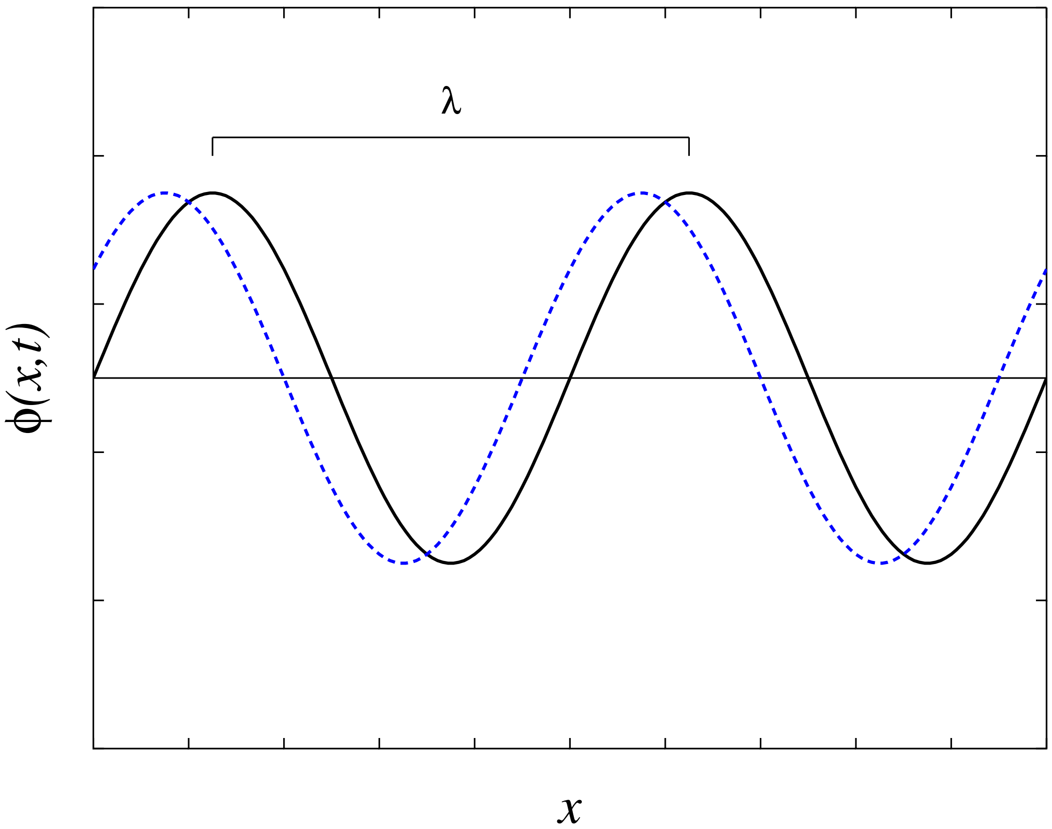
Lezione 6

Ottica geometrica e principio di Fermat

Onde



$$\Box\phi(\mathbf{r},t) = \nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

In una dimensione

$$\phi(x,t) = A\sin(k_x x - \omega t) = \phi(x + n_x\frac{2\pi}{k_x}, t + n_t\frac{2\pi}{\omega})$$

n_x e n_t sono numeri interi

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t) - -\frac{1}{c^2}\frac{d^2\phi(x,t)}{dt^2} = -\left[k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right] A\sin(k_x x - \omega t) = 0$$

Valido $\forall x$ and $\forall t$ quindi $k_x = \frac{\omega}{c}$

Gli zeri della funzione si hanno per

$$2\pi = k_x\lambda = \lambda\frac{\omega}{c} = 2\pi\frac{\lambda\nu}{c} \Rightarrow \frac{\lambda\nu}{c} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Periodo

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\sin(k_x x - \omega T) = \sin(k_x x - \omega\frac{2\pi}{\omega})$$

In generale la soluzione dell'equazione delle onde , di D'Alambert, è

$$\phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

A costante nel tempo.
Periodicità di ϕ.

$$|\mathbf{r}| = \frac{2}{\pi} c\omega = \lambda$$

$$\phi(\mathbf{r} + \lambda \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$$

Soluzione generale dell'equazione delle onde.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = B(\mathbf{r}, t) e^{i\chi(\mathbf{r}, t)} \tag{1}$$

χ iconale.
La variazione di χ deve essere tale che nell'ambito di una lunghezza d'onda ci sia almeno 1 oscillazione.

$$2\pi \simeq \lambda |\nabla \chi|$$

se $\lambda \to 0$ $\nabla\chi \to \infty$.
Sviluppo l'iconale in serie di Taylor

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}_0, t_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\chi + (t - t_0)\frac{\partial \chi}{\partial t} + \cdots$$

Per $\mathbf{r}_0 = 0$ e $t_0 = 0$

$$\chi(\mathbf{r}, t) - \chi(0, 0) \simeq \mathbf{r} \cdot \nabla\chi + t\frac{\partial \chi}{\partial t} \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

Rispetto a λ, per piccole distanze l'espressione generale si riduce a quella piana.

Ottica Geometrica

Sviluppo in serie solo l'esponente della (1) e considerare costante B.

L'iconale soddisfa l'equazione

$$(\nabla\chi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= (\nabla B)e^{i\chi} + Be^{i\chi}(i\nabla\chi) \simeq i\phi(\mathbf{r},t)(\nabla\chi) \\
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial t}e^{i\chi} + iBe^{i\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t} \simeq i\phi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\chi}{\partial t}
\end{aligned}$$

dove negli ultimi passaggi è stata inserita l'ipotesi dell'ottica geometrica con B costante.

$$\nabla^2\phi \simeq i(\nabla\phi(\mathbf{r},t))(\nabla\chi) + i\phi(\mathbf{r},t)(\nabla^2\chi) \simeq -\phi(\nabla\chi)^2$$

ho trascurato i termini con $\nabla^2\chi$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \simeq i\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial t} + i\phi\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \simeq -\phi(\mathbf{r},t)\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2$$

ho trascurato in termini $\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \simeq -\phi(\mathbf{r},t)(\nabla\chi)^2 + \phi(\mathbf{r},t)\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2\frac{1}{c^2} = 0$$

c.v.d.

Nel caso di onde monocromatiche

$$\chi(\mathbf{r},t) = \xi(\mathbf{r}) - \omega t$$

quindi usando l'equazione dell'iconale

$$(\nabla\chi(\mathbf{r}))^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

I fronti d'onda sono $\xi(x,y,z)$ = costante.
I raggi hanno direzione $\nabla\xi$ perpendicolare ai fronti d'onda.

Differenza di cammino ottico per onda monocromatica tra i punti $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$ misurati allo stesso tempo.

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{k}\cdot d\mathbf{r} = \chi(\mathbf{r}_b,t) - \chi(\mathbf{r}_a,t) = \xi(\mathbf{r}_b) - \omega t - \xi(\mathbf{r}_a) + \omega t = \xi(\mathbf{r}_b) - \xi(\mathbf{r}_a)$$

Principio di Fermat
L'integrale di sopra ha un estremo in corrispondenza con il percorso seguito dal raggio luminoso.

$$\delta\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = 0$$