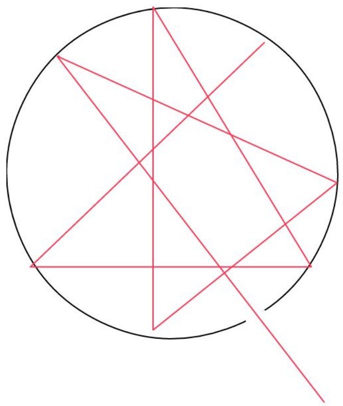
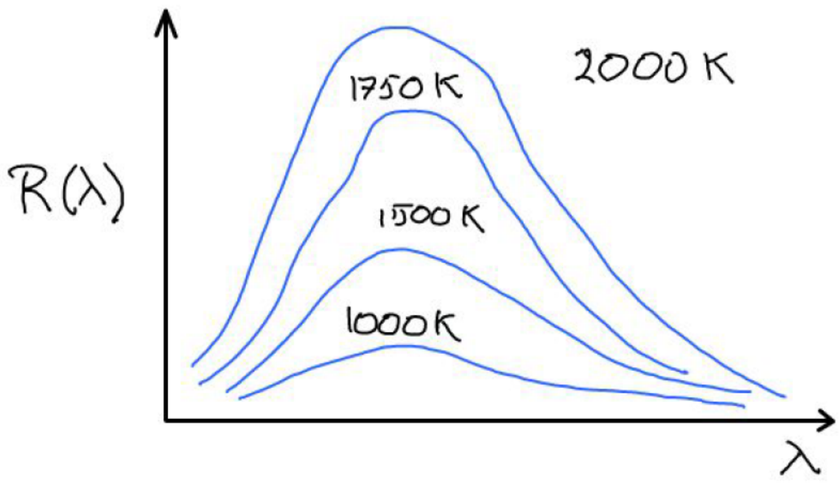
Lezione 7

Crisi della fisica classica

e fenomeni quantistici

Radiazione del corpo nero





Planck fa l'ipotesi $E = h\nu$ (1900).

Un corpo in equilibrio termico emette radiazione.

ρ densità di energia emessa per unità di volume.

$$\frac{d\rho(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4} < \epsilon(T) >$$

Distribuzione di Boltzmann. $\beta = 1/(k_B T)$

$$< \epsilon(T) >= \frac{\int_0^\infty d\epsilon[\epsilon \exp(-\beta\epsilon)]}{\int_0^\infty d\epsilon \exp(-\beta\epsilon)} = -\frac{d}{d\beta}\left[\log \int_0^\infty \exp(-\beta\epsilon) d\epsilon\right] = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

$$\frac{d\rho(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}(k_B T)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda) \to \infty \;\; ; \;\; \rho_{\mathrm{tot}} = \int_0^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \to \infty$$

Catastrofe ultravioletta.

Ipotesi di Planck. Energia quantizzata. $\epsilon = n\epsilon_0$

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} &= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[n\epsilon_0 \exp(-\beta n\epsilon_0)\right]}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n\epsilon_0)} \\
&= -\frac{d}{d\beta}\left[\log \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n\epsilon_0)\right] \\
&= -\frac{d}{d\beta}\left[\log\left(\frac{1}{1-\exp(-\beta\epsilon_0)}\right)\right] \\
&= \frac{d}{d\beta}\left[\log\left(1-\exp(-\beta\epsilon_0)\right)\right] \\
&= \left(1-\exp(-\beta\epsilon_0)\right)^{-1}\left[(\epsilon_0)\exp(-\beta\epsilon_0)\right] \\
&= \frac{\epsilon_0 \exp(-\beta\epsilon_0)}{1-\exp(-\beta\epsilon_0)} = \frac{\epsilon_0}{e^{\beta\epsilon_0}-1}
\end{aligned}$$

Per soddisfare altre equazioni (legge di Wien) ottenute con argomenti molto generali di Meccanica Statistica $\epsilon = h\nu = hc/\lambda$ dove h è una costante universale.
Dimensioni di h Energia per tempo $h = 6.63 \times 10^{-27}$ erg sec.

$$\frac{d\rho(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

Poiché

$$\frac{d\rho(\nu, T)}{d\nu} = \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{\lambda^2}{\nu} \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda}$$

Boltzmann

$$\frac{d\rho(\nu, T)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

Planck

$$\frac{d\rho(\nu,T)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp(h\nu/\lambda k_B T) - 1}$$

per

$$\nu \gg \frac{h}{k_B T} \longrightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{k_b T}\right) \gg 1$$

$$\frac{d\rho(\nu,T)}{d\nu} \longrightarrow \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T}\right)$$

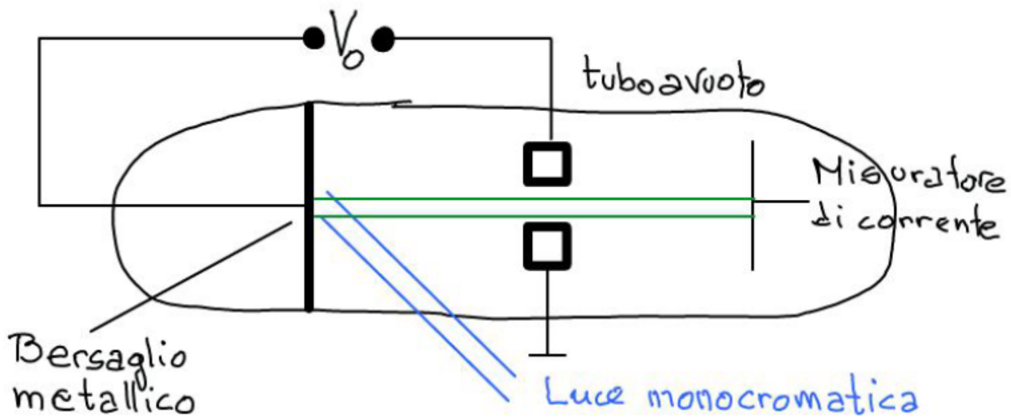
Non c'è divergenza, non c'è crisi ultravioletta.

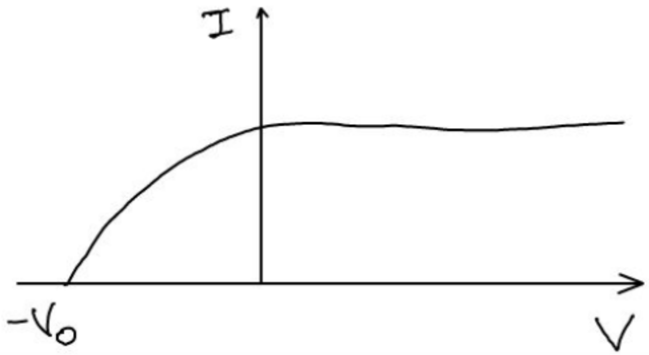
Nella sorgente di radiazione da corpo nero le emissioni sono quantizzate.

Per

$$\frac{h}{k_B T} \ll 1 \longrightarrow \frac{d\rho}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}h\nu\left(1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \cdots - 1\right)^{-1} \simeq \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T$$

Effetto fotoelettrico





Descrizione Classica

La luce (onda) deposita nel metallo la propria energia, proporzionale all'intensità luminosa I. Dopo un processo di termalizzazione, l'energia è ridistribuita tra gli atomi ed alcuni di loro emettono elettroni.

Fatti incompatibili con la Descrizione Classica

- Per ogni metallo c'è una frequenza ν_{th} di soglia al di sotto della quale non c'è emissione, indipendentemente dall'intensità luminosa I.

- Le energie degli elettroni emessi variano da 0 fino ad un massimo ϵ_{max}. Questo massimo varia linearmente con la frequenza della luce, indipendentemente da I.

- Per un valore fissato della frequenza, Il numero degli elettroni emessi, misurato dall'intensità di corrente elettrica, dipende dall'intensità luminosa I.

- Emissione immediata.

Einstein 1905

La radiazione è composta da particelle (fotoni) con energia $E = h\nu$.

Una di queste particelle è assorbita dall'atomo che rilascia l'elettrone con energia

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{max}}^2 = h\nu - W$$

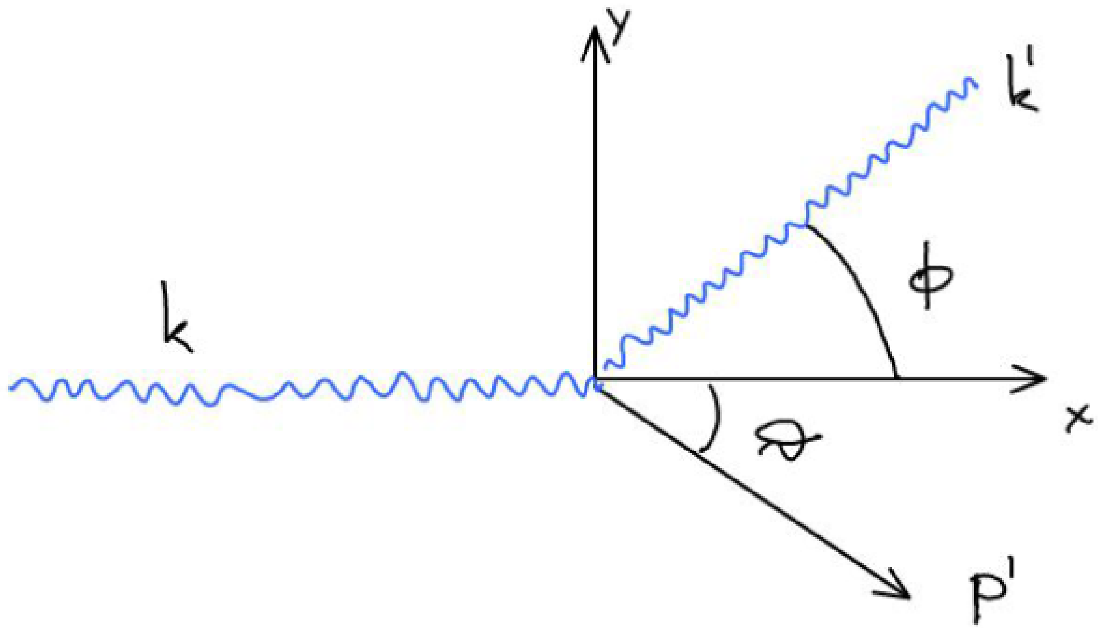
Dove W è l'energia necessaria per estrarre l'elettrone

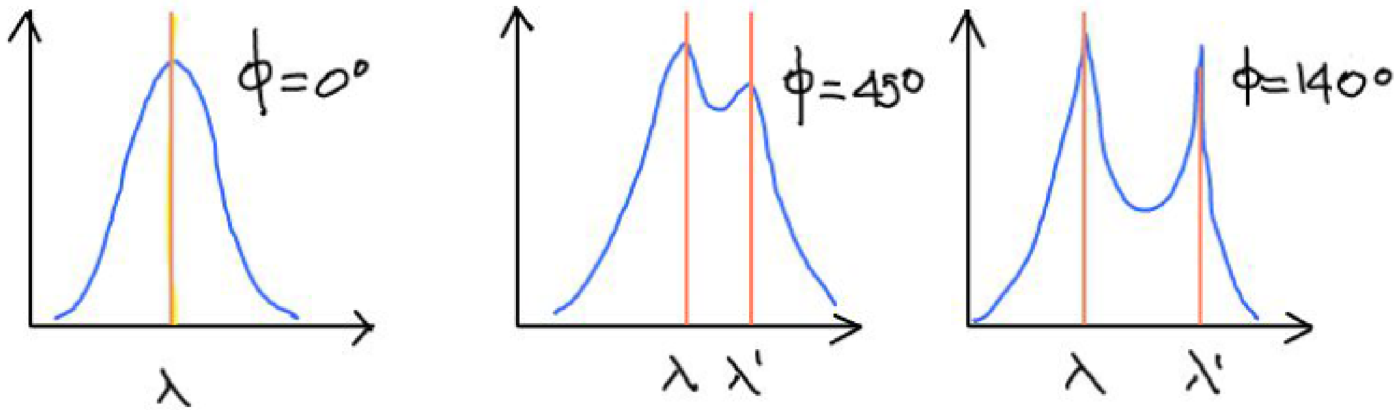
$$h\nu_{\text{th}} = W$$

$$eV_0 = h\nu - W$$

Fissata ν come varia la corrente in funzione di V.

Effetto Compton





Nel modello classico di Thomson la radiazione assorbita fa vibrare l'elettrone nella sua posizione di equilibrio ed emette radiazione con la stessa frequenza λ.

Appare un altro picco $\lambda' \neq \lambda$.

Diffusione elastica di un fotone sull'elettrone

$$\gamma(k) + e^-(p) \to \gamma(k') + e^-(p)$$

Sistema del laboratorio. Piano di diffusione x e y. x lungo la direzione del fotone.

$$k^\mu \equiv \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}, 0, 0\right) \quad ; \quad k'^\mu \equiv \left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c}\cos\phi, \frac{h\nu'}{c}\sin\phi, 0\right)$$

$$p^\mu \equiv (mc, 0, 0, 0) \quad ; \quad p'^\mu \equiv \left(\frac{E'}{c}, p'\cos\theta, -p'\sin\theta, 0\right)$$

Conservazione del quadrimpulso.
Energia

$$mc^2 + h\nu = h\nu' + E' = h\nu' + \sqrt{m^2c^4 + p'^2c^2}$$

Asse x

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = \frac{h\nu'}{c}\cos\phi + p'\cos\theta$$

$$\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\phi\right)^2 = p'^2\cos^2\theta$$

Asse y

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\phi - p'\sin\theta$$

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2\sin^2\phi = p'^2\sin^2\theta$$

Sommo

$$\begin{aligned}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 &+ \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2\cos^2\phi - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\phi + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2\sin^2\phi \\ &= p'^2\cos^2\theta + p'^2\sin^2\theta = p'^2\end{aligned}$$

Sostituisco p'^2c^2 nell'equazione della conservazione dell'energia, al quadrato.

$$\begin{aligned}
& m^2c^4 + h^2(\nu-\nu')^2 + 2mc^2h(\nu-\nu') \\
= \;& m^2c^4 + (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2(\nu\nu') + 2mc^2h(\nu-\nu') \\
= \;& E'^2 = m^2c^4 + p'^2c^2 \\
= \;& m^2c^4 + (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\phi
\end{aligned}$$

$$-2h^2(\nu\nu') + 2mc^2h(\nu-\nu') = -2(h\nu)(h\nu')\cos\phi$$

$$mc^2h(\nu-\nu') = h^2\nu\nu'(1-\cos\phi)$$

$$\frac{\nu-\nu'}{\nu\nu'} = \frac{c/\lambda - c/\lambda'}{c^2/\lambda\lambda'} = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right]\lambda\lambda' = \left[\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}\right]\lambda\lambda'\frac{1}{c}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) = \frac{h}{mc}2\sin^2(\phi/2)$$

Lunghezza d'onda Compton

$$\frac{h}{mc}$$