$

I due termini sono indipendenti quindi devono essere nulli separatamente. Dal primo termine

$$\left[dq_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} dt \right] = 0 \;\; ; \;\; dq_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} dt \;\; ; \;\; \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} p_k \delta(dq_k) = \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} p_k \frac{d(\delta q_k)}{dt} dt = \text{per parti}$$

$$= \; p_k \delta q_k \Big|_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} - \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \frac{d}{dt}(\delta p_k) \delta q_k dt = - \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \delta p_k \delta q_k$$

Il secondo termine è:

$$0 = \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[p_k \delta(dq_k) - \frac{\partial H}{\partial q_k} dt dq_k \right] = - \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left[\delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dt \right] \delta q_k$$

$$\delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dt = 0 \;\; ; \;\; \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Equazioni di Hamilton

$$\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \quad ;$$

Sistema di $2s$ equazioni differenziali. Noti q e p , $H(q, p, t)$ ad un tempo iniziale t_0 la soluzione del sistema è unica. **Determinismo**.

Parentesi di Poisson

Variabile dinamica $f(q,p,t)$ funzione delle variabili q,p,t.
Caso f=costante nel tempo, integrale primo, legge di conservazione.
Definisce un'ipersuperficie nello spazio delle fasi $2s$ sulla quale giace la traettoria.

f e g due variabili dinamiche.
Definizione delle parentesi di Poisson.

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

Proprietà (c costante)

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \;\; ; \;\; \{f,c\} = 0 \;\; ; \;\; \{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$$

$$\{f_1\, f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\} \;\; ; \;\; \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$

$$\{f, q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k} \;\; ; \;\; \{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \;\; ; \;\; \{q_i, q_k\} = 0 \;\; ; \;\; \{p_i, p_k\} = 0 \;\; ; \;\; \{q_i, p_k\} = \delta_{ik}$$

Identità di Jacobi

$$\Big\{f, \{g,h\}\Big\} + \Big\{g, \{h,f\}\Big\} + \Big\{h, \{f,g\}\Big\} = 0$$

Derivata totale rispetto al tempo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t} \right)$$

Usando le parentesi di Poisson

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\{ f, H \right\}$$

Se f è indipendente dal tempo, la parentesi di Poisson con l'hamiltoniana di una variabile indipendente dal tempo è nulla.

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\{ f, H \right\} \rightarrow \left\{ f, H \right\} = 0$$

Se H non dipende esplicitamente dal tempo: conservazione dell'energia. Sistemi conservativi.

$$\{H, H\} = 0 \ \ ; \ \ H = \text{costante} = E$$

Se p e q coincidono con i raggi vettori, energia cinetica e potenziale.

$$H(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_N) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + V(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N)$$

Tutte le posizioni $\mathbf{r}_k(t)$ sono misurate allo steso tempo.
Azione a distanza. informazione a velocità infinita.

Invarianza per traslazione

$$\mathbf{r}_k \to \mathbf{r}_k + \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\delta H = H(\cdots, \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\epsilon}, \cdots, \mathbf{p}) - H(\cdots, \mathbf{r}_a, \cdots, \mathbf{p}) = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} f(x)\bigg|_{x=x_0} + \cdots$$

$$\delta H = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla_a H = 0$$

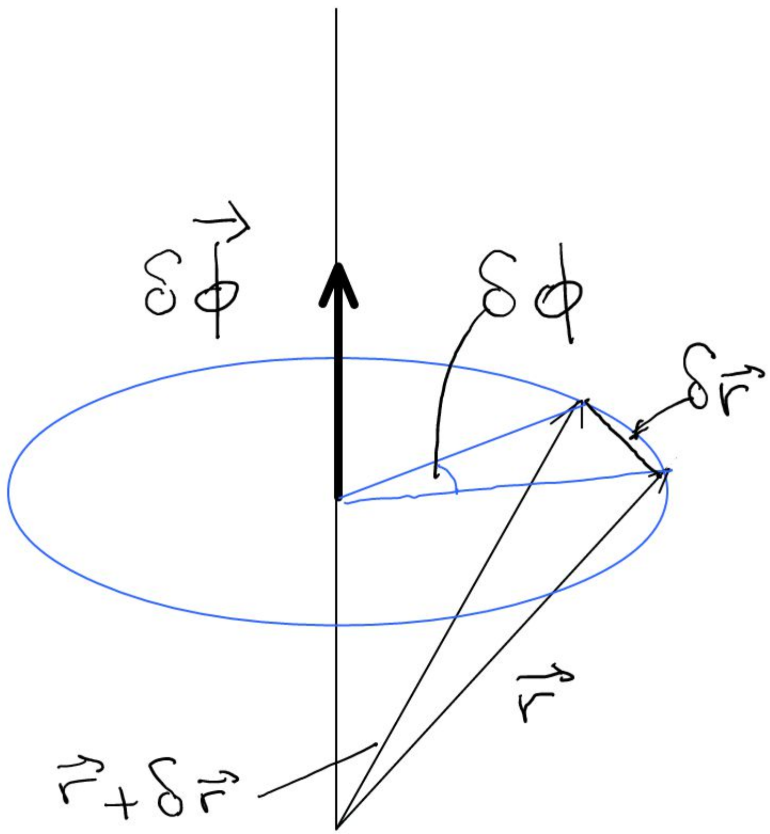
Dato che $\boldsymbol{\epsilon}$ è arbitrario,

$$\sum_{a=1}^{N} \nabla_a H = 0 \longrightarrow -\sum_{a=1}^{N} \frac{d}{dt}\mathbf{p}_a = 0$$

il passaggio per l'equazione di Hamilton, quindi

$$\sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a = \mathbf{P} = \text{costante}$$

Invarianza per Rotazione



$\hat{\mathbf{n}}$ versore $\delta\vec{\phi} = \hat{\mathbf{n}}\delta\phi$; $\delta\mathbf{r}_a = \delta\vec{\phi} \times \mathbf{r}_a$; $\delta\mathbf{p}_a = \delta\vec{\phi} \times \mathbf{p}_a$

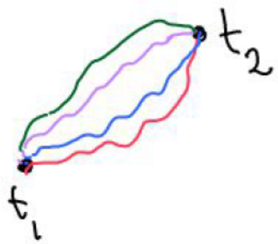
$$\delta H = H(\cdots, \mathbf{r}_a + \delta\mathbf{r}_a, \cdots, \mathbf{p}_b + \delta\mathbf{p}_b) - H(\cdots, \mathbf{r}_a, \cdots, \mathbf{p}_b) = 0$$

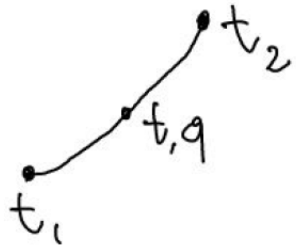
Usando lo sviluppo in serie, e poi, le equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned}
\delta H &= \sum_{a=1}^{N} \left(\delta\mathbf{r}_a \cdot \nabla_{\mathbf{r}_a} H + \delta\mathbf{p}_a \cdot \nabla_{\mathbf{p}_a} H\right) \\
&= \sum_{a=1}^{N} \left(-\delta\mathbf{r}_a \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} + \delta\mathbf{p}_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}\right) \\
&= \delta\vec{\phi} \cdot \sum_{a=1}^{N} \left(-\mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} + \mathbf{p}_a \times \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}\right) \\
&= -\delta\vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt}\left[\sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a\right] = -\delta\vec{\phi} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{L}$ costante.

Equazioni di Hamilton-Jacobi





Il principio variazionale considera i valori dell'azione S su tutte le possibili traettorie vincolate nei punti estremi ai tempi t_1 e t_2. La traettoria fisica è quella con il minimo valore dell'azione.

$$S(q,t) = \int_{q_1,t_1}^{q,t} \left[\sum_j p_j(t') dq_j(t') - H(q,p,t')dt' \right]$$

$$dS(q,t) = \sum_j p_j dq_j - H(q,p,t)dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k \;\; ; \;\; \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p,t) \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

Equazione di Hamilton-Jacobi, una sola equazione differenziale alle derivate parziali con una funzione incognita $S(q,t)$.