



Note di Astrofisica Nucleare

Giampaolo Co'

Dipartimento di Fisica, Università del Salento

e

INFN, Sezione di Lecce

Premessa

Queste note sono dedicate alla presentazione di alcuni argomenti di astrofisica che coinvolgono la fisica nucleare. Non c'è alcuna pretesa di offrire una trattazione esaustiva, sia nell'approfondimento sia nell'enumerazione delle tematiche. Ci sono problematiche astrofisiche che coinvolgono la fisica nucleare che non vengono qui discusse, ad esempio quelle relative alla fisica planetaria e/o del sistema solare. Inoltre, alcune delle tematiche trattate sono ancora oggetto di ricerca e molti dettagli non sono bene compresi o assodati.

La trattazione in alcuni capitoli è abbastanza dettagliata, mentre in altri è piuttosto qualitativa. Questo è dovuto allo stato delle conoscenze attuali e alla difficoltà di presentare in maniera quantitativamente soddisfacente il risultato di complicati calcoli prodotti da pesanti simulazioni numeriche, come ad esempio nel caso delle supernovae. Per questo motivo anche la bibliografia risulta alquanto disomogenea. Accanto a libri di testo, note interne, tesi di laurea e di dottorato, cito articoli di rivista estremamente specialistici. Questo dà l'idea della difficoltà incontrata nel reperire informazioni coerenti riguardanti le varie tematiche. Aiutare lo studente a superare questa difficoltà è stato il motivo principale che mi ha spinto a scrivere queste note.

I vari argomenti sono presentati secondo una logica legata alla vita e all'evoluzione delle stelle: la nascita, la permanenza nella sequenza principale, la trasformazione in gigante rossa e il destino finale, nana bianca, o stella di neutroni. Nel capitolo finale tutto questo percorso è rivisto nell'ottica della nucleosintesi, partendo dalla nucleosintesi nel Big-Bang.

Le conoscenze richieste per la comprensione di questo testo sono quelle che uno studente dovrebbe possedere al termine della sua carriera universitaria nell'ultimo anno della corso di laurea specialistica. Detto questo, vale la pena informare che il testo non fa uso di tecniche particolari legate alla teoria quantistica dei campi e alla teoria della relatività generale. Anche per quanto riguarda la fisica nucleare, non sono necessarie conoscenze approfondite (ad esempio teorie a molti corpi). E' invece data per scontata la conoscenza, ben metabolizzata, di primo livello, quella che un tradizionale corso di Istituzioni di Fisica Nucleare dovrebbe impartire.

Due informazioni aggiuntive per il lettore. La prima riguarda il fatto che in queste note ho utilizzato le unità di misura del Sistema Internazionale, ben sapendo che la tradizione astrofisica utilizza invece il CGS. La seconda informazione riguarda il fatto che ho inserito nel testo parti scritte con caratteri minuscoli. Queste parti contengono complementi e dettagli che possono essere evitati ad una prima lettura senza perdere comunque il filo logico della presentazione.

Lecce, Ottobre 2007
Giampaolo Co'

Prima versione corretta in Novembre 2009.
Seconda versione corretta in Agosto 2012.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Base osservativa	3
1.2	Evoluzione stellare	5
2	Struttura stellare	7
2.1	Equilibrio idrostatico	8
2.2	Bilancio energetico	9
2.3	Equilibrio termodinamico	11
2.4	Trasporto radiativo dell'energia	13
2.5	Trasporto convettivo dell'energia	20
3	Fusione nucleare	23
3.1	Introduzione	23
3.2	Generalità sulle reazioni nucleari	26
3.2.1	Diffusione elastica	26
3.2.2	Diffusione anelastica	30
3.2.3	Risonanze	32
3.3	Fusione non risonante di particelle cariche	33
3.4	Reazioni con risonanza	38
4	Reazioni nucleari nelle stelle della sequenza principale	41
4.1	La catena pp	41
4.1.1	Formazione del deutone	42
4.1.2	Il ciclo $pp1$	50
4.1.3	I cicli $pp2$ e $pp3$	51
4.2	La catena CNO	53
4.3	Emissione di neutrini	54
5	Reazioni nucleari nelle stelle giganti rosse	59
5.1	La combustione dell' ^4He	59
5.2	La sopravvivenza del ^{12}C nelle giganti rosse.	61
6	Nane bianche	63
6.1	Gas di Fermi	64
6.2	Politropi	68
6.3	La massa di Chandrasekhar	71

7	Supernovae	73
7.1	Presupernova	74
7.2	Innesco del collasso	76
7.3	Intrappolamento dei neutrini	77
7.4	Collasso omologo ed onda d'urto	79
7.5	Il raffreddamento	82
8	Stelle di neutroni	87
8.1	La crosta	89
8.1.1	La crosta esterna	89
8.1.2	La crosta interna	93
8.2	Il core di materia neutronica	94
8.3	Equazione di stato della materia neutronica	96
8.3.1	L'interazione nucleone-nucleone	100
8.3.2	Le forze a tre corpi	102
8.3.3	Il problema a multicorpi	105
8.3.4	La materia neutronica β stabile	111
8.3.5	Masse delle stelle di neutroni	113
8.4	Il core esotico	114
8.4.1	Core iperonico	114
8.4.2	Stelle strane	119
9	Nucleosintesi	125
9.1	Nucleosintesi primordiale	125
9.2	Nucleosintesi da combustione stellare	128
9.3	Nucleosintesi da cattura neutronica	130
9.3.1	Processi lenti (s)	131
9.3.2	Processi rapidi (r)	133
A	Tabelle	139
	Bibliografia	143

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Base osservativa

La più immediata fonte osservativa delle stelle riguarda la quantità di radiazione elettromagnetica emessa. La principale classificazione delle stelle è quindi legata alla quantità di luce di una definita lunghezza d'onda che raggiunge il rivelatore. Chiamiamo F_λ il flusso di energia luminosa, ovvero la quantità di energia che raggiunge l'unità di area del rivelatore nell'unità di tempo. La magnitudine viene definita come:

$$m_\lambda = -2.5 \log F_\lambda + C_\lambda , \quad (1.1)$$

in cui abbiamo indicato con $\log$ il logaritmo in base 10, e con C_λ una costante di normalizzazione. Operativamente, quello che viene utilizzato è il confronto tra le magnitudini di due stelle, magnitudini misurate alla stessa lunghezza d'onda:

$$m_\lambda(S2) - m_\lambda(S1) = -2.5 \log \left(\frac{F_{S2}}{F_{S1}} \right) = 2.5 \log \left(\frac{F_{S1}}{F_{S2}} \right) , \quad (1.2)$$

dove $S1$ e $S2$ sono due diverse stelle.

Un'altra quantità di interesse è l'indice di colore, definito come la differenza tra le magnitudini della stessa stella misurate a differenti valori della lunghezza d'onda:

$$m_{\lambda1} - m_{\lambda2} = 2.5 \log \left(\frac{F_{\lambda2}}{F_{\lambda1}} \right) + C_{\lambda1} - C_{\lambda2} . \quad (1.3)$$

I valori delle costanti di normalizzazione sono fissati utilizzando alcune stelle standard alle quali sono assegnati valori assoluti di magnitudine. I valori delle lunghezze d'onda utilizzate per lo studio degli spettri di luce stellari, sono stati codificati dalla tradizione come indicato dalla tabella 1.1.

Filtro	U	B	V	R	I	u	v	b	y
λ (Å)	3503	4425	5544	6469	7886	3451	4108	4669	5478

Tabella 1.1: Codifica delle lunghezze d'onda utilizzate per l'osservazione astronomica.

La lunghezza d'onda emessa da una stella dipende dalla temperatura della sua superficie, che è la parte della stella da cui proviene la radiazione elettromagnetica che osserviamo. L'indice di

colore (1.3) può essere legato alla temperatura della stella. Ad esempio, una regola empirica è [Uns83]:

$$B - V \sim 7000 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000} \right) ,$$

dove la temperatura, T , è espressa in Kelvin, e B e V sono le magnitudini della stella nel blu e nel visibile, vedi la tabella 1.1.

Considerando l'emissione della stella come quella di un corpo nero si può ottenere il valore del raggio della stella utilizzando la relazione:

$$L = 4\pi R^2 \sigma_B T^4 , \quad (1.4)$$

dove R è il raggio della stella, σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann, e L è la luminosità. Quest'ultima quantità è definita come l'energia che, nell'unità di tempo, attraversa una sfera che circonda la stella. La luminosità fotonica è ottenibile combinando misure di flusso energetico e di distanza dalla terra.

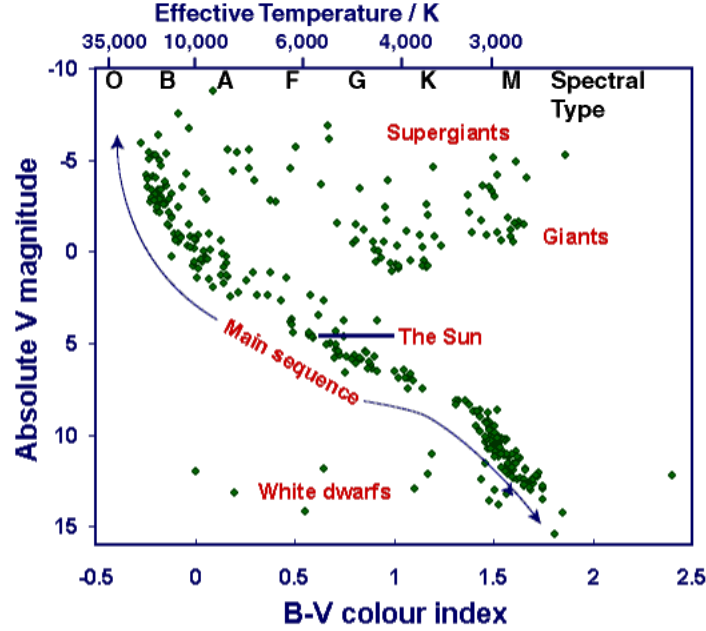


Figura 1.1: Diagramma di Hertzsprung-Russell

Le stelle sono state classificate, in base alla loro luminosità e al loro indice di colore, in un diagramma che prende il nome di diagramma di Hertzsprung-Russell (HR). Da quanto detto, risulta che questo corrisponde ad un diagramma luminosità - temperatura.

Questa classificazione ha portato ad una scoperta particolarmente inaspettata, ovvero che le stelle non sono distribuite uniformemente in questo diagramma, ma si raggruppano in particolari zone (vedi Fig.1.1). La maggioranza delle stelle si raggruppano in una stretta zona che inizia dalla parte in alto a sinistra del diagramma, dove si trovano stelle blu, particolarmente calde e luminose, e termina in basso a destra dove ci sono stelle rosse, relativamente fredde e meno luminose. Questa banda è chiamata la **sequenza principale**. C'è un numeroso gruppo di stelle che si trova al di sopra della sequenza principale, nella regione di destra, dove ci sono basse temperature. D'altra

parte queste stelle hanno una grande luminosità, quindi, per l'eq. (1.4), un grande raggio. Sono chiamate *giganti rosse*. C'è anche un numeroso gruppo di stelle nella parte in basso a sinistra del diagramma di HR. Queste stelle hanno alte temperature ma basse luminosità, sono quindi sistemi relativamente piccoli e sono chiamate *nane bianche*.

L'interpretazione del diagramma HR si basa sull'ipotesi che tutte le caratteristiche di una stella siano fissate completamente dalla sua massa, dalla sua composizione chimico-fisica iniziale, e dalla sua età. Invecchiando una stella percorre il diagramma HR e il suo percorso evolutivo è fissato esclusivamente dalla sua massa e composizione. Lo studio delle caratteristiche fisiche di questa evoluzione è lo scopo di queste note.

1.2 Evoluzione stellare

L'attuale teoria dell'evoluzione stellare suppone che la stella si formi da una nube molecolare gigante. La maggior parte dello spazio intergalattico ha una densità di materia media che varia tra 10^5 a 10^6 particelle per m^3 . La densità di materia in una nube molecolare gigante è $10^5 - 10^7$ volte maggiore. Perturbazioni possono formare aggregati di materia che attraggono a loro volta altra materia.

L'attrazione gravitazionale concentra materia in volumi sempre più piccoli, producendo sistemi di densità sempre maggiore e innalzandone la temperatura. Se la massa di questi sistemi supera un valore critico, che dipende fortemente dalla composizione elementare della materia, si possono accendere reazioni nucleari di fusione. Nel caso in cui le temperature raggiungono i 10^6 K è possibile l'accensione del processo di fusione dell'idrogeno che procede con una catena di reazioni nucleari per concludersi con la produzione di nuclei di ^4He . Per stelle con masse circa uguali a quella solare, la fusione dell'idrogeno può procedere anche utilizzando il ciclo carbonio-azoto-ossigeno (CNO), che utilizza questi elementi più pesanti come catalizzatori della reazione in cui quattro protoni fondono, producendo alla fine un nucleo di ^4He .

L'innesco della reazioni nucleari produce in breve tempo una situazione di equilibrio idrostatico. In parole povere l'attrazione prodotta dall'interazione gravitazionale è compensata dal moto termico della materia il cui calore è prodotto dalle interazioni nucleari.

Le stelle neonate appaiono in una grande varietà di dimensioni e colori. Possono variare nella varietà spettrale dal blu, stelle calde, fino al rosso, fredde. Le masse osservate variano da un decimo circa della massa solare, fino ad un massimo di circa 30 masse solari. La loro posizione nel diagramma HR dipende dalla temperatura superficiale che, a sua volta, dipende dalla massa.

La posizione della stella sulla sequenza principale del diagramma HR determina la durata della vita della stella. Stelle come le nane rosse, che sono relativamente fredde, bruciano lentamente l'idrogeno, e possono rimanere nella sequenza principale per centinaia di miliardi di anni. Stelle massive e bianche, nella parte sinistra della sequenza principale, bruciano molto più in fretta, e quindi abbandonano la sequenza principale dopo qualche milione di anni. Si stima che una stella di media grandezza come il sole rimanga sulla sequenza principale per circa 10 miliardi di anni.

Le stelle della sequenza principale sono quelle in cui è attivo il processo di fusione dell'idrogeno. Quando il combustibile d'idrogeno termina, la stella esce dalla sequenza principale. Se il processo di fusione dell'idrogeno cessa, l'attrazione gravitazionale non è più compensata dal calore prodotto dalle reazioni nucleari. Si ha una contrazione della stella fino a quando la degenerazione elettronica si oppone alla gravità, oppure, fino a quando il core della stella diventa sufficientemente caldo da accendere la fusione dell'elio. Quale di queste due opzioni si verifichi dipende dalla massa della stella.

Si stima che, per le stelle di massa più piccola di quella solare, il processo di fusione dell'idrogeno sia così lento da superare di ordini di grandezza l'attuale età dell'universo. Le teorie relative al

destino di queste stelle sono basate su modellizzazioni. Si ritiene che stelle con massa dell'ordine di 0.5 masse solari non abbiano sufficiente pressione gravitazionale per accendere la fusione dell'elio. Il core di queste stelle si contrae fino a quando la pressione di degenerazione elettronica compensa il processo di collasso. Quindi queste stelle dovrebbero trasformarsi direttamente in nane bianche.

Stelle con masse paragonabili a quella del sole sviluppano un core di elio stabilizzato dalla pressione elettronica. Attorno a questo core di elio ci sono strati che contengono idrogeno che per pressione gravitazionale bruciano ad un ritmo più veloce di quanto avvenga in una stella della sequenza principale, che abbia la stessa massa. Questo causa una maggiore luminosità della stella, $10^3 \sim 10^6$ volte superiore. L'involucro si espande e la temperatura superficiale si abbassa, formando una stella gigante rossa. Quando i processi di fusione dell'idrogeno terminano, l'involucro esterno si trasforma in una nebulosa planetaria al cui centro rimane il core di elio sostenuto dalla degenerazione elettronica, una nana bianca.

Se il core di elio della nana bianca è sufficientemente massivo da contrarsi ulteriormente, possono innescarsi processi di fusione che producono elementi più pesanti dell'elio. Nel caso in cui la massa della stella sia inferiore ad un certo valore, detto limite di Chandrasekhar, non si attivano processi di fusione dell'elio, e, alla fine rimarrà una stella fredda di materia oscura.

Se la massa della nana bianca è superiore al limite di Chandrasekhar (circa 1.4 masse solari), si può avere un'ulteriore contrazione che innesca la fusione del carbonio, ed eventualmente anche di elementi più pesanti. In questi casi si può arrivare ad una situazione in cui la pressione di degenerazione elettronica non è più sufficiente a contrastare l'attrazione gravitazionale. Si innesca un processo di cattura elettronica da parte dei nuclei, con la formazione di un core stellare formato essenzialmente da neutroni. La formazione del core neutronico produce un collasso improvviso che genera un'onda d'urto che espelle le parti più esterne della stella. Questa è l'esplosione di una supernova di tipo II.

Dopo l'esplosione della supernova rimane il core neutronico della stella che ruota ad altissima velocità angolare. Questi oggetti stellari sono identificati come pulsar. Può succedere che l'oggetto che rimane dopo l'esplosione della supernova sia così massivo che l'attrazione gravitazionale superi la pressione di degenerazione neutronica. In questo caso si ritiene avvenga la creazione di un buco nero.

Capitolo 2

Struttura stellare

Dal punto di vista empirico, le informazioni riguardanti la struttura stellare che possiamo inferire dai dati osservativi sono: massa, luminosità, raggio e composizione chimica degli strati più esterni. Le nostre teorie sulla struttura delle stelle devono far riferimento a questi osservabili associandoli ad un'altra caratteristica: la stabilità dello stato della stella per un lungo periodo di tempo.

Ovviamente la stabilità dello stato delle stelle per lunghi periodi di tempo non è dedotta da osservazioni dirette. Le testimonianze delle osservazioni astronomiche più antiche risalgono a qualche migliaia di anni fa, da confrontare con i milioni di anni della vita stabile di una stella come il sole. L'idea della stabilità delle stelle è dedotta da osservazioni indirette di diverso tipo. Ad esempio, informazioni di tipo geologico e biologico riguardanti la presenza di alghe sulla terra già milioni di anni fa, implicano che la luminosità del sole sia rimasta pressoché costante da allora.

La descrizione della struttura di una stella stabile, si basa sull'idea che quest'ultima sia composta da materia in stato gassoso, in un equilibrio idrostatico dinamico, in cui l'azione della pressione interna che porterebbe all'espansione del gas è compensata dalla forza attrattiva di gravitazione. Nella nostra trattazione supporremo che la stella abbia simmetria sferica, quindi ignoreremo perturbazioni come rotazioni, vibrazioni e maree.

Le equazioni che descrivono la struttura dell'interno stellare secondo questa modellizzazione sono:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \quad \text{equilibrio idrostatico} \quad , \quad (2.1)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \text{conservazione della massa} \quad , \quad (2.2)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon \quad \text{equilibrio termico} \quad , \quad (2.3)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{4\tilde{\sigma}_{BC}} \frac{\chi \rho L(r)}{T^3 4\pi r^2} \quad \text{equilibrio radiativo} \quad , \quad (2.4)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad \text{equilibrio convettivo} \quad . \quad (2.5)$$

Nei paragrafi seguenti mostreremo come si ottengono queste equazioni, e ne illustreremo le proprietà.

2.1 Equilibrio idrostatico

Consideriamo la stella come una sfera di raggio R riempita da un gas la cui massa totale è M . Ci preoccupiamo di come la forza di pressione, che produrrebbe l'espansione della stella, sia compensata dall'attrazione gravitazionale.

Il fatto che la pressione generata dal moto termico delle particelle che formano il gas produca l'espansione del sistema, implica che la pressione debba aumentare più ci si avvicina al centro della stella. In altre parole, per un punto a distanza r dal centro della stella si ha che:

$$P(r) > P(r + dr) , \quad (2.6)$$

dove abbiamo indicato con P la pressione e con dr un piccolo incremento della distanza dal centro della stella. Dato che per il calcolo di quantità osservabili sono rilevanti solo le differenze di pressione, è conveniente considerare nulla la pressione al bordo della stella:

$$P(R) = 0 . \quad (2.7)$$

In realtà questa equazione definisce il raggio della stella.

In generale la distribuzione di materia non è costante all'interno della stella, quindi anche la densità ρ del gas dipende da r . Le caratteristiche della stella, R e M rimangono costanti nel tempo. Questo implica l'assenza di materia per $r > R$. La densità di materia è inoltre normalizzata in modo che:

$$M = \int \rho(r) d^3r = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr , \quad (2.8)$$

dove abbiamo utilizzato la simmetria sferica del problema. Una quantità che utilizzeremo spesso è la quantità di materia contenuta nella sfera di raggio $r < R$, definita come:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' . \quad (2.9)$$

L'equazione (2.2) è l'espressione differenziale dell'equazione precedente.

Consideriamo un cilindro all'interno della stella in modo che l'asse di simmetria sia allineato alla direzione che congiunge i centri delle due basi al centro della sfera. La prima base del cilindro si trova a distanza r e l'altra base a distanza $r + dr$. Da quanto detto in precedenza, Eq. (2.6), si ha che $dP = P(r + dr) - P(r) < 0$. La forza di pressione termica esercitata sul cilindro preso in esame è data da:

$$\mathbf{F}_P = -dP(r) ds \hat{r} = -\frac{dP(r)}{dr} ds dr \hat{r} , \quad (2.10)$$

dove ds è l'area della base del cilindro e abbiamo indicato con $\hat{r}$ la direzione dal centro della sfera all'esterno. Dato che dP è negativo $\mathbf{F}_P$ è diretta verso l'esterno della sfera.

La forza esercitata dall'interazione gravitazionale sul cilindro è:

$$\mathbf{F}_G = -G_N \frac{m_c m(r)}{r^2} \hat{r} , \quad (2.11)$$

dove m_c è la massa del cilindro. Dato che le dimensioni del cilindro sono infinitesimali supponiamo che la densità non vari tra le distanze infinitesime che consideriamo, $\rho(r) \simeq \rho(r + dr)$, quindi abbiamo $m_c = \rho(r) ds dr$. La condizione di equilibrio implica che nel punto r si abbia $\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G = 0$, quindi:

$$\frac{dP(r)}{dr} ds dr = -G_N \frac{\rho(r) ds dr m(r)}{r^2} , \quad (2.12)$$

che corrisponde all'equazione (2.1).

Utilizziamo l'equazione (2.1) per calcolare gli ordini di grandezza dei valori della pressione e della temperatura all'interno delle stelle come il sole.

Consideriamo un punto a metà tra centro e superficie della stella $r = R_\odot/2$. È plausibile pensare che, in prima approssimazione, la densità in questo punto sia pari alla densità media del sole

$$\bar{\rho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} \simeq 1.41 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 .$$

Utilizziamo anche i valori $m(R_\odot/2) \simeq M_\odot/2$. Per quanto riguarda la parte sinistra dell'equazione (2.1) consideriamo la variazione su tutto il raggio della stella. Abbiamo quindi

$$\frac{P(R_\odot) - P(0)}{R_\odot} = -G_N \frac{\bar{\rho}_\odot M_\odot/2}{(R_\odot/2)^2} .$$

Dato che $P(R_\odot) = 0$ l'unica incognita è $P(0)$:

$$P(0) = 2G_N \frac{\bar{\rho}_\odot M_\odot}{R_\odot} \simeq 5.6 \cdot 10^{14} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

Utilizziamo l'equazione di stato di un gas ideale per trovare la temperatura della stella,

$$PV = nRT = nN_A k_B T ,$$

dove V è il volume, T la temperatura N_A il numero di Avogadro e k_B la costante di Boltzmann. Il numero n indica il numero di moli che formano il gas. Dall'equazione precedente otteniamo:

$$P = n \frac{N_A}{V} k_B T = \frac{n N_A}{M_\odot} \frac{M_\odot}{V} k_B T = \frac{n N_A}{M_\odot} \bar{\rho}_\odot k_B T .$$

Il termine $M_\odot/nN_A$ è la massa molecolare media. Ipotizzando che il gas sia fatto esclusivamente di idrogeno, la massa molecolare media è la massa del protone m_p . Abbiamo trascurato la massa dell'elettrone. Dall'equazione precedente si può ottenere il valore della temperatura

$$T = P \frac{m_p}{\bar{\rho}_\odot k_B} \simeq 2.0 \cdot 10^7 \text{ K} .$$

Dalla teoria cinetica dei gas possiamo ottenere una stima dell'energia cinetica media delle molecole:

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} k_B T \simeq 2.5 \text{ keV} .$$

2.2 Bilancio energetico

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'Eq. (2.1) per $4\pi r^3$ ed integriamo da 0 a R :

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP(r)}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi r^3 G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} dr = - \int_0^R G_N \frac{m(r)}{r} [4\pi \rho(r)r^2] dr . \quad (2.13)$$

Il termine $-G_N m(r)/r$ rappresenta l'energia necessaria per portare una massa unitaria dal punto r all'infinito. All'energia potenziale gravitazionale non contribuisce la massa della stella per valori $r' > r$, fatto ben noto per tutte le interazioni centrali e distribuzioni di massa e/o carica a simmetria sferica. Il termine tra parentesi quadre nella (2.13) rappresenta la massa della stella nella corona sferica compresa tra r e $r + dr$. Quindi il secondo termine della (2.13) rappresenta l'energia potenziale gravitazionale della stella. Chiameremo E_{GR} questa energia.

Il termine a sinistra dell'equazione (2.13) può essere integrato per parti:

$$\int_0^R 4\pi r^3 dP(r) = [4\pi r^3 P(r)]_0^R - \int_0^R P(r) 4\pi 3r^2 dr = -3 \int_0^R P(r) 4\pi r^2 dr \simeq -3 \langle P \rangle V . \quad (2.14)$$

Il termine tra parentesi quadra è nullo perché $P(R) = 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito $P(r)$ con il suo valore medio $\langle P \rangle$. Considerando l'equazione di stato di un gas perfetto abbiamo che:

$$P = nN_A \frac{1}{V} k_B T = nN_A \frac{1}{V} \frac{2}{3} \epsilon_k = \frac{2}{3} \frac{1}{V} E_T . \quad (2.15)$$

Nell'equazione precedente abbiamo utilizzato la relazione che lega la temperatura all'energia cinetica non relativistica della particella per un gas monoatomico:

$$k_B T = \frac{2}{3} \epsilon_k ,$$

e abbiamo chiamato E_T l'energia totale di tipo termico del gas che forma la stella.

Utilizzando le equazioni (2.13, 2.14, 2.15) si ha che:

$$-3 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{V} E_T \right) V = E_{GR} ,$$

da cui:

$$2E_T + E_{GR} = 0 . \quad (2.16)$$

Questa equazione può essere ottenuta in maniera più rigorosa applicando il teorema del viriale della meccanica statistica classica.

L'equazione (2.16) è estremamente importante per l'evoluzione della stella. Supponiamo, al momento, che la densità di materia sia costante all'interno della stella:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} ,$$

da cui si ha che:

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M \left(\frac{r}{R} \right)^3 .$$

Calcolando l'energia gravitazionale secondo la definizione (2.13) abbiamo:

$$E_{GR} = -G_N \int_0^R \frac{1}{r} M \left(\frac{r}{R} \right)^3 4\pi r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} dr = -G_N M^2 \frac{3}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} G_N \frac{M^2}{R} . \quad (2.17)$$

Consideriamo una stella di massa M che cambi il suo raggio da R_i a R_f . Utilizzando l'equazione (2.17) abbiamo che la variazione in energia gravitazionale è data da:

$$\Delta E_{GR} = E_{GR}(R_f) - E_{GR}(R_i) = -\frac{3}{5} G_N M^2 \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} \right) . \quad (2.18)$$

E' evidente dall'equazione precedente che l'espansione della stella, $R_f > R_i$, fa aumentare E_{GR} . Ovviamente avviene il contrario per la contrazione. Dato che l'equazione (2.16) è valida per qualsiasi valore di R abbiamo che l'energia termica diminuisce quando si ha espansione, ed invece aumenta con la contrazione della stella. Ovviamente questo avviene anche per la temperatura.

L'equazione (2.16) indica che solo metà della variazione dell'energia gravitazionale ΔE_{GR} è compensata dalla variazione dell'energia termica della stella. Considerando una stella in contrazione solo metà di ΔE_{GR} viene utilizzata per l'aumento di E_T , con il conseguente aumento di T .

L'altra metà di ΔE_{GR} viene convertita in radiazione che viene emessa dalla stella. Quando la stella sarà contratta in un punto, tutta l'energia gravitazionale sarà stata dispersa sotto forma di radiazione elettromagnetica.

Calcoliamo il tempo necessario perché questo processo avvenga per il sole. Dall'equazione (2.17) otteniamo l'energia gravitazionale totale del sole:

$$|E_{GR}| = \frac{3}{5} G_N \frac{M_\odot^2}{R_\odot} \simeq 2.4 \cdot 10^{41} \text{ J} .$$

La luminosità del sole è misurata, e vale:

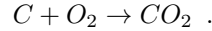
$$L_\odot = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ J/s} ,$$

Dal rapporto tra queste due quantità si ha che:

$$t = \frac{|E_{GR}|}{L_\odot} \simeq 0.58 \cdot 10^{15} \text{ s} \simeq 1.8 \cdot 10^7 \text{ y} .$$

La stima dell'età attuale del sole, nelle condizioni in cui lo osserviamo ora, si aggira sui miliardi di anni. È evidente che la stima precedente dà un valore troppo piccolo. Questo significa che la luminosità solare non può essere prodotta dal semplice meccanismo di contrazione gravitazionale, ma richiede una fonte aggiuntiva di energia.

Supponiamo che questa fonte di energia sia di tipo chimico. Consideriamo un fenomeno chimico esotermico, ad esempio la reazione di formazione di anidride carbonica da combustione del carbonio:



Supponiamo che la massa del sole sia composta per un terzo di carbonio e per due terzi di ossigeno. Questa è evidentemente la situazione ideale perché tutta la massa del sole possa essere coinvolta nella reazione chimica di cui sopra. Un kilogrammo di carbonio brucia emettendo $8 \cdot 10^6$ calorie ovvero $3.35 \cdot 10^7$ J. Questo significa che l'energia chimica a disposizione è:

$$E = \frac{1}{3} M_\odot 3.35 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \simeq \frac{1}{3} 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} 3.35 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \simeq 2.2 \cdot 10^{37} \text{ J} .$$

Questo valore diviso per quello della luminosità, dà un'età media di qualche migliaio di anni. È evidente che l'energia chimica non può fornire l'energia necessaria perché una stella come il sole possa brillare per miliardi di anni.

La fonte di energia che permette alle stelle di emettere radiazione per miliardi di anni è l'energia nucleare. Le reazioni nucleari trasformano parte della massa del nucleo in energia secondo la famosa equazione di Einstein $E = mc^2$. Non tutta la massa della stella può essere convertita in energia. È soltanto la differenza tra la massa dei nuclei interagenti e quella dei prodotti di reazione che viene convertita in energia. Una dettagliata analisi delle varie reazioni nucleari che avvengono all'interno delle stelle sarà l'oggetto di uno dei capitoli seguenti. Vedremo nel capitolo 4.1 che solo le reazioni nucleari garantiscono vite stellari dell'ordine di miliardi di anni.

2.3 Equilibrio termodinamico

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la perdita energetica dovuta all'emissione di radiazione è compensata dall'energia prodotta dalle reazioni nucleari che avvengono all'interno della stella. Questa condizione può essere espressa come:

$$L = \int_0^R \epsilon(r) \rho(r) 4\pi r^2 dr , \quad (2.19)$$

dove abbiamo indicato con ϵ l'energia di origine nucleare prodotta per unità di massa nell'unità di tempo, nel punto r . Questa quantità dipende dalla densità, dalla temperatura e, chiaramente, dalla composizione chimica della stella.

Non è necessario che l'equazione (2.19) sia soddisfatta ad ogni istante, contrariamente alla (2.1), pena il collasso del sistema stellare. Anche se le reazioni nucleari si dovessero spegnere per migliaia di anni, la contrazione gravitazionale potrebbe supplire alla produzione energetica, e far rimanere stabile e brillante la stella. Una successiva riaccensione delle reazioni nucleari farebbe cambiare di molto poco il tasso di emissione di radiazione elettromagnetica. L'unico effetto rivelabile dello spegnimento delle reazioni nucleari sarebbe nel flusso di neutrini che cesserebbe. L'equazione (2.19) deve essere verificata su tempi più lunghi dei tempi di contrazione gravitazionale: milioni di anni, come abbiamo visto.

L'equazione (2.19) vale globalmente per la stella, ma lo stesso tipo di bilancio deve essere valido per ogni sezione sferica della stella. Consideriamo una corona sferica i cui raggi interno ed esterno differiscano di Δr . La differenza tra flusso uscente e flusso entrante è data da:

$$L(r + \Delta r) - L(r) = \epsilon \rho(r) \frac{4}{3} \pi [(r + \Delta r)^3 - r^3] ,$$

e in termini differenziali

$$dL(r) = \epsilon \rho(r) 4\pi r^2 dr ,$$

che corrisponde all'equazione (2.3). Questa equazione afferma che la differenza tra flusso radiativo entrante ed uscente dalla corona sferica è data dalla produzione energetica dovuta alle reazioni nucleari che avvengono nella corona sferica considerata. Se non ci fossero reazioni nucleari, cioè $\epsilon = 0$, la parte destra dell'equazione sarebbe nulla e quindi il flusso sarebbe conservato. La presenza delle reazioni nucleari fa in modo che il flusso radiativo uscente sia superiore a quello entrante.

Questa equazione deve essere modificata per tener conto delle fasi stellari in cui le variazioni delle energie termica e gravitazionale sono molto rapide:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left[\epsilon - \frac{3}{2} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) \right] , \quad (2.20)$$

dove ρ e P dipendono dalla posizione.

Definiamo con $m_0 = M/nN_A$ la massa di ogni singola particella che compone la stella. L'energia termica per unità di massa è $3k_B T/2m_0$. Il lavoro fatto dalla pressione per unità di massa è:

$$-\frac{P}{\rho V} dV = -P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = P \frac{1}{\rho^2} d\rho .$$

L'energia persa dal flusso di radiazione è $dL(r)/dr$. La perdita per unità di massa è ottenuta dividendo la variazione di luminosità per $4\pi r^2 \rho dr$. La variazione dell'energia termica per unità di massa è quindi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} \frac{k_B}{m_0} T \right) = \epsilon + P \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{dL(r)}{dr} . \quad (2.21)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali, la parte sinistra dell'equazione precedente può essere scritta come:

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{k_B}{m_0} T \right) = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{3}{2} \left[\frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho} + P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{3}{2} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} .$$

Dato che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) = \rho^{-\frac{5}{3}} \frac{dP}{dt} - \frac{5}{3} P \rho^{-\frac{8}{3}} \frac{d\rho}{dt} ,$$

abbiamo che:

$$\frac{3}{2} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{5}{2} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} \frac{k_B}{m_0} T \right) + \frac{3}{2} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right] - \frac{5}{2} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} .$$

L'equazione (2.21) diventa:

$$\frac{3}{2} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \epsilon + P \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{dL(r)}{dr} ,$$

quindi:

$$\frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{dL(r)}{dr} = \epsilon - \frac{3}{2} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^{\frac{5}{3}}} \right) ,$$

che è l'equazione (2.20).

L'equazione (2.20) è più generale dell'equazione (2.3) che è il caso limite in cui le variazioni della pressione e della densità, quindi anche della temperatura, siano molto lente.

L'equazione (2.20) deve essere utilizzata per descrivere quelle fasi della struttura stellare in cui i cambiamenti siano così rapidi da provocare contributi importanti dell'energia termica e gravitazionale della stella. In queste fasi il flusso di energia emesso non è esclusivamente prodotto da reazioni nucleari.

2.4 Trasporto radiativo dell'energia

La temperatura all'interno del sole è dell'ordine del milione di gradi, da confrontare con quella della superficie dell'ordine delle migliaia di gradi. In generale nelle stelle esiste un gradiente di temperatura negativo dal centro alla superficie. Questo gradiente di temperatura implica che il flusso di radiazione che attraversa ogni area all'interno della stella sia diverso da zero. Un punto all'interno della stella riceve radiazione proveniente da zone più centrali che sono più calde e da zone più esterne che sono più fredde. Il flusso di radiazione proveniente dalle zone più calde è maggiore di quello proveniente dalle zone più fredde. Quindi in totale si ha un flusso uscente.

Il gradiente di temperatura provoca un flusso di radiazione uscente, e, in principio, anche un'anisotropia del flusso stesso. L'anisotropia è legata all'opacità della materia stellare. La diversa densità verso il centro rispetto alla superficie implica che osservando da un dato punto la stella si possa vedere più lontano in una direzione che nell'altra. In altre parole, a parità di energia, un fotone diretto verso l'interno della stella ha un cammino libero medio inferiore di quello di un fotone diretto all'esterno. D'altra parte, stime dell'opacità della stella indicano che pochi centimetri di gas stellare sono sufficienti per bloccare la radiazione elettromagnetica [Sch58]. Dato che le variazioni di densità sulla scala di pochi cm sono irrilevanti, si ha di fatto un'ottima isotropia della radiazione, fatto che utilizzeremo nelle nostre stime.

Calcoliamo il flusso di radiazione per un cilindro di area base ds e lunghezza dl posizionato come indicato nella figura 2.1. Chiamiamo $d\omega$ l'angolo solido sotteso dal cilindro. Indichiamo con θ l'angolo tra l'asse di simmetria del cilindro e il vettore che congiunge il centro del cerchio della base più vicina al centro della stella con il centro stesso. Indichiamo con α l'angolo tra i due raggi congiungenti i centri dei cerchi di base del cilindro con il centro della stella.

Chiamiamo χ il coefficiente di assorbimento per unità di massa. Questo coefficiente dipende dalla frequenza della radiazione, dalla densità del mezzo e quindi anche dalla posizione all'interno

della stella. Il coefficiente ci dice che percentuale della radiazione viene assorbita per unità di massa. Chiamiamo $I(r, \theta)$ il campo di radiazione che è l'intensità della radiazione ad una distanza r , in una direzione inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione radiale. Nelle unità di misura del SI, l'intensità della radiazione $I(r, \theta)$, ha le dimensioni di Joule per metro quadro per secondo per unità di angolo solido.

Consideriamo il guadagno e le perdite che la radiazione all'interno dell'angolo solido $d\omega$ riceve ogni secondo in un cilindro di base ds e lunghezza dl . Ci sarà un guadagno radiativo dal fondo

$$I(r, \theta) d\omega ds ,$$

e una perdita dalla parte superiore del cilindro

$$I(r + dr, \theta + d\theta) d\omega ds .$$

Abbiamo quindi che l'assorbimento della radiazione da parte della materia contenuta nel cilindro è

$$-I(r, \theta) d\omega ds \chi \rho dl .$$

Nell'equazione precedente, $ds \chi \rho dl$ indica la frazione di radiazione assorbita dalla massa del cilindro, e $I(r, \theta) d\omega$ è il flusso di radiazione che attraversa il cilindro.

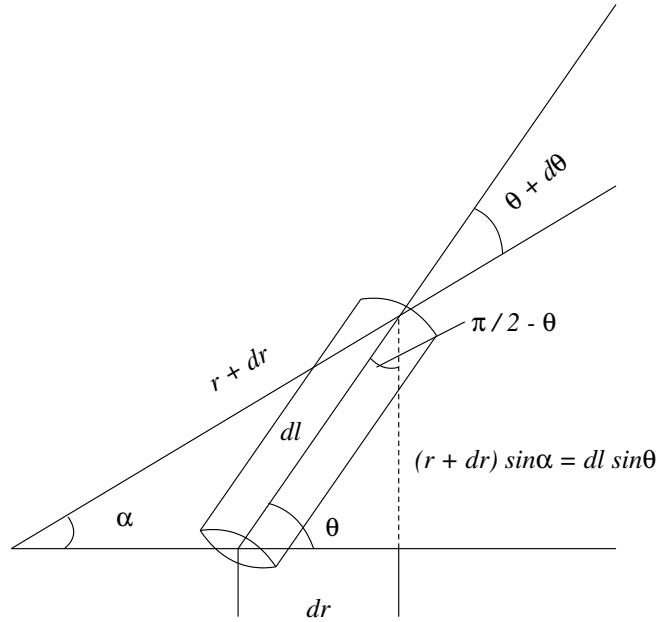


Figura 2.1:

Consideriamo il guadagno nell'emissione radiativa prodotto dalla materia del cilindro, in cui si suppone avvengano reazioni nucleari. Chiamiamo con j l'energia prodotta in un secondo dall'unità di massa. Supponiamo che l'emissione di questa radiazione sia isotropica. Il contributo all'aumento del flusso radiativo che attraversa l'angolo solido $d\omega$ della stella è:

$$j \rho ds dl \frac{d\omega}{4\pi} . \quad (2.22)$$

Prima di procedere alla formulazione dell'equazione che descrive il trasferimento di energia per processi radiativi, facciamo alcune considerazioni geometriche relative alla figura 2.1.

Dalle definizioni delle variabili si ha che:

$$\alpha + \left(\theta + d\theta + \frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{\pi}{2} = \pi ,$$

ove abbiamo considerato il triangolo rettangolo di cui $r + dr$ è l'ipotenusa, quindi

$$\alpha = \pi - (\pi + d\theta) = -d\theta .$$

Dalla figura abbiamo che:

$$dl \sin \theta = (r + dr) \sin \alpha \simeq r \sin \alpha = r \sin(-d\theta) \simeq r(-d\theta) ,$$

da cui:

$$dl = -d\theta \frac{r}{\sin \theta} .$$

Sempre dalla figura abbiamo che:

$$dr = dl \cos \theta .$$

La variazione del flusso di radiazione può essere espressa come:

$$dI(r, \theta) ds d\omega = -I(r, \theta) ds d\omega \chi \rho dl + j \rho ds dl \frac{d\omega}{4\pi} . \quad (2.23)$$

Riarrangiando l'equazione precedente e utilizzando le relazioni geometriche ricavate sopra abbiamo che:

$$\frac{dI}{dl} + I \chi \rho - j \rho \frac{1}{4\pi} = \frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + I \chi \rho - \frac{j \rho}{4\pi} = 0 , \quad (2.24)$$

questa è l'equazione da risolvere per ottenere l'equilibrio radiativo in ogni punto della stella.

Il tradizionale metodo di soluzione dell'equazione (2.24) è quello di utilizzare lo sviluppo in momenti, definiti come potenze di $\cos \theta$. I primi momenti sono:

$$E(r) = \frac{1}{c} \int I(r, \theta) d\omega , \quad \text{densità di energia} , \quad (2.25)$$

$$H(r) = \int I(r, \theta) \cos \theta d\omega , \quad \text{flusso di radiazione} , \quad (2.26)$$

$$P_R(r) = \frac{1}{c} \int I(r, \theta) \cos^2 \theta d\omega , \quad \text{pressione di radiazione} . \quad (2.27)$$

Le soluzioni della (2.24) sono costruite moltiplicando i vari termini dell'equazione per diverse potenze di $\cos \theta$ ed integrando sull'angolo solido $d\omega$.

Il primo passo della procedura consiste nell'integrazione della (2.24) rispetto all'angolo solido $d\omega$:

$$\int \frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta d\omega - \int \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} d\omega + \int I \chi \rho d\omega - \int \frac{j \rho}{4\pi} d\omega = 0 . \quad (2.28)$$

Il primo termine della (2.28) è:

$$\int \frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta d\omega = \frac{\partial}{\partial r} \int I \cos \theta d\omega = \frac{dH(r)}{dr} .$$

Dato che:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin \theta d(\cos \theta) &= \int_{\pi}^0 \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin \theta (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin^2 \theta d\theta \\ &= [I \sin^2 \theta]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} I \left[\frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta) \right] d\theta = - \int_0^{\pi} I 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi} I \cos \theta (-\sin \theta) d\theta \\ &= 2 \int_1^{-1} I \cos \theta d(\cos \theta) = -2 \int_{-1}^1 I \cos \theta d(\cos \theta) , \end{aligned}$$

si ha che il secondo termine della (2.28) può essere scritto come:

$$\begin{aligned} - \int \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} d\omega &= -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin \theta d(\cos \theta) = \\ &= -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \left[-2 \int_{-1}^1 I \cos \theta d(\cos \theta) \right] = \frac{2}{r} \int I \cos \theta d\omega = \frac{2}{r} H(r) . \end{aligned}$$

Il terzo termine della (2.28) è:

$$\int I \chi \rho d\omega = c \chi \rho E(r) ,$$

e il quarto termine:

$$\int \frac{j \rho}{4\pi} d\omega = j \rho \frac{1}{4\pi} \int d\omega = j \rho .$$

Riassemblando i vari termini otteniamo per la (2.28) l'espressione:

$$\frac{dH(r)}{dr} + \frac{2}{r} H(r) + c \chi \rho E(r) - j \rho = 0 . \quad (2.29)$$

Il secondo passo della procedura consiste nel moltiplicare ogni termine della (2.24) per $\cos \theta$ e poi integrare rispetto all'angolo solido $d\omega$. Otteniamo l'equazione:

$$\int \frac{\partial I}{\partial r} \cos^2 \theta d\omega - \int \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \cos \theta d\omega + \int I \chi \rho \cos \theta d\omega - \int \frac{j \rho}{4\pi} \cos \theta d\omega = 0 . \quad (2.30)$$

Il primo termine della (2.30) è:

$$\int \frac{\partial I}{\partial r} \cos^2 \theta d\omega = c \frac{dP_R(r)}{dr} .$$

Per il calcolo del secondo termine è utile il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta d(\cos \theta) &= \int_0^{\pi} \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin^2 \theta \cos \theta d(\theta) \\ &= [I \sin^2 \theta \cos \theta]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} I \frac{d}{d\theta} [\sin^2 \theta \cos \theta] d(\theta) \\ &= - \int_0^{\pi} I [2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta + \sin^2 \theta (-\sin \theta)] d(\theta) \\ &= 2 \int_1^{-1} I \cos^2 \theta d(\cos \theta) - \int_1^{-1} I (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\ &= 3 \int_1^{-1} I \cos^2 \theta d(\cos \theta) - \int_1^{-1} I d(\cos \theta) . \end{aligned}$$

Il secondo termine della (2.30) può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 - \int \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \cos \theta d\omega &= -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{\partial I}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \\
 &= -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \left[3 \int_1^{-1} I \cos^2 \theta d(\cos \theta) - \int_1^{-1} I d(\cos \theta) \right] \\
 &= \frac{3}{r} \int I \cos^2 \theta d\omega - \frac{1}{r} \int I d\omega = c \frac{3}{r} P_R(r) - \frac{c}{r} E(r) .
 \end{aligned}$$

Il terzo termine della (2.30) è:

$$\int \chi \rho I \cos \theta d\omega = \chi \rho H(r) ,$$

e il quarto termine è nullo. Utilizzando i risultati presentati, l'equazione (2.30) può essere riscritta come:

$$\frac{dP_R(r)}{dr} + 3 \frac{P_R(r)}{r} - \frac{E(r)}{r} + \frac{1}{c} \chi \rho H(r) = 0 . \quad (2.31)$$

L'idea del metodo dei momenti è quella di sostituire l'equazione differenziale (2.24) con un sistema di equazioni differenziali che coinvolgono i vari momenti, definiti dalle equazioni (2.25), (2.26) e (2.27). Abbiamo ottenuto due equazioni differenziali, (2.29) e (2.31), ma dato che i momenti coinvolti sono tre, è necessaria un'altra equazione. La procedura adottata per ottenere le equazioni (2.29) e (2.31) non può essere reiterata perché si otterrebbe un'equazione con la presenza di un momento di ordine superiore a quelli utilizzati. Questo è il limite del metodo dei momenti. L'equazione che stiamo cercando è una relazione, eventualmente anche approssimata, che lega i tre momenti (2.25), (2.26) e (2.27). Utilizzeremo la relazione:

$$P_R(r) = \frac{1}{3} E(r) , \quad (2.32)$$

ottenuta qui sotto.

L'idea è quella di sviluppare I in serie di potenze di $\cos \theta$:

$$I(r, \theta) = I_0(r) + I_1(r) \cos \theta + I_2(r) \cos^2 \theta + \dots , \quad (2.33)$$

e studiare il tasso di convergenza dello sviluppo. Inseriamo questo sviluppo nell'equazione (2.24). Non consideriamo il secondo termine, legato alla derivata rispetto a θ . Questo termine è legato alla curvatura dell'intensità I , non al tasso di convergenza nello sviluppo in serie di potenza. La presenza di questo termine complica matematicamente l'algebra del problema, ma non dà informazioni rilevanti sulla convergenza dello sviluppo (2.33). Otteniamo quindi l'espressione:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} [I_0(r) + I_1(r) \cos \theta + I_2(r) \cos^2 \theta + \dots] \cos \theta \\
 + \chi \rho [I_0(r) + I_1(r) \cos \theta + I_2(r) \cos^2 \theta + \dots] - \frac{1}{4\pi} j \rho = 0 .
 \end{aligned}$$

Imponiamo che i termini con la stessa potenza di $\cos \theta$ siano nulli, dato che sono indipendenti l'uno dall'altro.

$$\chi \rho I_0(r) - \frac{1}{4\pi} j \rho = 0 , \quad \text{ordine zero, da non utilizzare} ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_0(r)}{\partial r} + \chi \rho I_1(r) &= 0, \quad \text{primo ordine}, \\ \frac{\partial I_1(r)}{\partial r} + \chi \rho I_2(r) &= 0, \quad \text{secondo ordine}.\end{aligned}$$

Dalle ultime due equazioni otteniamo l'equazione di ricorrenza

$$\frac{dI_{n-1}(r)}{dr} + \chi \rho I_n(r) = 0,$$

valida per $n > 0$. Dato che siamo interessati agli ordini di grandezza sostituiamo nell'equazione precedente dI_{n-1} con I_{n-1} e dr con R , otteniamo quindi:

$$\left| \frac{I_n}{I_{n-1}} \right| \simeq \frac{1}{\chi \rho R} \simeq 10^{-11},$$

dove abbiamo considerato $\chi \sim 0.1 \text{m}^2/\text{kg}$ [Sch58] e i valori della densità media e del raggio del sole. La convergenza è estremamente rapida ed è quindi sufficiente troncare lo sviluppo ai termini più bassi. Bisogna comunque considerare almeno il termine del primo ordine per avere una distribuzione non uniforme. Inserendo i primi due termini dello sviluppo (2.33) nella definizione della densità di energia (2.25) abbiamo:

$$E(r) = \frac{1}{c} \int [I_0(r) + I_1(r) \cos \theta] d\omega = \frac{1}{c} 4\pi I_0(r) + I_1(r) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \cos \theta d(\cos \theta) = \frac{1}{c} 4\pi I_0(r).$$

Per quanto riguarda il flusso di radiazione (2.26) abbiamo:

$$H(r) = \int [I_0(r) + I_1(r) \cos \theta] \cos \theta d\omega = \frac{4\pi}{3} I_1(r),$$

e per la pressione di radiazione (2.27):

$$P_R(r) = \frac{1}{c} \int [I_0(r) + I_1(r) \cos \theta] \cos^2 \theta d\omega = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} I_0(r).$$

Dal confronto tra i risultati ottenuti sopra abbiamo la (2.32) che è valida a meno di termini dell'ordine $|I_2/I_0| \simeq 10^{-22}$.

Utilizzando la relazione (2.32) possiamo riscrivere l'equazione (2.31) come:

$$\frac{1}{3} \frac{dE(r)}{dr} + \frac{1}{c} \chi \rho H(r) = 0. \quad (2.34)$$

Quindi adesso dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni differenziali accoppiate, (2.29) e (2.34), con due funzioni incognite $E(r)$ e $H(r)$.

Sostituiamo il flusso per unità di area $H(r)$ con il flusso globale $L(r)$ relativo alla sfera di raggio r utilizzando la relazione geometrica:

$$L(r) = 4\pi r^2 H(r). \quad (2.35)$$

Cerchiamo adesso un'espressione di j che permetta di legare $E(r)$ e $H(r)$, ovvero $E(r)$ e $L(r)$. L'emissione di radiazione proviene da due sorgenti. Un processo a cui abbiamo già accennato riguarda le interazioni nucleari e abbiamo chiamato ϵ la percentuale di energia delle reazioni, per unità di massa, che viene emessa con radiazione elettromagnetica. Parte dell'energia nucleare è trasportata dai neutrini. Le piccole sezioni d'urto dei neutrini fanno in modo che i neutrini contribuiscano in maniera trascurabile all'emissione elettromagnetica della stella. L'altro meccanismo

di produzione è termico che in accordo con la legge di Kirckhoff è proporzionale al coefficiente di assorbimento della radiazione χ , alla velocità della luce c e alla costante di Stefan-Boltzmann σ_B . Abbiamo quindi:

$$j = \chi \tilde{\sigma}_B c T^4 + \epsilon . \quad (2.36)$$

dove ho usato la costante $\tilde{\sigma}_B = 4\sigma_B/c$.

Utilizziamo l'equazione (2.3) per descrivere ϵ . L'equazione (2.29) può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[L(r) \frac{1}{4\pi r^2} \right] + \frac{2}{r} \frac{L(r)}{4\pi r^2} + c \chi \rho E(r) &= (\chi \tilde{\sigma}_B c T^4 + \epsilon) \rho \\ \frac{dL(r)}{dr} \frac{1}{4\pi r^2} + \frac{L(r)}{4\pi} \frac{-2}{r^3} + \frac{2}{r} \frac{L(r)}{4\pi r^2} + c \chi \rho E(r) &= (\chi \tilde{\sigma}_B c T^4 + \epsilon) \rho \\ \epsilon \rho 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi r^2} + c \chi \rho E(r) &= (\chi \tilde{\sigma}_B c T^4 + \epsilon) \rho \\ E(r) &= \tilde{\sigma}_B T^4 . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Questa relazione tra la densità di energia e la temperatura è esattamente quella che si otterrebbe nel caso di perfetto equilibrio termico. Questo significa che, nel nostro calcolo, le anisotropie all'interno della stella sono poco significative. Inserendo la (2.37) nella (2.34) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_B \frac{dT^4}{dr} + \frac{1}{c} \chi \rho H(r) &= 0 \\ H(r) &= -\frac{1}{3} \tilde{\sigma}_B \frac{c}{\chi \rho} \frac{dT^4}{dr} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Moltiplicando per $4\pi r^2$ e ricordando la (2.35) abbiamo

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{\tilde{\sigma}_B c}{3} \frac{dT^4}{dr} , \quad (2.39)$$

da cui si ottiene l'equazione (2.4).

L'equazione (2.39) dice che solo la condizione di equilibrio radiativo contribuisce alla luminosità della stella, che è indipendente dai dettagli delle reazioni nucleari che producono energia. La situazione che stiamo descrivendo prevede un aggiustamento continuo delle condizioni della stella in modo che i vari tipi di equilibrio dati dalle equazioni (2.1-2.4) siano soddisfatti.

La pressione deve compensare l'attrazione gravitazionale in accordo con l'equilibrio idrostatico (2.1). Se la pressione è troppo alta anche la temperatura interna risulta essere alta. Il flusso di radiazione dato dalla (2.4) sarà aggiustato in modo da soddisfare il gradiente di temperatura dall'interno all'esterno della stella, indipendentemente dal fatto che le reazioni nucleari possano compensare questo flusso di radiazione in uscita. Nel caso questo succeda, cioè, se le reazioni nucleari non forniscono energia sufficiente per compensare la perdita per radiazione, questa energia viene prodotta dalla contrazione della stella. Siccome per la (2.16) solo metà dell'energia della contrazione viene rilasciata per emissione radiativa, l'altra metà contribuirà ad aumentare l'energia termica, quindi la temperatura. Un aumento della temperatura aumenta anche il tasso di reazioni nucleari. La contrazione della stella si ferma quando si ristabilisce il bilancio radiativo tra energia nucleare ed energia rilasciata dalla stella per emissione radiativa.

La stella aggiusta il tasso di reazioni nucleari per compensare la perdita per emissione radiativa. Questo aggiustamento non avviene variando la luminosità, ma cambiando il tasso di reazioni nucleari attraverso contrazioni o espansioni della stella.

Ci sono ovviamente situazioni in cui non si riesce a stabilire un equilibrio tra il tasso di produzione di energia nucleare e dimensioni della stella e questo provoca modifiche sostanziali nella struttura stellare.

2.5 Trasporto convettivo dell'energia

L'emissione radiativa è sicuramente il meccanismo più importante di trasporto di calore in una stella. Se per una stella la trasmissione di calore per conduzione risulta essere scarsamente rilevante, non è così per il meccanismo legato alla convezione [Sch58].

Consideriamo un piccolo elemento di materia stellare e indichiamo con asterisco le quantità fisiche che lo caratterizzano, mentre le quantità prive di asterisco si riferiscono al resto della materia stellare. Supponiamo che questa piccola quantità di materia abbia pressione e densità iniziali ρ_1^* e P_1^* . Nella situazione di equilibrio questi valori sono identici a quelli della parte della stella che sta attorno $\rho_1^* = \rho_1$ e $P_1^* = P_1$. Spostiamo questo piccolo elemento di materia verso l'esterno della stella di una piccola distanza dr . Lasciamo espandere l'elemento di materia in maniera adiabatica fino a quando la pressione all'interno sia uguale a quella esterna. Nella nostra nomenclatura abbiamo che $P_2^* = P_2$, e dato che, per una espansione adiabatica si ha:

$$\begin{aligned} P_2 V_2^\gamma &= P_1 V_1^\gamma \\ \frac{P_2}{P_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \\ \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &= \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{M} \frac{M}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} , \end{aligned}$$

otteniamo nel nostro caso:

$$\rho_2^* = \rho_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} . \quad (2.40)$$

Nelle equazioni precedenti $\gamma = c_p/c_v$ rappresenta il rapporto tra i calori specifici misurati a pressione e volume costante. Per un gas altamente ionizzato γ assume un valore molto vicino a 5/3.

La pressione non ha subito modifiche dovute alla perturbazione, mentre la densità dell'elemento di materia considerato è diversa da quella della parte stellare che la circonda. Se $\rho_2^* > \rho_2$ si ha che l'azione dell'interazione gravitazionale sull'elemento di materia è più intensa rispetto a quella sulla materia che gli sta attorno, e quindi spingerà l'elemento di materia verso il centro fino a quando la situazione $\rho_2^* = \rho_2$ non si sarà ristabilita. Questo significa che ogni perturbazione sarà comunque immediatamente riassorbita in modo da produrre di nuovo la stabilità della materia stellare.

La condizione di stabilità per moti convettivi può essere espressa in maniera più formale eliminando le quantità asteriscate e facendo uno sviluppo in serie di Taylor delle quantità con indice 2.

Per semplicità chiamiamo ρ e P i valori di $\rho_1 = \rho_1^*$ e $P_1 = P_1^*$.

Consideriamo ρ_2 sia una piccola variazione di ρ_1 . Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per

$$\rho_2(r + dr) = \rho(r) + \frac{d\rho(r)}{dr} dr + \dots$$

Per le pressioni abbiamo che:

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &= \left(\frac{1}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[P^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{d}{dr} \left(P^{\frac{1}{\gamma}} \right) dr + \dots \right] \\ &= \left(\frac{1}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[P^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} P^{\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)} \frac{dP}{dr} dr + \dots \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{P^{\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)}}{P^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dP}{dr} dr + \dots = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr + \dots \end{aligned}$$

Dato che $\rho_2^* > \rho_2$ abbiamo che per la (2.40)

$$\rho \left[1 + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr \right] > \rho(r) + \frac{d\rho(r)}{dr} dr$$

da cui:

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho(r)}{dr} . \quad (2.41)$$

Questa equazione è un'espressione generale dell'equilibrio per moti convettivi all'interno di una stella.

Supponiamo che valga l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P = n \frac{N_A}{V} k_B T = \frac{n N_A}{M} \frac{M}{V} k_B T = \frac{n N_A}{M} \rho k_B T = \frac{k_B}{m} \rho T , \quad (2.42)$$

dove m indica la massa molecolare media, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &= \frac{m}{k_B \rho T} \frac{d(\rho T)}{dr} \frac{k_B}{m} = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{d\rho}{dr} T + \rho \frac{dT}{dr} \right) \\ \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} &= \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} . \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella (2.41) otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &< -\left[\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right] \\ -\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &< \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \\ -\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} &> -\frac{dT}{dr} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Poiché il gradiente di pressione e di temperatura sono negativi entrambi i membri dell'equazione (2.43) sono positivi.

In un modello stellare stabile la condizione (2.43) deve essere verificata per ogni strato della stella. Questo significa che il gradiente di pressione deve essere calcolato dalla (2.1) che definisce l'equilibrio idrostatico e il gradiente di temperatura è dato dalla (2.4) che definisce l'equilibrio radiativo. Questi valori devono soddisfare la (2.43) per una stella in equilibrio.

Supponiamo che uno strato della stella non soddisfi la condizione (2.43). Questo significa, ad esempio, che dopo lo spostamento dr la densità ρ_2^* è inferiore a quella della stella che circonda lo strato. L'intensità della forza gravitazionale sullo strato perturbato è inferiore a quella del circondario, e quindi lo strato perturbato continuerà il suo moto verso l'esterno. Analogamente uno strato che si sposta verso l'interno e ha densità più alta della materia che lo circonda e proseguirà il suo moto verso l'interno.

Dal punto di vista termodinamico la temperatura dello strato che si muove verso l'esterno è maggiore di quella della materia che lo circonda. Dato che $P_2^* = P_2$ l'equazione di stato (2.42) implica una temperatura maggiore se la densità è più bassa, come noi abbiamo ipotizzato. Questo significa che lo strato perturbato porta energia termica verso l'esterno. Per strati che si muovono verso l'interno avviene il contrario, dato che la loro temperatura è inferiore a quella della materia che li circonda.

Questo movimento di materia per convezione riduce il gradiente di temperatura, dato che parti calde di materia si stabiliscono dove si trovano parti di materia stellare a temperatura inferiore, ed eventualmente viceversa. La diminuzione del gradiente di temperatura riduce il flusso radiativo in accordo con l'equazione (2.4). Anche il trasporto convettivo sarà ridotto dato che dipende dal gradiente di temperatura stesso. Supponiamo che all'inizio del processo la stella si trovasse in una situazione di squilibrio tra la produzione di energia radiativa dalle reazioni nucleari ϵ e il rilascio radiativo. È evidente che il processo di rilascio radiativo e il trasporto convettivo di calore riequilibrano la situazione termodinamica globale.

Questa soluzione di equilibrio convettivo viene solitamente espressa sostituendo il segno di maggiore con una eguaglianza nell'equazione (2.43) e questo permette di ottenere l'equazione (2.5).

Capitolo 3

Fusione nucleare

3.1 Introduzione

Le reazioni termonucleari giocano un ruolo rilevante nella produzione di energia nelle stelle. Una stella nasce quando il gas interstellare, soprattutto idrogeno ed elio, si condensa, e come risultato della conversione dell'energia gravitazionale in energia cinetica, si scalda, fino a temperature sufficienti ad innescare processi di fusione, il più semplice dei quali è la fusione dell'idrogeno. L'energia rilasciata dalle reazioni nucleari rende stabile la stella stabilendo un bilancio tra la pressione termica, che espande il gas, e quella gravitazionale, che tende a comprimerlo. Il processo di fusione continua senza modifiche rilevanti della temperatura e delle dimensioni della stella fino a quando il combustibile nucleare si esaurisce, e la stella si contrae nuovamente aumentando la temperatura e cominciando ad innescare processi di fusione tra nuclei più pesanti. L'analisi dell'abbondanza dei nuclei e lo studio della barriera di penetrazione coulombiana hanno portato a postulare precise sequenze di processi di fusione. Queste ipotesi sono sopravvissute a varie verifiche osservative. I processi ipotizzati sono i seguenti.

1. Fusione dell'idrogeno. Si tratta della conversione dell'idrogeno in elio.
2. Fusione dell'elio. L'elio fonde producendo essenzialmente carbonio e ossigeno.
3. Fusione di carbonio e ossigeno, che permette la produzione di elementi con numero di massa A compreso tra 16 e 28.
4. Fusione del silicio, $A=28$. Produce elementi con $28 \leq A \leq 60$.

La formazione di nuclei più pesanti avviene con processi di cattura neutronica denominati r e s .

In questo capitolo presenteremo una descrizione generale dei processi di fusione nucleare, mentre gli specifici processi di fusione che si attivano nelle stelle nelle varie fasi della loro vita, saranno discussi in dettaglio nei capitoli seguenti.

Uno dei concetti fondamentali della fisica nucleare è quello dell'energia di legame, definita come:

$$B(A, Z) = [Zm_p + Nm_n - M(A, Z)]c^2, \quad (3.1)$$

dove Z è il numero di protoni di massa m_p presenti nel nucleo, $N = A - Z$ è il numero di neutroni, con massa m_n , e M è la massa del nucleo, in esame. Soltanto se $B > 0$ il nucleo può formarsi, dato che lo stato legato di Z protoni e N neutroni è energeticamente favorito rispetto alla situazione in cui tutti i suoi componenti sono liberi. L'energia di legame positiva indica che il nucleo può formarsi, ma non dà nessuna informazione sulla sua stabilità. Infatti dei circa 3000 nuclei noti solo 208 sono stabili, hanno cioè vita media superiore all'età del sistema solare.

La Figura 3.1 mostra i valori sperimentali delle energie di legame per nucleone in funzione del numero di massa. Bisogna notare che per nuclei con $A > 12$ le variazioni dell'energia di legame per nucleone sono soltanto del 10-15 %. La curva raggiunge un massimo per il nucleo ^{56}Fe . Questo significa che la fusione di due nuclei leggeri che formano un nuovo nucleo di massa inferiore al ^{56}Fe produce energia. Questo è il tipo di reazione che produce energia nelle stelle.

Per calcolare l'energia prodotta da una stella è necessario conoscere il tasso di reazione ovvero quante reazioni nucleari avvengono all'interno della stella, nell'unità di tempo. Il tasso di reazione dipende quindi dalla probabilità che due nuclei che si incontrano possano fondere, e dal numero di collisioni che possono avvenire in un secondo. La probabilità di fusione dipende dalla sezione d'urto. Delle sezioni d'urto di fusione ci occuperemo in dettaglio nel seguito di questo capitolo.

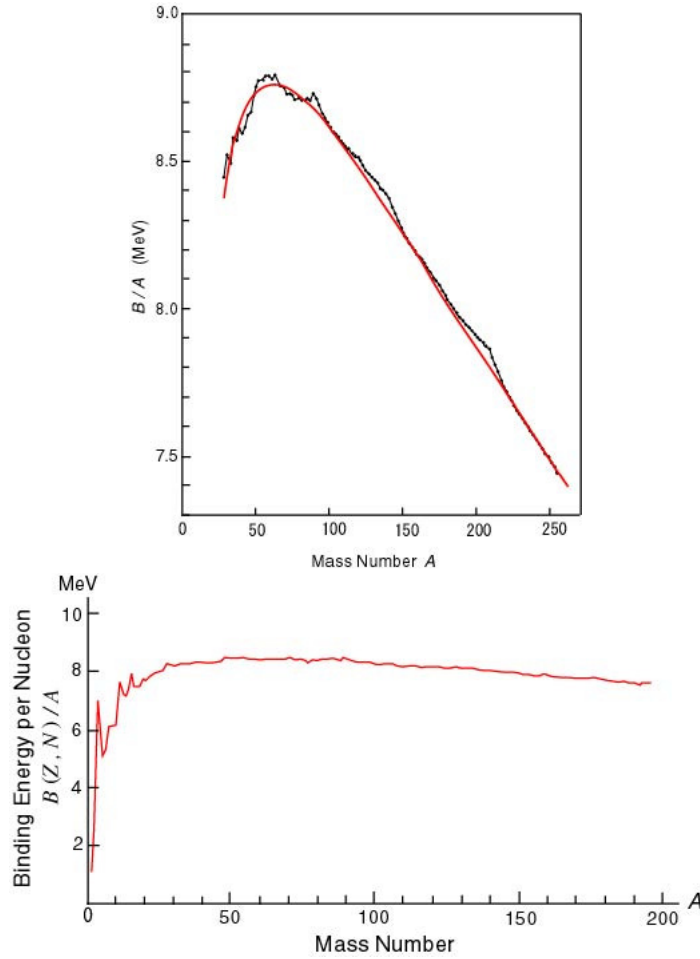


Figura 3.1: Energie di legame per nucleone in funzione del numero di massa.

Per quanto riguarda il numero di collisioni per unità di tempo, consideriamo il caso di un gas stellare formato da due tipi di nuclei, che identificheremo come X e Y il cui numero per unità di volume (densità di numero) è rispettivamente n_X e n_Y . Dato che nel processo di reazione quello che conta è il moto relativo di un nucleo rispetto all'altro, possiamo pensare ad un processo di diffusione in cui una delle due specie, X ad esempio, sia il proiettile, e l'altra sia il bersaglio. Il singolo nucleo X avrà una probabilità di collisione per unità di area data dalla sezione d'urto σ per la densità dei nuclei bersaglio. Il tasso di reazione è ottenuto moltiplicando questa probabilità di reazione con il numero di nuclei bersaglio che raggiungono l'unità di area nell'unità di tempo, in altre parole per il flusso delle particelle incidenti, $J = n_X v$ dove v è il modulo della velocità relativa. Il tasso di reazioni nucleari per unità di tempo e di volume è

$$r = n_X v n_Y \sigma(v) , \quad (3.2)$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza della sezione d'urto dalla velocità relativa.

La temperatura nel centro della stella, dove avvengono i processi di fusione, può considerarsi costante, rispetto alle distanze in gioco (fm). Consideriamo distribuzioni di Boltzmann delle energie dei due tipi di nuclei che formano il gas interstellare. Avremo quindi globalmente:

$$\exp \left[-\frac{E_X}{k_B T} \right] \exp \left[-\frac{E_Y}{k_B T} \right] = \exp \left[-\frac{E_{cm}}{k_B T} \right] \exp \left[-\frac{E}{k_B T} \right] ,$$

dove abbiamo indicato l'eguaglianza con il prodotto delle distribuzioni di Boltzmann dell'energia del centro di massa E_{cm} e l'energia relativa. Questa uguaglianza può essere verificata utilizzando le solite definizioni di coordinate ed impulsi di sistemi del centro di massa e relativo, come è fatto nella sezione 3.2. L'unico termine di interesse per il nostro calcolo riguarda la distribuzione di energie relative, che può essere convertita in una distribuzione di Maxwell delle velocità:

$$\phi(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) , \quad (3.3)$$

dove m è la massa ridotta del sistema, Eq. (3.7), e la distribuzione ha la normalizzazione:

$$\int_0^\infty dv \phi(v) = 1 .$$

Dato che $\phi(v)$ rappresenta la probabilità di trovare la coppia di nuclei interagenti con velocità relativa compresa tra v e $v + dv$, per ottenere uno tasso medio di reazione, dobbiamo inserire nella (3.2) il valore della sezione d'urto mediato sulla distribuzione delle velocità:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \int_0^\infty dv \phi(v) v \sigma(v) \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \\ &= \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty E \sigma(E) \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) dE , \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato $E = \frac{1}{2}mv^2$. Il tasso di reazioni nucleari (3.2) diventa quindi:

$$r = n_X n_Y \langle \sigma(v) v \rangle (1 + \delta_{XY})^{-1} , \quad (3.5)$$

dove il termine con la δ di Kronecker è stato inserito per evitare un doppio conteggio nel caso in cui i due tipi di nuclei siano uguali.

3.2 Generalità sulle reazioni nucleari

3.2.1 Diffusione elastica

Le reazioni nucleari di nostro interesse avvengono ad energie molto inferiori rispetto al valore delle masse dei nuclei che interagiscono. Per questo motivo è valida una trattazione non relativistica. Il problema consiste quindi nella soluzione dell'equazione di Schrödinger che descrive il moto dei due nuclei:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m_1} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E_T \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) , \quad (3.6)$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono ai due nuclei che interagiscono. Definiamo le seguenti variabili: massa totale e ridotta,

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{e} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (3.7)$$

coordinate del centro di massa e relativa,

$$R = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ,$$

e impulsi del centro di massa e relativo

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} .$$

Utilizzando le definizioni date sopra è possibile separare il moto del centro di massa del sistema, dal moto relativo dei due nuclei [Mes61]. La funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ può quindi essere espressa come prodotto delle funzioni d'onda che descrivono il moto del centro di massa e il moto relativo. Dato che il potenziale dipende soltanto dalle coordinate relative, la funzione d'onda del centro di massa è un'onda piana, soluzione dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. Il problema della soluzione dell'equazione (3.6) è quindi ricondotto alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per il moto relativo dei due nuclei che collidono:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) , \quad (3.8)$$

Potenziale a corto raggio

Procediamo facendo alcune ipotesi sul potenziale per semplificare la trattazione. Ipotizziamo che il potenziale sia puramente scalare e centrale $V(\mathbf{r}) = V(r)$. In aggiunta facciamo l'ipotesi che sia a corto raggio. Questa ipotesi significa che il potenziale è nullo quando r è maggiore del raggio d'azione dell'interazione. Quest'ultima ipotesi è appropriata per l'interazione nucleare forte, che ci interessa. E' ben noto che questa interazione non è attiva a distanze superiori ai $2 fm$. Per quanto riguarda le prime due ipotesi, invece non sono adeguate all'interazione forte, che dipende dallo spin e dall'isospin delle particelle interagenti, e qui cade l'ipotesi che sia scalare. Inoltre questa interazione contiene anche un termine che può essere espresso come un tensore sferico di rango due nello spazio delle configurazioni, e questo distrugge l'ipotesi di centralità dell'interazione. In ogni caso, queste difficoltà possono essere affrontate correggendo la soluzione ottenuta con un potenziale scalare e centrale.

Il processo di diffusione può essere descritto come un flusso di particelle che si muovono libere nella direzione del bersaglio. Alla distanza in cui l'interazione a corto raggio è attiva, il moto di

queste particelle viene modificato. Superata questa distanza, le particelle diffuse si allontanano dal bersaglio muovendosi libere. La soluzione asintotica dell'Eq. (3.8) può essere espressa come:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (3.9)$$

Il primo termine descrive l'onda piana incidente, e il secondo l'onda sferica uscente. Dato che il potenziale è puramente scalare non c'è dipendenza dallo stato di polarizzazione dei due nuclei. La sezione d'urto è legata all'ampiezza di transizione $f(\theta)$ dalla relazione [Mes61]:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = |f(\theta)|^2 . \quad (3.10)$$

Consideriamo il caso di diffusione elastica, in cui non c'è trasferimento di energia tra i due nuclei che collidono. Questo è equivalente ad affermare che in processi di diffusione elastica l'energia cinetica totale del sistema si conserva. In questi processi anche il flusso di particelle viene conservato.

Sfruttando la simmetria sferica del potenziale, possiamo utilizzare le tecniche di sviluppo in multipoli della soluzione dell'equazione di Schrödinger [Mes61], che scriviamo come:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) . \quad (3.11)$$

Nell'equazione abbiamo indicato con P_l il polinomio di Legendre di grado l . L'equazione (3.8), in coordinate polari sferiche, può essere riscritta considerando che i polinomi di Legendre sono auto-stati dell'operatore momento angolare quadrato. Sfruttando questo fatto riscriviamo l'equazione (3.8) come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (3.12)$$

dove abbiamo definito $k^2 = 2mE/\hbar^2$, e abbiamo indicato con $l(l+1)$ l'autovalore del momento angolare in unità $\hbar^2$.

La soluzione regolare all'origine dell'Eq. (3.12), quando $V(r) = 0$ è la funzione di Bessel sferica $j_l(kr)$. Asintoticamente, il potenziale è nullo, per l'ipotesi di corto raggio. Quindi, nella regione asintotica, la soluzione u_l si comporta come la funzione di Bessel sferica, ma avrà uno sfasamento che ricorda la presenza del potenziale. Abbiamo quindi per la soluzione libera:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr) P_l(\cos \theta) .$$

I comportamenti asintotici delle due soluzioni sono:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}\pi l)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (3.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (3.14)$$

dove δ_l è lo sfasamento, e A_l è una costante complessa il cui valore viene fissato imponendo le appropriate condizioni al contorno.

Come indica l'Eq. (3.9), l'onda diffusa è ottenuta sottraendo le due equazioni precedenti:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\Psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \left\{ A_l \sin \left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l \right) - \sin \left(kr - \frac{1}{2}\pi l \right) \right\} \quad (3.15)$$

Le condizioni al contorno indicano dalla (3.9) che è presente solo un'onda uscente. Come mostrato qui sotto, questa condizione, fissa il valore di A_l .

Utilizzando la formula di Eulero possiamo riscrivere la parte tra parentesi graffe nell' Eq. (3.15), come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \left(A_l \left\{ \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) \right] \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \exp[i(kr - \frac{1}{2} \pi l)] - \exp[-i(kr - \frac{1}{2} \pi l)] \right\} \right) \\ = & \frac{1}{2i} \left\{ \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \left(A_l e^{i\delta_l} - 1 \right) + \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \left(1 - A_l e^{-i\delta_l} \right) \right\} . \end{aligned}$$

Dato che in Eq. (3.9) è presente solo l'onda uscente $\exp(ikr)$, imponiamo che $A_l = \exp(i\delta_l)$.

Utilizzando il risultato qui sopra e ricordando che:

$$e^{i\frac{1}{2}\pi l} = -i^l ,$$

otteniamo per la (3.15)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\Psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (-i^l) (e^{i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} , \quad (3.16)$$

da cui, confrontando con la (3.9), abbiamo:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{i2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \frac{1}{2i} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) . \quad (3.17)$$

La sezione d'urto differenziale, è ottenuta utilizzando l'equazione (3.10):

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2 . \quad (3.18)$$

La sezione d'urto totale viene ottenuta integrando su tutto l'angolo solido:

$$\sigma = \int d\omega \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l , \quad (3.19)$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà di completezza e ortogonalità dei polinomi di Legendre:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(\cos \theta) P_{l'}'(\cos \theta) = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{l,l'} .$$

Potenziale coulombiano

L'ipotesi di base fatta per ottenere le equazioni precedenti è quella che il potenziale fosse a corto raggio d'azione, come il potenziale nucleare. In realtà in un processo di diffusione tra nuclei, il potenziale Coulombiano è sempre presente. Trattiamo prima il caso di diffusione elastica da potenziale Coulombiano puro, e poi il caso in cui sia anche presente un potenziale a corto raggio.

Nel caso in cui il potenziale sia puramente Coulombiano, l'Eq. (3.12) viene normalmente scritta come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (3.20)$$

dove sono stati definiti:

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2}{\hbar v} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{e} \quad v = \frac{\hbar k}{m} .$$

Le soluzioni dell'Eq. (3.20) sono particolari funzioni ipergeometriche confluenti, dette *funzioni coulombiane sferiche* [Mes61]. Le soluzioni regolari all'origine si indicano con $F_l(\gamma; kr)$ e quelle irregolari con $G_l(\gamma; kr)$. Nel limite $\gamma \rightarrow 0$ la funzione F_l corrisponde alla funzione di Bessel sferica j_l , e G_l alla funzione di Neumann n_l . Le espressioni asintotiche di queste funzioni sono:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_l(\gamma; kr) = \sin \left[kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{1}{2} l\pi - \sigma_l \right] \quad (3.21)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_l(\gamma; kr) = \cos \left[kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{1}{2} l\pi - \sigma_l \right] . \quad (3.22)$$

La forma asintotica delle funzioni d'onda in presenza di potenziale coulombiano differisce da quella delle funzioni d'onda libere per la presenza del termine $\gamma \ln 2(kr)$ che dipende dalle cariche dei due nuclei interagenti, e per il termine σ_l , detto, impropriamente, sfasamento coulombiano, che è dato dall'espressione:

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\gamma) , \quad (3.23)$$

dove la funzione Γ è definita come:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{con} \quad x > 0 .$$

Potenziale coulombiano modificato da un potenziale a corto raggio

Analizziamo il caso, più realistico, in cui sia il potenziale coulombiano V_c , sia quello nucleare V' , a corto raggio, sono presenti. L'equazione da risolvere viene scritta come:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 , \quad (3.24)$$

Si può ripetere il ragionamento fatto per il caso in cui il potenziale coulombiano non era presente, sostituendo l'andamento asintotico (3.13) delle funzioni di Bessel sferiche con quello (3.21) della funzione coulombiana F_l . Si ottiene che l'ampiezza di diffusione totale può essere scritta come

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta) , \quad (3.25)$$

dove l'ampiezza coulombiana può essere scritta come:

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \theta/2} \exp \left[-i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2i\sigma_0 \right] . \quad (3.26)$$

L'ampiezza generata dalla presenza del termine nucleare è

$$f'(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\sigma_l} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) . \quad (3.27)$$

L'espressione della sezione d'urto differenziale è:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2 = |f_c(\theta) + f'(\theta)|^2 = |f_c(\theta)|^2 + 2\text{Re} f_c^*(\theta) f'(\theta) + |f'(\theta)|^2 . \quad (3.28)$$

Il primo termine rappresenta la sezione d'urto per diffusione puramente coulombiana:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)_c = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4 \theta/2} = \left(\frac{Z_1 Z_2}{4E} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \sin^{-4} \left(\frac{\theta}{2} \right) , \quad (3.29)$$

la cui espressione è quella della formula di Rutherford.

3.2.2 Diffusione anelastica

Nel calcolo della sezione d'urto elastica il coefficiente A_l che in Eq. (3.15) moltiplica il termine asintotico dell'onda diffusa ha modulo unitario. Abbiamo infatti ottenuto $A_l = \exp(i\delta_l)$. Questo fatto garantisce che il flusso di particelle di momento $k\hbar$ che collidono con il bersaglio sia identico al flusso di particelle diffuse con momento $k\hbar$. La conservazione del flusso per un valore fissato del momento relativo tra le due particelle che collidono è una caratteristica della diffusione elastica. Ricordiamo che in una diffusione elastica, l'energia cinetica totale del sistema proiettile e bersaglio viene conservata. Questo significa la conservazione del modulo del momento relativo, e quindi la conservazione del flusso.

In reazioni anelastiche parte particelle incidenti con momento $k\hbar$ vanno a popolare canali con diverso valore del momento, nel senso del modulo. Questo nel caso in cui proiettile e bersaglio non cambino identità. Ovviamente anche nella visione più generale, in cui c'è trasferimento di nucleoni tra un nucleo e l'altro, oppure frammentazione di uno dei due nuclei iniziali, c'è una perdita di flusso dal canale iniziale. Questo fatto viene preso in considerazione moltiplicando il termine di onda uscente dell'onda diffusa per un numero complesso con modulo minore di uno.

Utilizzando la formula di Eulero, l'espressione dell'onda diffusa può essere scritta come:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2kr} \sum_l i^l (2l+1) \left\{ \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi \right) \right] - \eta_l \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi \right) \right] \right\} P_l(\cos \theta) , \quad (3.30)$$

con $|\eta_l| < 1$.

Il numero di particelle che interagiscono in maniera anelastica nell'unità di tempo, viene calcolato in termini di flusso di particelle che attraversano la superficie di una sfera S di raggio r attorno al centro diffusore, in un canale diverso da quello di entrata:

$$N_a = - \int_S \mathbf{J}_T \cdot \mathbf{n} dS ,$$

dove $\mathbf{J}_T$ è la corrente:

$$\mathbf{J}_T = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi_T^* \nabla \Psi_T - \Psi_T \nabla \Psi_T^* \right) , \quad (3.31)$$

quindi:

$$N_a = \frac{-\hbar}{2im} \int \left(\Psi_T^* \nabla \Psi_T - \Psi_T \nabla \Psi_T^* \right) r^2 d(\cos \theta) d\phi . \quad (3.32)$$

La parte dipendente da r della funzione d'onda può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_l(r) &= \frac{1}{r} \left\{ \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi \right) \right] - \eta_l \exp \left[i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{r} e^{-i \frac{1}{2} \pi l} \left[e^{-ikr} - \eta_l e^{-i \pi l} e^{ikr} \right] \\ &= \frac{1}{r} i^l \left[e^{-ikr} - \eta_l (-1)^l e^{ikr} \right] .\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2k} \sum_l i^l (2l+1) \mathcal{A}_l(r) P_l(\cos \theta) , \quad (3.33)$$

da cui:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_T &= \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \\ &\left[\sum_{l_1 l'_1} (-i)^{l_1+1} (i)^{l'_1+1} (2l_1+1) (2l'_1+1) \mathcal{A}_{l_1}^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_{l'_1}(r) P_{l_1}(\cos \theta) P_{l'_1}(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l_2 l'_2} (-i)^{l_2+1} (i)^{l'_2+1} (2l_2+1) (2l'_2+1) \mathcal{A}_{l_2}(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_{l'_2}^*(r) P_{l_2}(\cos \theta) P_{l'_2}(\cos \theta) \right] .\end{aligned}$$

Per l'ortogonalità dei polinomi di Legendre, l'integrale su $\cos \theta$ nell'equazione (3.32) implica $l_1 = l'_1$ e $l_2 = l'_2$. Si ha che:

$$\mathcal{A}_l^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l(r) = \frac{1}{r} |\mathcal{A}_l(r)|^2 - \frac{ik}{r^2} \left[1 - |\eta_l|^2 + (-1)^l \left(\eta_l e^{i2kr} - \eta_l^* e^{-i2kr} \right) \right] ,$$

e quindi:

$$\mathcal{A}_l^*(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l(r) - \mathcal{A}_l(r) \frac{d}{dr} \mathcal{A}_l^*(r) = (-i) \frac{2k}{r^2} \left(1 - |\eta_l|^2 \right) .$$

Utilizzando i risultati ottenuti abbiamo:

$$N_a = \frac{\hbar \pi}{mk} \sum_l (2l+1) \left(1 - |\eta_l|^2 \right) . \quad (3.34)$$

La sezione d'urto si ottiene dividendo il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo (3.34), per il flusso delle particelle incidenti. Quest'ultimo viene calcolato utilizzando l'espressione (3.31) della corrente per l'onda incidente:

$$\mathbf{J}_I = \frac{\hbar}{2im} \left(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{\hbar}{2im} 2i\mathbf{k} = \mathbf{v} . \quad (3.35)$$

Quindi la sezione d'urto di reazione è:

$$\sigma_r = \frac{N_a}{|\mathbf{J}_I|} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left(1 - |\eta_l|^2 \right) . \quad (3.36)$$

Il confronto con la sezione d'urto elastica (3.19), viene fatto considerando che in un processo elastico

$$\eta_l = e^{i2\delta_l} ,$$

come si può vedere confrontando la (3.30) con la (3.16), e che

$$\sin^2 \delta_l = |f_l|^2 = \left| \frac{1}{2i}(e^{i2\delta_l} - 1) \right|^2 = \left| \frac{1}{2i}(\eta_l - 1) \right|^2 ,$$

Da queste considerazioni si vede che è possibile riscrivere l'espressione (3.19) come:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left| \frac{1-\eta_l}{2i} \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1-\eta_l|^2 . \quad (3.37)$$

La sezione d'urto totale è data dalla somma delle sezioni d'urto elastica, o di scattering, (3.37) e di reazione (3.36):

$$\sigma_T = \sigma_r + \sigma_{el} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \text{Re } \eta_l) . \quad (3.38)$$

E' da notare che è possibile avere processi di diffusione elastica anche in assenza di processi di diffusione anelastica. Quando $|\eta_l|^2 = 1$ l'eq. (3.36) è nulla, mentre (3.37) è diversa da zero. Non è possibile il contrario, se $|\eta_l|^2 \neq 1$ c'è sempre un contributo alla sezione d'urto elastica. Ad un processo anelastico è sempre associato anche un processo elastico.

3.2.3 Risonanze

Una situazione particolare dei processi di reazione è quella in cui la sezione d'urto presenta un massimo pronunciato ad una particolare energia incidente del proiettile. Questa situazione è chiamata processo di diffusione in risonanza. Consideriamo la situazione di diffusione elastica. Dall'espressione (3.19) si vede che il massimo della sezione d'urto si ha quando:

$$\sin^2 \delta_l = 1 \quad \text{quindi} \quad \delta_l = \frac{\pi}{2} + n\pi , \quad (3.39)$$

dove n è un numero intero. Consideriamo che:

$$f_l = e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \frac{\sin \delta_l}{\exp(-i\delta_l)} = \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l - i \sin \delta_l} = \frac{1}{\cotg(\delta_l) - i} .$$

Chiamiamo ϵ_r l'energia di risonanza, ovvero quella in cui la condizione di risonanza (3.39) è verificata. Facciamo uno sviluppo in serie di Taylor, troncato al primo ordine di $\cotg(\delta_l)$ per un'energia $\epsilon \sim \epsilon_r$:

$$\cotg[\delta_l(\epsilon)] = \cotg[\delta_l(\epsilon_r)] + (\epsilon_r - \epsilon) \left[\frac{d}{d\epsilon} \cotg[\delta_l(\epsilon)] \right]_{\epsilon=\epsilon_r} + \dots = (\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} + \dots ,$$

dove abbiamo considerato che nella situazione di risonanza la cotangente di δ_l è nulla, e abbiamo definito l'ampiezza di risonanza Γ . L'espressione di f_l in zona di risonanza può essere espressa come:

$$f_l(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} - i} = \frac{\Gamma/2}{(\epsilon_r - \epsilon) - i \frac{\Gamma}{2}} .$$

Inserendo le equazioni precedenti nell'espressione (3.19) della sezione d'urto elastica, otteniamo per ogni onda parziale l :

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} , \quad (3.40)$$

espressione nota con il nome di Breit-Wigner. Il massimo valore della sezione d'urto si ha in corrispondenza della risonanza $\epsilon = \epsilon_r$:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) ,$$

e per $\epsilon = \epsilon_r \pm \Gamma/2$ abbiamo $\sigma_l = \sigma_{max}/2$ che indica l'interpretazione fisica dell'ampiezza di risonanza.

L'equazione (3.40) può essere generalizzata in due modi. Il primo per tenere conto dello spin delle particelle interagenti. Se chiamiamo $\mathbf{s}_a$ e $\mathbf{s}_A$ gli spin delle particelle interagenti e $\mathbf{I}$ il momento angolare totale della risonanza abbiamo:

$$\mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_A + \mathbf{l} ,$$

il fattore $2l + 1$ in Eq. (3.40) è sostituito dal fattore:

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} , \quad (3.41)$$

che si riduce a $2l + 1$ per particelle prive di spin.

La seconda generalizzazione dell'espressione (3.40) tiene conto della possibilità che i canali di entrata e di decadimento della risonanza abbiano diverse ampiezze. Il termine Γ^2 al denominatore è quello che tiene in considerazione le diverse ampiezze di decadimento. L'ampiezza totale di decadimento Γ della risonanza è data dalla somma di tutte le ampiezze legate ai singoli canali di decadimento, incluso il canale d'entrata. La vita media è legata all'ampiezza di decadimento dalla relazione

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} ,$$

con $\hbar \sim 6.610^{-22}$ MeV s. L'osservazione di uno specifico canale di formazione della risonanza, o di un canale di decadimento, non modifica la vita media della risonanza. E' una situazione analoga a quella del decadimento radioattivo, in cui anche se si osserva un singolo canale di decadimento, la vita media di decadimento, che è legata all'ampiezza totale, non cambia. Diverso il discorso per il fattore Γ^2 del numeratore, che è legato alla formazione della risonanza e alla probabilità di decadimento in un canale particolare. Nel caso elastico, quello per cui la (3.40) è stata ricavata, i canali di formazione e decadimento sono identici quindi $a + A \rightarrow a + A$, e al numeratore sarà inserito il quadrato dell'ampiezza Γ_{aA} . Nel caso di un processo anelastico, $a + A \rightarrow b + B$, si tiene conto dei diversi canali, d'entrata e di uscita, modificando la (3.40) come

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + (\Gamma/2)^2} . \quad (3.42)$$

3.3 Fusione non risonante di particelle cariche

Consideriamo il caso di due nuclei di carica Z_1 e Z_2 , che interagiscono. Per distanze relative maggiori del raggio di interazione dell'interazione forte, circa 2 fm, solo il potenziale Coulombiano è attivo. Nella Figura 3.2 abbiamo schematizzato il potenziale relativo di questi due nuclei. Abbiamo indicato con R la somma dei raggi dei due nuclei. Nella nostra schematizzazione supponiamo che i due nuclei interagenti siano sfere rigide, e che l'interazione forte si attivi solo quando le due sfere si toccano, quindi quando la distanza tra i centri delle sfere è minore di R . Nella figura il potenziale generato dall'interazione forte è schematizzato con una buca quadrata. Il nostro scopo è quello di calcolare la probabilità di superare la barriera Coulombiana. Vedremo dalle stime

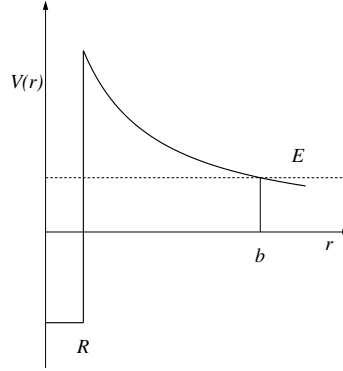


Figura 3.2: Schema del potenziale relativo tra le due particelle che fondono.

delle temperature stellari che i processi di fusione si attivano per valori di energia cinetica relativa inferiore a quella del picco del potenziale. Quindi il processo di fusione avviene per effetto tunnel.

Iniziamo la trattazione chiamando E l'energia cinetica relativa tra i due nuclei che fondono. Nei processi che ci interessano, il valore di questa energia è di qualche MeV, quindi notevolmente inferiore alla massa a riposo dei due nuclei. Quindi possiamo lavorare usando cinematica non relativistica. Chiamiamo m la massa ridotta dei due nuclei, Eq. (3.7) e M la massa totale del sistema. Utilizzando la massa ridotta del sistema, l'energia cinetica relativa tra i due nuclei è:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} . \quad (3.43)$$

Questa equazione definisce b , la distanza in cui il valore dell'energia potenziale eguaglia quello dell'energia cinetica della particella interagente. La descrizione del processo di fusione dei due nuclei, viene ridotta al calcolo della probabilità che una particella di massa ridotta m ha di penetrare il potenziale repulsivo, il cui massimo è:

$$V(R) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} . \quad (3.44)$$

Nel caso ad una dimensione, il coefficiente di trasmissione per una barriera quadrata è:

$$T = \exp \left[-2l \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} \right] , \quad (3.45)$$

dove l è la larghezza della barriera e $V_0 > E$ ne è l'altezza. Possiamo considerare il nostro caso come un insieme continuo di barriere unidimensionali infinitesime, quindi:

$$T = \exp \left[-2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E)} \right] , \quad (3.46)$$

dove gli estremi di integrazione sono definiti dalla condizione $V(r) > E$. Inserendo l'espressione del potenziale, riscriviamo l'esponente come:

$$G = 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right)} = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{b} \left[\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]. \quad (3.47)$$

Il calcolo dell'integrale è sviluppato qui sotto.

Per il calcolo dell'integrale dell'equazione (3.47) facciamo un cambio di variabile:

$$r = b \cos^2 \theta.$$

Gli estremi di integrazione diventano:

$$b \rightarrow \theta_f = 0 \quad e \quad R = b \cos^2 \theta_i \rightarrow \theta_i = \arccos \sqrt{\frac{R}{b}}.$$

Con questo cambio di variabili abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\frac{1}{b \cos^2 \theta} - \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} (-2b \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= -2\sqrt{b} \int_{\theta_i}^0 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \sin^2 \theta d\theta = 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2\sqrt{b} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\theta_i} = 2\sqrt{b} \left[\frac{\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta_i \right] \\ &= \sqrt{b} \left[\theta_i - \cos \theta_i \sqrt{1 - \cos^2 \theta_i} \right], \end{aligned}$$

e sostituendo il valore di θ_i otteniamo il risultato di Eq. (3.47).

Nel limite in cui $b \gg R$ si ha che:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{b} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{E}} \frac{\pi}{2} = \pi\eta, \quad (3.48)$$

dove

$$\eta = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{E}}, \quad (3.49)$$

è detto parametro di Sommerfeld.

La sezione d'urto è proporzionale alla probabilità di transizione. C'è anche una dipendenza da $1/k^2 \sim 1/E$ che emerge da tutta la discussione presentata nel paragrafo 3.2. La sezione d'urto può essere scritta come:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp(-\pi\eta) S(E), \quad (3.50)$$

che definisce il fattore $S(E)$ chiamato **fattore astrofisico S** che contiene tutta l'informazione strettamente legata alla struttura nucleare. Per reazioni non risonanti questo fattore varia molto più lentamente con l'energia di quanto possa variare la sezione d'urto. Per questo motivo il fattore $S(E)$ è utile nell'estrapolare le sezioni d'urto ad energie astrofisiche.

Inserendo l'equazione (3.50) nella (3.4) otteniamo per il tasso di reazione:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{B}{E^{1/2}} \right] dE , \quad (3.51)$$

dove abbiamo definito

$$B = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \pi \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} . \quad (3.52)$$

Il termine nell'esponente legato alla barriera coulombiana diventa molto piccolo a basse energie. Al contrario il termine della distribuzione di Maxwell diventa molto piccolo per energie molto alte. Il massimo della distribuzione di Maxwell è per $E = k_B T$ mentre il massimo del prodotto dell'integrando dell'equazione (3.51) è spostato ad energie più alte.

Per una temperatura stellare T le reazioni nucleari avvengono in una finestra energetica relativamente ristretta attorno ad una energia E_0 in cui il fattore astrofisico è essenzialmente costante. Possiamo quindi fattorizzare il fattore spettroscopico fuori dell'integrale dell'equazione (3.51):

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} S(E_0) \int_0^\infty \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{B}{E^{1/2}} \right] dE . \quad (3.53)$$

Il massimo dell'integrando si ottiene ponendo la derivata prima uguale a zero:

$$E_0 = \left(\frac{1}{2} B k_B T \right)^{2/3} . \quad (3.54)$$

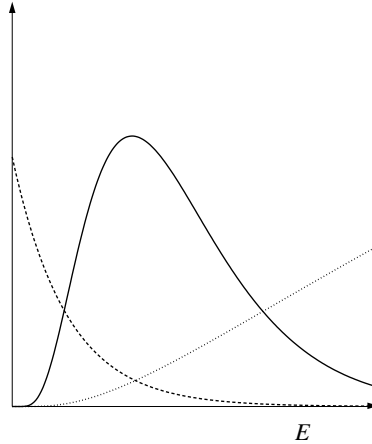


Figura 3.3: Picco di Gamow. La linea tratteggiata indica il termine legato alla distribuzione di Boltzmann dell'energia $\exp(-E/k_B T)$, nell'Eq. (3.53). La linea a punti mostra invece il fattore $\exp(-B/\sqrt{E})$ legato alla probabilità di penetrazione della barriera coulombiana. La linea continua, moltiplicata per un fattore 20, è il prodotto delle altre due curve.

In Figura 3.3 mostriamo l'andamento dell'integrando dell' Eq. (3.53), che ha un picco all'energia (3.54). La distribuzione di Boltzmann dell'energia e la probabilità di penetrazione hanno andamenti opposti. Il loro prodotto ha un picco all'energia E_0 , che è più grande di $k_B T$. Sono i nuclei con questa energia relativa che possono fondere. Quindi nelle stelle la fusione nucleare avviene per quei nuclei che si trovano nella coda della distribuzione di Boltzmann e non per la maggioranza dei nuclei che termalizzano ad energia $k_B T$.

Nella tabella 3.1 mostriamo alcuni valori dell'energia E_0 e dell'integrale,

$$I = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{B}{E^{1/2}} \right] dE , \quad (3.55)$$

in funzione della temperatura, per alcuni processi di fusione che avvengono nelle stelle. La temperatura di $T=15 \cdot 10^6$ K è quella simata all'interno del sole.

	$p + p$		$p + {}^{14}\text{N}$		$\alpha + {}^{12}\text{C}$		${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$	
T	E_0	I	E_0	I	E_0	I	E_0	I
1	0.98	$4.14 \cdot 10^{-21}$	4.37	$3.92 \cdot 10^{-137}$	9.25	-	3.915	-
15	5.91	$4.31 \cdot 10^{-9}$	26.61	$3.88 \cdot 10^{-40}$	56.26	$2.07 \cdot 10^{-109}$	238.16	-
30	9.37	$1.61 \cdot 10^{-7}$	42.24	$5.97 \cdot 10^{-30}$	89.31	$4.05 \cdot 10^{-79}$	378.05	-
1000	97.10	$7.01 \cdot 10^{-3}$	437.49	$5.62 \cdot 10^{-8}$	925.01	$3.98 \cdot 10^{-17}$	3915.62	$2.10 \cdot 10^{-114}$

Tabella 3.1: Valore dell'energia E_0 del massimo, Eq. (3.54) e dell'integrale I , Eq. (3.55), in funzione della temperatura. Le temperature sono espresse in unità di 10^6 K, le energie in MeV, I in MeV^{-2} . Non sono indicati valori inferiori a 10^{-250} .

E' da notare che, per un valore fissato della temperatura, il massimo del picco di Gamow si sposta ad energie più alte all'aumentare della carica, e della massa, dei nuclei che interagiscono. Il tasso di interazione è ovviamente legato all'altezza della barriera coulombiana, e la probabilità di penetrazione aumenta con l'aumentare della temperatura.

Si può notare la grande differenza tra le probabilità legate ai diversi processi di fusione. Quello che quindi avviene nelle stelle è che per una temperatura fissata, di fatto, soltanto un tipo di reazione ha luogo. Quando il combustibile della reazione legata alla barriera coulombiana dal valore inferiore è consumato, allora la stella si contrae fino a raggiungere una temperatura che permette l'innesco di un nuovo tipo di reazione nucleare. Il nuovo processo di combustione nucleare, produce energia che stabilizza la stella evitandone una ulteriore contrazione. I vari tipi di combustibile nucleare e processi di fusione, determinano epoche della vita della stella ben definite. C'è il periodo della combustione dell'idrogeno, quello dell'elio e quello dei nuclei più pesanti.

Abbiamo ottenuto i valori di I , eq. (3.55), ipotizzando che la risonanza sia stretta e il fattore astrofisico non venga coinvolto nell'integrale. Ci sono tecniche che utilizzano uno sviluppo in serie di $S(E)$. Una ipotesi spesso utilizzata è quella di considerare $S(E) = S(0) \exp(-\alpha E)$. Si ha quindi:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} S(0) \int_0^\infty \exp \left[-\alpha E - \frac{E}{k_B T} - \frac{B}{E^{1/2}} \right] dE . \quad (3.56)$$

Normalmente si combinano i primi due termini dell'esponenziale, in modo da definire la temperatura effettiva:

$$-\alpha E - \frac{E}{k_B T} = \frac{E}{k_B T_{eff}} .$$

Prima di terminare questa sessione facciamo qualche considerazione riguardante il ruolo degli elettroni. Nella discussione fatta fino a questo momento abbiamo considerato che il potenziale dei due nuclei che collidono sia quello generato dalle due cariche positive dei nuclei. In laboratorio il proiettile incontra l'atomo in cui si trova il nucleo bersaglio. Quindi il potenziale da noi considerato è visto dal proiettile solo dopo aver penetrato la nube elettronica. Questa correzione è solitamente trascurata nel calcolo della sezione d'urto, perchè le energie di collisione prodotte in laboratorio sono di diverse decine di MeV per nucleone. Questo significa che il proiettile ha energie molto più grandi della correzione del potenziale dovuta alla presenza degli elettroni atomici. Alle energie di interesse stellare, che sono dell'ordine di qualche keV, invece la correzione non è più trascurabile.

Questo discorso è relativo a collisioni di nuclei in laboratorio, fatte ad energie da interno stellare. In realtà la temperatura nel centro delle stelle è tale che tutti gli atomi sono totalmente ionizzati. Quindi, in prima approssimazione, si potrebbe pensare che la correzione di cui stiamo parlando non sia richiesta nella trattazione delle collisioni all'interno delle stelle. Purtroppo, la situazione non è così semplice. Nel centro della stella, a temperature dell'ordine di decine di milioni di K i nuclei sono immersi in un gas di elettroni. La presenza di cariche positive tende comunque a clusterizzare vari elettroni attorno a questo centro di attrazione, creando un effetto di schermatura analogo a quello osservato per le reazioni in laboratorio. Una discussione dettagliata del problema è fatta in [Rol88].

3.4 Reazioni con risonanza

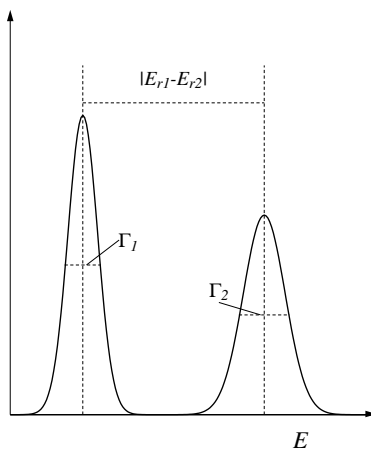


Figura 3.4: Due risonanze isolate. La differenza tra le energie dei picchi è superiore alla somma delle ampiezze.

La trattazione nel paragrafo precedente si è occupata del ruolo della barriera coulombiana nel processo di fusione, senza considerare la presenza di risonanze. Il tasso di reazione è ovviamente modificato quando la sezione d'urto presenta un massimo pronunciato, situazione che in 3.2.3 abbiamo definito come risonanza.

Una risonanza viene definita *stretta*, quando la sua ampiezza Γ è molto più piccola del valore dell'energia del picco E_r . Tanto per avere una stima quantitativa, consideriamo *stretta* una risonanza tale che $\Gamma/E_r < 0.1$. Consideriamo inoltre isolate risonanze che non si sovrappongono. Questo

significa che la distanza tra le due energie di picco è superiore alla somma delle ampiezze (vedi la figura 3.4).

Per la situazione in cui la reazione avviene nella regione di risonanza, il calcolo del tasso di reazione viene fatto inserendo nella (3.4) l'espressione della sezione d'urto di Breit-Wigner (3.42):

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sigma_{BW}(E) E \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) dE , \quad (3.57)$$

dove σ_{BW} indica la sezione d'urto di Breit-Wigner. Se la risonanza è sufficientemente stretta, la variazione dell'energia E dovuta alla distribuzione di Boltzmann, è piccola nell'intervallo sotteso dalla risonanza (vedi Fig. 3.5). Questo permette di considerare costante la parte legata alla distribuzione di Boltzmann. Facendo questa approssimazione, l'espressione (3.57) può essere riscritta come:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} E_r \exp \left(-\frac{E_r}{k_B T} \right) \int_0^\infty \sigma_{BW}(E) dE . \quad (3.58)$$

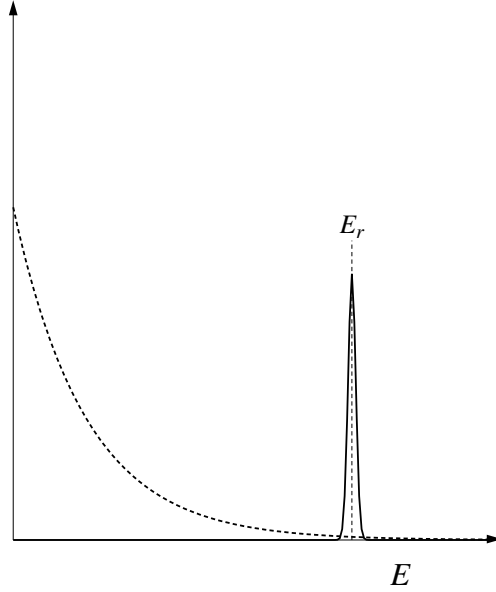


Figura 3.5: Risonanza isolata e stretta. Il rapporto Γ/E_r è minore del 10%. Nella regione della risonanza la distribuzione di Boltzmann delle energie può essere considerata costante.

Sostituendo l'espressione (3.42) abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sigma_{BW}(E) dE &= \frac{\pi}{k^2} g \Gamma_{aA} \Gamma_{bB} \int_0^\infty \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} dE \\ &= \frac{2\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{\Gamma} \arctan \left[\frac{2\tilde{E}}{\Gamma} \right]_0^\infty = \frac{2\pi^2}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{\Gamma} , \end{aligned} \quad (3.59)$$

con $\tilde{E} = E - E_r$ e dove abbiamo fatto l'ipotesi che le ampiezze di risonanza siano essenzialmente indipendenti dall'energia. Il valore della sezione d'urto (3.42) all'energia di risonanza è:

$$\sigma_r = \frac{4\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA}\Gamma_{bB}}{\Gamma^2}$$

quindi la sezione d'urto integrata (3.59) può essere espressa come:

$$\int_0^\infty \sigma_{BW}(E) dE = \frac{\pi}{2} \Gamma \sigma_r, \quad (3.60)$$

e il tasso di reazioni diventa:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} E_r \exp \left(-\frac{E_r}{k_B T} \right) \frac{\pi}{2} \Gamma \sigma_r. \quad (3.61)$$

E' importante far notare come in questo tipo di reazione la posizione della risonanza E_r sia estremamente importante per il valore del tasso di reazione. Per valori di E_r relativamente bassi, il contributo prodotto dalla distribuzione di Boltzmann delle energie aumenta esponenzialmente. La diminuzione delle ampiezze Γ è ordini di grandezza inferiore a questo aumento. Nei processi di fusione stellare le risonanze isolate di bassa energia, dell'ordine del keV, sono molto più importanti di quelle che appaiono ad energie di qualche MeV.

Quando le risonanze hanno ampiezze confrontabili con l'energia di risonanza, $\Gamma/E_r > 0.1$, si parla di risonanze ampie. In questo caso l'ipotesi che le ampiezze Γ siano indipendenti dall'energia, utilizzata nei calcoli precedenti, non è più ben fondata. L'espressione del tasso di reazione è data dalla (3.58) in cui si deve conoscere la dipendenza della sezione d'urto di Breit-Wigner, ovvero la dipendenza esplicita delle ampiezze Γ dall'energia E . Normalmente questa dipendenza dall'energia è ottenuta analizzando processi di reazione tra nuclei pesanti, ottenuti in laboratorio. L'attività di laboratorio per lo studio di processi astrofisici, è molto complessa perchè bisogna riprodurre fenomeni che avvengono ad energie estremamente basse per gli acceleratori di laboratorio. Inoltre la barriera coulombiana abbassa enormemente la probabilità di reazione, e quindi le reazioni che si vogliono studiare sono molto più rare di quelle che normalmente avvengono alle tipiche energie, dell'ordine di qualche MeV, dei tradizionali laboratori di fisica nucleare. Per questo motivo i laboratori di fisica nucleare per l'astrofisica, sviluppano, ed utilizzano, tecnologie molto specifiche, [Rol88].

Capitolo 4

Reazioni nucleari nelle stelle della sequenza principale

In questo capitolo tratteremo con qualche dettaglio le reazioni nucleari che avvengono all'interno delle stelle, e permettono loro di brillare per miliardi di anni. Più specificatamente, in questo capitolo tratteremo della combustione dell'idrogeno, che è la reazione più importante nelle stelle appartenenti alla sequenza principale. Nel prossimo capitolo ci soffermeremo sulla combustione dell'elio, che si innesca quando il combustibile di idrogeno è esaurito. Questo processo riguarda le giganti rosse. La struttura delle stelle che si trovano in successive fasi evolutive, come le nane bianche o le stelle di neutroni, non dipende da specifiche reazioni nucleari.

La combustione dell'idrogeno è responsabile della struttura delle stelle che si trovano nella sequenza principale. Globalmente questo processo consiste in una catena di reazioni il cui risultato finale è quello di trasformare quattro protoni in un nucleo di elio, più due positroni e due neutrini elettronici:



La sequenza presentata considera a sinistra lo stato iniziale del sistema adronico e a destra il risultato finale. In realtà il risultato a destra è ottenuto attraverso diverse serie di reazioni nucleari che si susseguono ordinatamente. Queste serie di reazioni sono classificate come catene di reazione. Per quanto riguarda la reazione (4.1) si identificano due catene di reazioni, la *pp*, che prende il nome dalla prima reazione della catena, e la catena *CNO*, da Carbonio, Azoto e Ossigeno, in cui questi elementi pesanti fungono da catalizzatori nella produzione di elio. Il Q valore della reazione (4.1) è di 26.73 MeV, ma non sempre tutta questa energia è resa disponibile alla stella. Questo dipende dalla catena di reazioni attivate.

4.1 La catena *pp*

La catena *pp* è la più efficace a temperature dell'ordine di 10^7K ed è quella che interessa maggiormente il sole. I due protoni possono fondersi e formare un deutone, solo se le loro distanze sono dell'ordine di qualche fm. Il loro avvicinamento è ostacolato dalla repulsione coulombiana, ma il processo di fusione può avvenire per effetto tunnel, come descritto nella sezione 3.3. L'energia necessaria per innescare la reazione nucleare è fornita dalla contrazione gravitazionale. Durante il processo di contrazione, la temperatura del gas cresce fino a quando le energie cinetiche dei protoni non raggiungono valori sufficienti per l'innescare delle reazioni nucleari. Le reazioni producono energia che tende a far espandere il gas, e questo controbilancia la contrazione gravitazionale. Si

raggiunge quindi uno stato di equilibrio della stella, che mantiene un volume costante ed emette energia con potenza costante, soprattutto sottoforma di radiazione elettromagnetica, ma anche di neutrini.

Nella figura 4.1 sono indicate le reazioni che fanno parte del ciclo pp . Tutte le varie diramazioni terminano con la produzione di ^4He . Analizzeremo nel seguito in dettaglio le varie reazioni della catena.

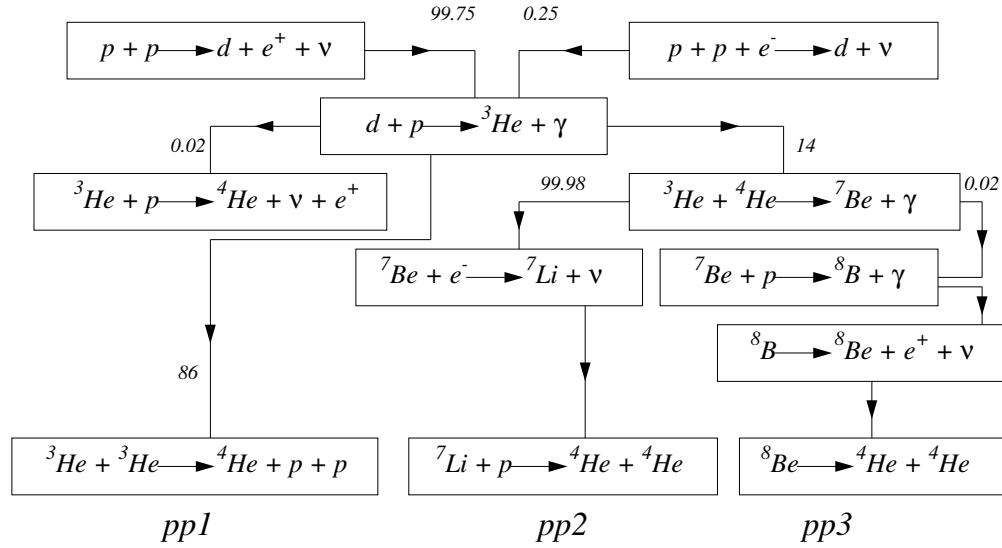


Figura 4.1: Catena pp . I numeri accanto ai singoli rami indicano le probabilità percentuali delle reazioni.

4.1.1 Formazione del deutone

Il primo passo della catena di reazioni pp consiste nella formazione del deutone:

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e , \quad (4.2)$$

con un Q valore di 1.44 MeV. Il processo (4.2) è mediato dall'interazione debole che cambia un protone in un neutrone. Ricordiamo che solo l'interazione debole può cambiare il sapore dei quark.

Secondo la regola d'oro di Fermi [Mes61], la probabilità di transizione per unità di tempo, cioè il tasso di reazione, è, [Seg81]:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \rho(E) , \quad (4.3)$$

dove abbiamo indicato con $\rho(E)$ la densità degli stati finali del positrone e del neutrino, e con H_{if} l'hamiltoniana di interazione.

Il processo di reazione è descritto dai diagrammi della figura (4.2). Il diagramma A indica che il processo (4.2) prevede la trasformazione di un protone in un neutrone, attraverso lo scambio di un bosone W con la coppia neutrino e positrone. L'hamiltoniana di interazione, che descrive

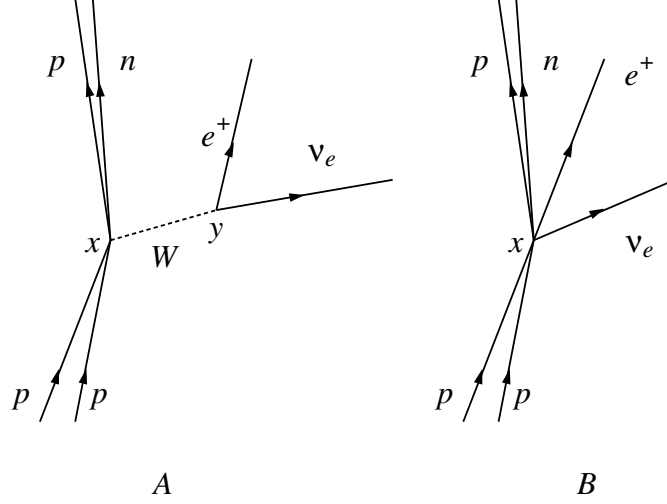


Figura 4.2: Diagrammi che schematizzano la formazione del deutone.

questo processo di transizione, può essere espressa come:

$$H_{if} = \int d^4x d^4y \Psi_d^\dagger(x) \psi_e^\dagger(y) \psi_{\nu_e}^\dagger(y) P(x, y) \Psi_{pp}(x) , \quad (4.4)$$

dove $P(x, y)$ è il propagatore che descrive lo scambio del W . Nel vertice x c'è la transizione adronica tra lo stato iniziale composto da due protoni Ψ_{pp} allo stato finale, il deutone, Ψ_d . In y abbiamo il vertice leptonic, che appare solo nello stato finale, ed è composto da positrone ψ_e e neutrino ψ_{ν_e} . Dato che la massa del bosone W , 81 GeV, è molto più grande delle energie in gioco, che sono al massimo di pochi MeV, il propagatore $P(x, y)$ è ben descritto, come nella teoria di Fermi, da un'interazione puntiforme, (vedi il diagramma B della figura). Utilizzando tradizionali tecniche di teoria dei campi [Bjo64] la parte di integrazione temporale si collega alla conservazione dell'energia e l'hamiltoniana di interazione (4.4) può essere descritta in termine di integrazione delle coordinate spaziali:

$$H_{if} = \int d^3x d^3y \Psi_d^\dagger(\mathbf{x}) \psi_e^\dagger(\mathbf{y}) \psi_{\nu_e}^\dagger(\mathbf{y}) g \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Psi_{pp}(\mathbf{x}) , \quad (4.5)$$

dove $P(x, y) = g \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e g è la costante di accoppiamento debole.

Descriviamo il processo nel sistema del centro di massa dello stato iniziale dei protoni. In questo caso Ψ_{pp} descrive il moto relativo dei due protoni. Trascurando l'interazione coulombiana, possiamo descrivere questa funzione d'onda relativa in termini di onda piana:

$$\Psi_{pp}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \quad (4.6)$$

dove $\mathbf{k}$ è l'impulso relativo tra i due protoni. Dato che $|\mathbf{k}| = \sqrt{2m_p c^2 E} / \hbar c$, e le energie in gioco sono molto inferiori alla massa del protone m_p , possiamo considerare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. Quindi abbiamo:

$$\Psi_{pp}(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{\sqrt{V}} . \quad (4.7)$$

Per quanto riguarda lo stato finale, le funzioni d'onda del positrone e del neutrino possono essere descritte come onde piane, trascurando l'interazione coulombiana attiva tra elettrone e deutone:

$$\psi_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \psi_{\nu_e}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_{\nu_e} \cdot \mathbf{r}} . \quad (4.8)$$

Anche in questo caso, considerando ragionevole $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, utilizziamo l'approssimazione:

$$\psi_e(\mathbf{x}) = \psi_{\nu_e}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} . \quad (4.9)$$

Consideriamo per la funzione d'onda del deutone soltanto la parte che descrive il moto relativo dei due nucleoni, dato che le energie in gioco sono molto più piccole della massa del deutone. La funzione d'onda del deutone è piuttosto complicata, perchè comprende termini con momento angolare orbitale $L = 0$ e anche termini con $L = 2$ generati dalla parte tensoriale dell'interazione nucleone-nucleone. Per i nostri scopi però, possiamo utilizzare un'espressione approssimata ([Eis76], cap. 2.1), che si ottiene considerando solo la parte scalare del potenziale nucleare e approssimandola ad una buca quadrata:

$$\psi_d(r) = \sqrt{\frac{2K_d}{4\pi}} \frac{e^{-K_d r}}{r} , \quad (4.10)$$

dove abbiamo definito

$$\frac{1}{K_d} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m_p B(2,1)}} \simeq 4.3 \text{ fm} , \quad (4.11)$$

e dove $B(2,1) = 2.2 \text{ MeV}$, è l'energia di legame del deutone, e m_p è la massa del protone.

La funzione d'onda del deutone

Indichiamo l'equazione di Schrödinger che descrive il deutone come

$$\left[\frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} + \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m_p} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E_T \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (4.12)$$

dove $\mathbf{p}_{p,n}$ indica, separatamente, gli impulsi del protone e del neutrone, e ho già fatto l'ipotesi che il potenziale sia puramente scalare e centrale. Utilizzando la solita definizione delle variabili delle coordinate del centro di massa e del moto relativo

$$M = m_p + m_n \quad ; \quad m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_p \mathbf{r}_1 + m_n \mathbf{r}_2}{m_p + m_n} \quad ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_n \quad ; \quad \mathbf{p} = \frac{m_n \mathbf{p}_n - m_p \mathbf{p}_p}{m_p + m_n} \quad (4.15)$$

è possibile riscrivere l'hamiltoniana dell'equazione di Schrödinger come somma di una parte che descrive il moto, libero, del centro di massa, la cui funzione d'onda è

$$\Psi(\mathbf{R})_{\text{CM}} = e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \simeq 1 \quad (4.16)$$

e un termine che descrive il moto relativo dei due nucleoni

$$\left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (4.17)$$

dove $r = |\mathbf{r}|$. Ho considerato normalizzata ad 1 la funzione d'onda del moto relativo, ed inserirò delle costanti di normalizzazione nella parte della funzione d'onda descrivente il moto relativo, in modo che la funzione d'onda globale sia correttamente normalizzata ad 1. Definendo

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{R}_l(r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (4.18)$$

dove $Y_{l,m}$ è l'armonica sferica. Il termine con energia inferiore è quello con $l = 0$. Considero questo caso e definisco $\mathcal{R}_0(r) = u(r)/r$. L'equazione di Schrödinger che descrive il moto relativo diventa

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E \right] u(r) = 0 \quad (4.19)$$

o

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V(r) - E] \right\} u(r) = 0 \quad (4.20)$$

Le condizioni al contorno sono

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0 \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0 \quad (4.21)$$

Per semplicità considero un potenziale tipo buca quadrata

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq R_0 \\ 0 & r \geq R_0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Nella zona per $r \leq R_0$, che chiamerò zona I, l'equazione di Schrödinger diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} u_I(r) = -\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) u_I(r) \quad (4.23)$$

Si hanno soluzioni oscillanti quando $|E| < V_0$. Definendo

$$\alpha = \left[\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

la funzione d'onda nella zona I, può essere scritta come

$$u_I(r) = A \sin \alpha r + B \cos \beta r \quad (4.25)$$

dove A e B sono costanti da determinare. Nella zona II, per $r \geq R_0$ si ha

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{II}(r) = \frac{2m}{\hbar^2} |E| u_{II}(r) \quad (4.26)$$

e, definendo,

$$\beta = \left[\frac{2m}{\hbar^2} (|E|) \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

si ha

$$u_{II}(r) = C e^{-\beta r} + D e^{\beta r} \quad (4.28)$$

anche in questo caso, C e D sono costanti da definire. Le condizioni al contorno implicano che $B = D = 0$. Calcoliamo le derivate logaritmiche delle due soluzioni

$$\frac{u'_I(r)}{u_I(r)} = \frac{A \alpha \cos(\alpha r)}{A \sin(\alpha r)} \quad ; \quad \frac{u'_{II}(r)}{u_{II}(r)} = \frac{-C \beta e^{-\beta r}}{C e^{-\beta r}} \quad (4.29)$$

ed imponiamo la loro uguaglianza nel punto $r = R_0$

$$\left(\frac{u'_I(r)}{u_I(r)} \right)_{r=R_0} = \left(\frac{u'_{II}(r)}{u_{II}(r)} \right)_{r=R_0} = \alpha \cot(\alpha R_0) = -\beta \quad (4.30)$$

che implica

$$\cotg\left(\frac{R_0}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - |E|)}\right) = -\sqrt{\frac{|E|}{V_0 - |E|}} \quad (4.31)$$

Le costanti A e C sono collegate dall'uguaglianza delle soluzioni nel punto di raccordo

$$A = C \frac{e^{-\beta R_0}}{\sin \alpha R_0} \quad (4.32)$$

Il valore di C viene definito dalla normalizzazione.

Possiamo considerare che R_0 sia molto più piccolo delle distanze tipiche alle quali nel processo di fusione avviene, quindi possiamo considerare solo la soluzione nella zona II, e normalizzando abbiamo

$$1 = C^2 \int d^3r \left| \frac{e^{-\beta r}}{r} \right|^2 = C^2 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-2\beta r}}{r^2} = C^2 \frac{4\pi}{-2\beta} [e^{-2\beta r}]_0^\infty = C^2 \frac{4\pi}{2\beta} \quad (4.33)$$

Inserendo $|E| = B(2, 1) = 2.22 \text{ MeV}$, e usando $m = 1/2 m_p$ otteniamo il valore di K_d dell'equazione (4.11).

Inserendo nell'equazione (4.5) tutte le parti calcolate sopra, otteniamo:

$$|H_{if}|^2 = \left| \frac{g}{V^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2K_d}{4\pi}} \frac{e^{-K_d r}}{r} d^3r \right|^2 = \left| \frac{g}{V^{3/2}} \sqrt{\frac{2K_d}{4\pi}} \frac{4\pi}{K_d^2} \right|^2 = \frac{g^2}{V^3} \frac{8\pi}{K_d^3} . \quad (4.34)$$

L'energia massima disponibile per l'elettrone ed il neutrino è $E_{\max} = 2m_p - m_d = 0.93 \text{ MeV}$. Per quanto riguarda il calcolo della densità degli stati finali abbiamo che:

$$\begin{aligned} dN_e dN_{\nu_e} &= \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 dp_e \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_{\nu_e}^2 dp_{\nu_e} \\ &= \left[\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 p_e^2 dp_e (E_{\max} - \epsilon_e)^2 \frac{1}{c^3} d(E_{\max} - \epsilon_e) , \end{aligned} \quad (4.35)$$

dove, supponendo che sia nulla la massa del neutrino, abbiamo utilizzato:

$$p_{\nu_e} \simeq \epsilon_{\nu_e}/c = (E_{\max} - \epsilon_e)/c .$$

La densità degli stati è:

$$\rho(E_{\max}) = \frac{d^2 N}{dp_e d(E_{\max} - \epsilon_e)} = \left[\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 p_e^2 (E_{\max} - \epsilon_e)^2 \frac{1}{c^3} , \quad (4.36)$$

e quindi la probabilità di transizione per unità di tempo (4.3) risulta essere:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{g^2}{V^3} \frac{8\pi}{K_d^3} \left[\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 p_e^2 \frac{(E_{\max} - \epsilon_e)^2}{c^3} . \quad (4.37)$$

Questa relazione può essere facilmente integrata numericamente. Per ottenere ordini di grandezza semplifichiamo l'espressione ipotizzando trascurabile la massa a riposo dell'elettrone in modo che $p_e^2 c^2 = \epsilon_e^2$. Questa ipotesi non è molto realistica dato il valore di $E_{\max}$. In ogni caso, così facendo otteniamo:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{p_{\max}} \frac{dw}{dp_e} dp_e = \frac{4g^2}{\pi^2 K_d^3 \hbar^7 c^3} \frac{1}{V} \int_0^{p_{\max}} (E_{\max} - \epsilon_e)^2 p_e^2 dp_e \\ &= \frac{4g^2}{\pi^2 K_d^3 \hbar^7 c^6} \frac{1}{V} \int_0^{E_{\max}} (E_{\max} - \epsilon_e)^2 \epsilon_e^2 d\epsilon_e = \frac{1}{V} \frac{4g^2}{\pi^2 K_d^3 \hbar^7 c^6} \frac{E_{\max}^5}{30} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Prima di inserire i valori numerici nell'espressione precedente, facciamo alcune considerazioni riguardanti i momenti angolari coinvolti nella transizione. L'energia relativa dei due protoni è dell'ordine del keV, quindi piccola rispetto alla loro massa. I due protoni si muovono essenzialmente in onda relativa s , cioè con momento angolare relativo nullo, e per questo motivo abbiamo fatto l'approssimazione (4.7). Dato che sono due fermioni identici la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica sotto lo scambio delle due particelle. La parità della parte radiale della funzione d'onda, è legata alla parità dell'armonica sferica $(-1)^L$ dove L è il momento angolare orbitale. Dato che nel nostro caso $L = 0$, la parte radiale della funzione d'onda ha parità positiva. Questo implica che la parte di spin della funzione d'onda deve essere antisimmetrica, quindi il sistema ha spin totale $S = 0$.

Dopo la reazione, il sistema adronico è formato dal deutone, stato legato di un protone ed un neutrone, principalmente con momento angolare $L = 0$, con un contributo del 4% circa di $L = 2$. Il momento angolare totale è 1, quindi lo spin totale è $S = 1$. La transizione debole con $L = 0$ che trasforma $S = 0$ in $S = 1$ è detta di Gamow-Teller. In generale, sono dette transizioni di Gamow-Teller quelle caratterizzate dal cambio di un'unità di spin, $\Delta S = 1$, mentre sono dette di Fermi quelle in cui non c'è cambio di spin $\Delta S = 0$. Empiricamente si trova che, per gli adroni, la costante di accoppiamento per le transizioni di Gamow-Teller, g_{GT} , è diversa da quella delle transizioni di Fermi g_F [Bla62, Seg81, Ben00].

I valori di g_{GT} e g_F sono stati misurati con accuratezza nel decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e .$$

La differenza tra i valori di g_{GT} e g_F è legata al fatto che i nucleoni hanno struttura interna, e al fatto che, mentre la parte vettoriale della corrente debole è conservata, non lo è la parte vettor-assiale. Una trattazione dettagliata del problema va al di là degli scopi di queste note. Cercheremo comunque di presentare le idee di base.

La struttura della corrente debole è di tipo $V - A$ (vettor assiale)

$$J_w = g\gamma_\mu(1 - c_A\gamma_5) ,$$

dove con γ indichiamo le solite matrici 4x4 utilizzate nell'equazione di Dirac, e g è la costante universale dell'interazione debole. Per leptoni e quark $c_A = 1$, ma per i nucleoni si ha $c_A \simeq 1.25$.

Il termine vettoriale dell'interazione debole, quello legato a γ_μ è responsabile per le transizioni di Fermi, mentre il termine vettor assiale $\gamma_\mu\gamma_5$ produce le transizioni Gamow-Teller.

Le correnti elettromagnetiche hanno solo termini vettoriali. È un dato empirico che la carica elettrica del protone è identica, in valore assoluto, alla carica dell'elettrone. Questo fatto è sorprendente considerato che il protone è composto da quark che interagiscono scambiandosi gluoni. L'interazione forte non modifica la corrente elettromagnetica del protone. Questo fatto è legato alla conservazione della corrente elettromagnetica.

In analogia con l'interazione elettromagnetica anche la parte vettoriale dell'interazione debole è conservata, ma non la parte vettor assiale, che è modificata dall'interazione forte che tiene legati i quark nel nucleone. In realtà la violazione della corrente vettor-assiale non è molto grande, tanto che si parla di corrente assiale parzialmente conservata (Partially Conserved Axial Current PCAC). Più accurate descrizioni del problema si trovano in [Mor87, Bha88, Gro90].

Sostituiamo nella (4.38) i valori numerici

$$g_{GT} = 1.12 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3$$

$$\begin{aligned} K_d &= 0.23 \text{ fm}^{-1} \\ E_{\max} &= 0.93 \text{ MeV} \\ \hbar &= 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} , \end{aligned} \quad (4.39)$$

consideriamo un volume unitario $V = 1 \text{ fm}^3$, e otteniamo

$$w = 2.49 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1} .$$

Questa stima è leggermente più grande, di un fattore 2.5, rispetto al valore che si otterrebbe considerando anche la massa dell'elettrone:

$$w = 10^{-1} \text{ s}^{-1} .$$

La probabilità di attraversamento della barriera, vedi l'eq. (3.45), deve essere mediata dalla distribuzione di energie di Maxwell

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \int T(E) \phi(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi} (k_B T)^{3/2}} \int \sqrt{E} \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{B}{E^{1/2}} \right] dE , \quad (4.40)$$

dove B è stato definito in Eq. (3.52). Per una temperatura di $T = 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$, abbiamo che:

$$\langle \mathcal{T} \rangle \simeq 2 \cdot 10^{-5} .$$

Stimiamo la luminosità del sole per questa temperatura, calcolando il numero di reazioni di fusione che producono deutoni. Il numero di queste reazioni per unità di tempo è dato dal prodotto di w e di $\langle \mathcal{T} \rangle$, quindi, considerando un volume di un fm^3 , abbiamo:

$$w \langle \mathcal{T} \rangle = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1} .$$

Il numero delle coppie di protoni che possono combinarsi è dato da $N(N-1)/2 \simeq N^2/2$ dove N è il numero di protoni contenuto in un volume V . Quindi la densità delle coppie è:

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{V} = \frac{1}{2} V n^2 ,$$

dove $n = N/V$ è la densità di numero di protoni. La velocità di produzione di deutoni è

$$\frac{dN_d}{dt} = \frac{1}{2} V n^2 w \langle \mathcal{T} \rangle . \quad (4.41)$$

Supponendo che il volume solare interessato ai fenomeni termonucleari sia dato da una sfera di raggio $1/4$ del raggio solare ossia un volume di

$$V = 22 \cdot 10^{24} \text{ m}^3 .$$

La densità media del numero di protoni è data dal rapporto tra la densità media della materia solare nella regione centrale e la massa del protone

$$\bar{n} = 6.2 \cdot 10^{31} / \text{m}^3 ,$$

e quindi il numero di protoni nel volume considerato è

$$N = \bar{n} V = 1.36 \cdot 10^{57} ,$$

quindi il tasso delle reazioni di produzione di deutoni è:

$$\frac{dN_d}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(1.36)^2 10^{114}}{22 10^{24}} 2 10^{-6} 10^{-45} \text{ s}^{-1} = 8.4 10^{37} \text{ s}^{-1} .$$

Il fattore 10^{-45} è dato dal passaggio dalle unità m^{-3} alle unità fm^{-3} . L'energia liberata da un processo di produzione di ${}^4\text{He}$ è al massimo 26.72 MeV di energia. Dato che per formare un ${}^4\text{He}$ ci vogliono due deutoni, ottengo l'energia liberata in un secondo moltiplicando questa energia per 1/2 del tasso di produzione del deutone calcolato sopra. Quindi l'energia liberata in un secondo è

$$L_{\odot} = 13.4 \frac{dN_d}{dt} \simeq 10^{39} \text{ MeV/s} .$$

Il valore calcolato è vicino a quello osservato ($2.4 10^{39} \text{ MeV/s}$).

Possiamo stimare l'energia totale che il sole può liberare utilizzando questo tipo di processo. Ipotizzando che tutta la massa del sole sia disponibile per la fusione dell'idrogeno, l'energia liberata è:

$$E_{\odot} = \frac{M_{\odot}}{4m_p} 26.72 \text{ MeV} \simeq \frac{2 10^{30} \text{ kg}}{4 1.67 10^{-27} \text{ kg}} 26.72 \text{ MeV} \simeq 8 10^{57} \text{ MeV} .$$

La vita del sole è stimata dividendo l'energia totale da erogare per il tasso di emissione, la luminosità:

$$t = \frac{E_{\odot}}{L_{\odot}} = \frac{8 10^{57} \text{ MeV}}{10^{39} \text{ MeV/s}} \simeq 3.3 10^{18} \text{ s} = 10^{11} \text{ y} .$$

Questa stima è circa 20 volte più grande di quella che è stimata essere l'attuale età del sole, circa 5 miliardi di anni. In realtà la combustione dell'idrogeno avviene solo all'interno della stella e coinvolge soltanto il 10% circa della massa totale dell'idrogeno. Quindi si stima che la vita del sole nel suo attuale stato fisico, debba essere dell'ordine di 10^{10} anni circa. Il sole è una stella che ha già trascorso metà della sua vita nella fase di combustione dell'idrogeno.

La sezione d'urto del processo si ottiene dividendo l'eq. (4.3) per il flusso, la velocità delle particelle incidenti nel nostro caso, e moltiplicandola per il volume di interazione, che nel nostro caso è 1 fm^3 . La velocità delle particelle incidenti può essere calcolata come:

$$v = \sqrt{2E/m_p} ,$$

e, ipotizzando un'energia di collisione di 1 MeV abbiamo che:

$$v = 1.4 10^{22} \text{ fm/s} ,$$

e quindi:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{w \langle T \rangle}{v} \text{ fm}^3 \simeq \frac{10^{-6} \text{ s}^{-1}}{1.4 10^{22} \text{ fm/s}} \text{ fm}^3 \simeq 7 10^{-30} \text{ fm}^2 .$$

Questa è una stima grossolana, calcoli più accurati forniscono sezioni d'urto dell'ordine di 10^{-21} fm^2 . Queste sezioni d'urto sono troppo piccole per essere studiate in laboratorio con le attuali tecniche. Considerando fasci di protoni con corrente di 1 mA, e un bersaglio di idrogeno abbastanza spesso ($10^{27} \text{ atomi m}^{-2}$) si stima che avvenga una interazione ogni 10^6 anni [Rol88]. A meno di un grosso sviluppo delle tecniche sperimentali che possano permettere l'utilizzazione di fasci di protoni con correnti di kA, o addirittura MA, le informazioni che si hanno su questi processi sono puramente teoriche. Vale la pena di ricordare comunque la grande affidabilità delle nostre

conoscenze della fisica nucleare dei sistemi a pochi corpi, che permettono di descrivere le proprietà del deutone e delle sezioni d'urto elastiche tra due nucleoni con la precisione di poche parti su cento. Questo dà grande affidabilità ai valori delle sezioni d'urto calcolate.

Nella figura 4.1 è indicata una reazione alternativa alla (4.2):

$$p + p + e^- \rightarrow d + \nu_e , \quad (4.42)$$

che sintetizza il deuterio. Bisogna ricordare che il gas all'interno della stella è fortemente ionizzato. Quindi può essere considerato come una miscela di protoni ed elettroni. In questo caso la probabilità che un protone ha di incontrare un altro protone è simile a quella di incontrare un elettrone. Quindi dal punto di vista probabilistico la (4.2) e la (4.42) sono equiprobabili. In realtà il valore della sezione d'urto (4.42) è più piccolo di 4 ordini di grandezza rispetto a quello della reazione $p + p$. La reazione (4.42), detta *PEP*, è praticamente irrilevante dal punto di vista della produzione energetica nel processo di combustione dell'idrogeno. E' comunque interessante dal punto di vista della rivelazione dei neutrini, dato che produce neutrini monoenergetici con energia di 1.44 MeV.

4.1.2 Il ciclo pp1

La fusione dell'idrogeno produce deuterio. Il deuterio viene bruciato nelle stelle utilizzando le reazioni presentate nella Tab. 4.1. In questa tabella abbiamo indicato le reazioni nucleari con la simbologia

$$a + b \rightarrow \alpha + \beta \equiv b(a, \beta)\alpha .$$

Nella tabella presentiamo, accanto alla reazione, il Q -valore e anche il fattore astrofisico $S(0)$ definito nell'equazione (3.50).

	Reazione	Q	$S(0)$
I	$d(p, \gamma)^3\text{He}$	5.494	$0.25 \cdot 10^{-3}$
II	$d(d, \gamma)^4\text{He}$	23.847	$0.03 \cdot 10^{-3}$
III	$d(d, p)^3\text{H}$	4.033	39
IV	$d(d, n)^3\text{He}$	3.269	37
V	$d(^3\text{He}, p)^4\text{He}$	18.354	6240
VI	$d(^3\text{He}, \gamma)^5\text{Li}$	16.388	0.3
VII	$d(^4\text{He}, \gamma)^6\text{Li}$	1.472	$\leq 0.03 \cdot 10^{-3}$

Tabella 4.1: Reazioni di combustione del deuterio. I Q -valori sono espressi in MeV, ed i fattori astrofisici $S(0)$ in $\text{keV b} = \text{keV} \cdot 10^{-2} \text{ fm}^2$ (da [Rol88]).

Il tasso totale di reazione è dato dal prodotto del tasso di reazione per la coppia di particelle che reagiscono $\langle \sigma v \rangle_{12}$ per il numero delle particelle che possono partecipare alla reazione.

$$r_{12} = \frac{N_1 N_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle_{12} .$$

Nonostante il valore di $S(0)$ sia relativamente piccolo, la reazione più frequente all'interno delle stelle è la I

$$p + d \rightarrow \gamma + ^3\text{He} ,$$

per la grande abbondanza di protoni, rispetto alla presenza degli altri nuclei coinvolti nelle altre reazioni. Definendo con H e D le abbondanze relative di idrogeno e deuterio, la dipendenza dal tempo dell'abbondanza di deuterio è data dall'equazione:

$$\frac{dD}{dt} = r_{pp} - r_{pd} = \frac{1}{2} H^2 <\sigma v>_{pp} - HD <\sigma v>_{pd} \quad . \quad (4.43)$$

Il tasso di presenza di deuterio è dato dalla differenza tra il tasso di produzione e quello di combustione. La reazione I avviene tramite interazione elettromagnetica, che è notevolmente più intensa dell'interazione debole, responsabile del processo di produzione del deuterio. Questo indica che la reazione I avviene molto più velocemente della reazione di produzione del deuterio. Abbiamo visto che la vita di un protone all'interno del sole è dell'ordine di 10^{10} anni. La stima della vita media del deutone per il processo I, è di circa 1.5 s. Ovviamente la condizione di equilibrio della reazione I, è legata alla reazione pp . Le altre reazioni mostrate nella tabella 4.1 avvengono raramente, in confronto alla I, per la bassa numerosità degli elementi che dovrebbero reagire.

	Reazione	Q	$S(0)$
I	${}^3\text{He}(d, \gamma){}^5\text{Li}$	16.388	0.3
II	${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$	18.354	6240
III	${}^3\text{He}({}^3\text{He}, \gamma){}^6\text{Be}$	11.497	0.8
IV	${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$	12.860	5500
V	${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$	11.497	0.8

Tabella 4.2: Reazioni di combustione di ${}^3\text{He}$. I Q -valori sono espressi in MeV, ed i fattori astrofisici $S(0)$ in $\text{keV b} = \text{keV } 10^{-2} \text{ fm}^2$ (da [Rol88]).

La combustione del deuterio produce principalmente ${}^3\text{He}$ che a sua volta viene consumato secondo le reazioni mostrate in tabella 4.2. Le reazioni II e IV hanno i fattori astrofisici maggiori e ci si potrebbe aspettare che entrambi contribuiscano alla produzione dell' ${}^4\text{He}$. In realtà la reazione II è di scarsa importanza poichè il deuterio prodotto dalla reazione pp è immediatamente consumato e quindi la sua abbondanza all'interno della stella è relativamente bassa. La reazione IV è relativamente lenta perchè la barriera coulombiana da superare è piuttosto alta. In ogni caso è la reazione IV quella che chiude la catena di reazioni chiamata ciclo $pp1$ (vedi Fig. 4.1).

Il rapporto tra le abbondanze relative di deuterio e idrogeno che risultano dalla nucleosintesi sono $(D/H) \simeq 10^{-17}, 10^{-18}$. Questo valore è in palese contrasto con quello osservato nel sistema solare 10^{-4} , e in generale nella galassia 10^{-5} . E' evidente che il deuterio che si trova nello spazio interstellare ha origine diversa, cosmogenica, rispetto a quello prodotto all'interno delle stelle (vedi il capitolo 9.1).

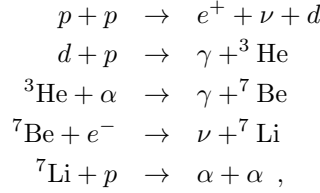
4.1.3 I cicli $pp2$ e $pp3$

Abbiamo discusso in dettaglio la reazione $p(p, e^+ \nu)d$ di formazione del deuterio e la $d(p, \gamma){}^3\text{He}$ di combustione del deuterio, che forma il nucleo di ${}^3\text{He}$. Per l'86% dei casi il nucleo ${}^3\text{He}$ si fonde con un altro nucleo di ${}^3\text{He}$ producendo ${}^4\text{He}$ e due protoni, e questo conclude il ciclo $pp1$. Negli altri casi si ha, la reazione rara

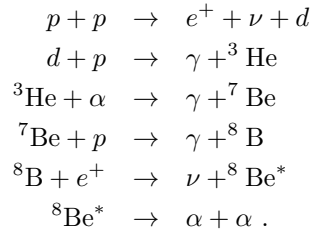
$${}^3\text{He}(p, e^+, \nu){}^4\text{He} \quad ,$$

inibita dalla barriera coulombiana, ma soprattutto dal fatto di essere indotta dall'interazione debole, e le sequenze di reazioni nucleari che formano il ciclo $pp2$ e $pp3$. Globalmente questi cicli sono

formati, per ciclo $pp2$ dalle reazioni



e per il ciclo $pp3$, e dalle reazioni



Tutte le catene pp implicano la conversione di quattro protoni in un nucleo di ${}^4\text{He}$. In tutte e tre le catene l'energia prodotta è la stessa $Q=26.73$ MeV. In realtà non tutta questa energia può essere utilizzata per stabilire l'equilibrio termo-idrodinamico della stella. Parte di questa energia viene persa perché i neutrini prodotti escono dalla stella. Il calcolo dell'energia media dei neutrini che sfuggono alla stella produce i risultati mostrati nella Tab. 4.3, che mostrano come il ciclo $pp1$ sia quello più importante anche dal punto di vista del Q valore effettivo. In generale l'energia persa per emissione di neutrini è dell'ordine del 1% di tutta l'energia prodotta dalla stella. Nell'esplosione della supernova i neutrini trasportano circa il 99% dell'energia prodotta.

	Q_{eff}	perdita
$pp1$	26.20	2.0%
$pp2$	25.66	4.0%
$pp3$	19.17	28.3%

Tabella 4.3: Efficienza delle catene pp . Il Q valore effettivo è espresso in MeV.

I cicli di reazione che abbiamo presentato sono matematicamente descritti come un sistema di equazioni differenziali che regolano l'abbondanza dei vari nuclidi coinvolti nelle diverse reazioni, in analogia all'espressione (4.43). Dalla soluzione di queste equazioni, si ottiene che la produzione totale di energia del sole è $E_{tot}=5.1 \cdot 10^{10}$ MeV $\text{kg}^{-1} \text{s}^{-1}$. Dividendo la luminosità del sole per questo valore si ha che:

$$m = \frac{L_{\odot}}{E_{tot}} = 4.7 \cdot 10^{28} \text{kg}$$

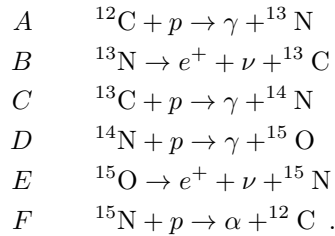
che confrontata con $M_{\odot}$ indica che soltanto il 2.4% della massa solare è coinvolta nel processo di combustione dell'idrogeno.

La catena pp fornisce l'importante meccanismo di produzione dell' ${}^4\text{He}$ senza utilizzare la presenza di nuclei più pesanti che facciano da catalizzatori delle varie reazioni. Questo permette di formulare una teoria generale della nucleosintesi di tutti gli elementi partendo dall'idrogeno.

4.2 La catena CNO

Le stelle di prima generazione (popolazione II) sono formate principalmente di idrogeno e quindi la loro energia è prodotta dal ciclo *pp* presentato nella sezione precedente. Le stelle di seconda, o terza generazione, (popolazione I) si sono formate dalle ceneri di stelle esplose. La nube di gas che si è condensata contiene anche elementi più pesanti dell'idrogeno e dell'elio, elementi definiti talvolta come *metalli* nel gergo astrofisico. Questi elementi partecipano a reazioni nucleari fungendo da catalizzatori nel processo di fusione di quattro protoni che formano un nucleo di ^4He , una particella α . Il coinvolgimento di questi nuclei in processi di reazione implica il superamento di barriere coulombiane più grandi di quelle presenti nella catena *pp*. Per questo motivo, queste reazioni avvengono a temperature più grandi di quelle di una stella come il sole. Queste temperature si attivano in stelle più massive del sole.

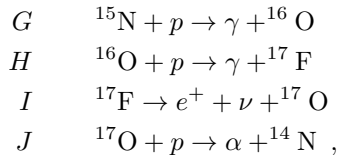
Ovviamente i nuclei più pesanti dell'elio che partecipano a reazioni nucleari sono privilegiati se la barriera coulombiana è bassa e se la loro abbondanza relativa è alta. Per una serie di motivi che saranno spiegati nel capitolo 5, i nuclei intermedi tra ^4He e ^{12}C sono poco abbondanti nelle stelle, mentre lo sono i nuclei di carbonio e azoto. E' quindi grazie a questi nuclei che si attiva il cosiddetto ciclo *CN*.



I quattro protoni sono sintetizzati nelle reazioni *A*, *C*, *D* e *F* in ^4He , che appare nella reazione finale *F*. Il nucleo di ^{12}C appare nella prima reazione e nell'ultima. Quindi si comporta da catalizzatore, e non viene distrutto dal ciclo di reazioni. Anche se all'inizio dell'innesco del ciclo di reazioni fosse presente solo il nucleo ^{12}C , il ciclo produce nuovi nuclei.

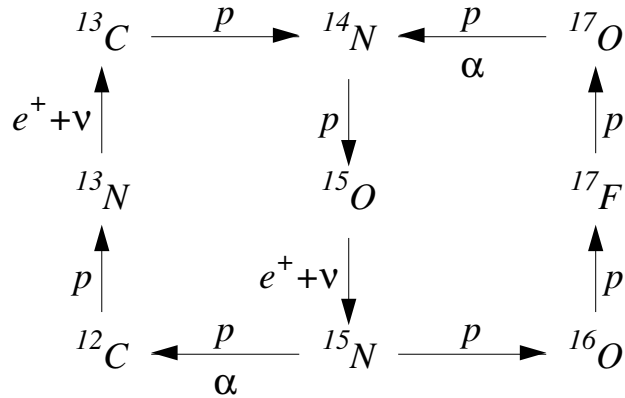
Come nel ciclo *pp* anche in questo caso la velocità del ciclo è limitata dalla reazione più lenta. In questo caso il problema consiste nel superamento della barriera coulombiana. Da questo punto di vista le reazioni *D* e *F* sono paritarie, dato che si tratta di un protone che deve superare la barriera di un nucleo di azoto. La reazione *F* è gestita dall'interazione nucleare forte, quindi è più veloce della reazione *D* che è mediata dall'interazione elettromagnetica. E' quindi la reazione *D* il collo di bottiglia che definisce la velocità con cui il ciclo *CN* avviene.

In realtà, una volta formato nella reazione *E*, il nucleo di ^{15}N dopo aver assorbito un protone può decadere in α e ^{12}C oppure può formare un nucleo di ^{16}O ed innescare un altro ciclo, detto *CNO*:



che produce il combustibile per la reazione *D*. I due cicli si combinano come indicato dalla 4.3.

La reazione *G* è mediata dall'interazione elettromagnetica, quindi molto più lenta e rara della *F* che è invece mediata dall'interazione forte. Si stima che il ciclo *CNO* avvenga una volta ogni mille cicli *CN*. Quindi non ha grande rilevanza dal punto di vista della produzione energetica, anche se è invece importante per la nucleosintesi.

Figura 4.3: Le due catene *CNO* combinate.

E' già stato accennato che le reazioni del ciclo *CNO* possono avvenire solo a temperature superiori a quelle sufficienti per innescare il processo *pp*, perchè è necessario fornire ai protoni maggiore energia cinetica in modo da permettere loro di superare la superiore barriera coulombiana. E' necessario quindi che le stelle siano relativamente massive. Il sole, ad esempio, non ha massa sufficiente per poter innescare questo ciclo.

Le catene *pp* e *CNO* dipendono fortemente dalla temperatura. Il tasso di reazioni cresce rapidamente con la temperatura di innesco, per poi stabilizzarsi quando la temperatura è molto più grande della temperatura di innesco. Dato che per la catena *pp* la temperatura di innesco è inferiore a quella della reazione *CNO*, la reazione *pp* raggiunge prima la situazione di soglia. Alle temperature del sole il tasso di produzione di energia per il ciclo *pp*, è proporzionale a T^4 . Si tratta della derivata della curva dell'energia prodotta, in funzione della temperatura calcolata a $T = 15 \cdot 10^6 \text{K}$. Lo stesso calcolo per l'energia prodotta dal ciclo *CNO* dà un risultato di T^{18} .

In casi di stelle supermassive, con masse superiori a 10^5 masse solari, e anche in altre situazioni come novae, supernovae, o formazione di stelle di neutroni, temperature e densità sono così alte che il ciclo *CNO* opera nell'arco di pochi secondi, tanto che nuclei β instabili, come il nucleo ^{13}N , non hanno il tempo di decadere, e possono assorbire un protone.

Questo fatto amplia la possibilità di formare cicli di reazioni nucleari diversi da quelli del ciclo *CNO*. La diversificazione del ciclo *CNO* non è importante per la produzione di energia, ma è estremamente rilevante per la nucleosintesi. Questi nuovi cicli che si aprono, permettono di sintetizzare nuclei più pesanti dell'ossigeno. Il processo può continuare generando nuclei fino al ^{56}Fe . Per nuclei più pesanti di questo isotopo la fusione nucleare non è più esotermica e quindi non avviene spontaneamente.

4.3 Emissione di neutrini

Anche se l'energia trasportata dai neutrini è solo una piccola frazione dell'energia prodotta all'interno delle stelle, circa il 2% per il ciclo *pp*, i neutrini sono gli unici testimoni della validità dei

	Φ [$\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$]	%	E_ν [MeV]
$p + p \rightarrow e^+ + \nu + d$	$6.010^{12} \pm 2\%$	90.97	≤ 0.42
$p + e^- \rightarrow \nu + d$	$1.4310^{10} \pm 4\%$	0.22	≤ 1.44
${}^3\text{He} + p \rightarrow e^+ + \nu + \alpha$	1.2310^5	0.22	≤ 18.77
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow \nu + {}^7\text{Li}$	$4.8910^{11} \pm 18\%$	7.41	0.38 (10%) 0.86 (90%)
${}^8\text{B} \rightarrow e^+ + \nu + {}^8\text{Be}$	$5.6910^{10} \pm 43\%$		≤ 14.06
${}^{13}\text{N} \rightarrow e^+ + \nu + {}^{13}\text{C}$	$4.9210^{12} \pm 51\%$	0.75	≤ 1.20
${}^{15}\text{O} \rightarrow e^+ + \nu + {}^{15}\text{N}$	$4.2610^{12} \pm 58\%$	0.65	≤ 1.73
${}^{17}\text{F} \rightarrow e^+ + \nu + {}^{17}\text{O}$	$5.3910^{10} \pm 48\%$		≤ 1.74

Tabella 4.4: Flussi sulla terra ed energia massima dei neutrini prodotti dalle principali reazioni nel sole. Queste stime sono ottenute utilizzando il modello solare standard [Bah01].

nostri modelli stellari. I processi che abbiamo descritto producono anche fotoni ad alta energia. Questi fotoni sono soggetti a vari fenomeni di diffusione, con sezioni d'urto relativamente alte, e di conseguenza liberi cammini medi molto piccoli [Str06]. Si stima che i fotoni prodotti al centro del sole dalle reazioni nucleari presentate in precedenza, impieghino tempi dell'ordine delle migliaia di anni prima di arrivare in superficie.

I neutrini invece sfuggono dalla stella senza praticamente interagire. La sezione d'urto di neutrini di energia dell'ordine del MeV con nuclei è dell'ordine di 10^{-47}m^2 [Ben00]. Considerando che la densità nella zona centrale del sole, dove avvengono le reazioni nucleari, è dell'ordine di 10^{31} nuclei/ m^3 , il libero cammino medio dei neutrini è 10^{16} m. Dato che il raggio del sole è di $7 \cdot 10^8$ m, la stella risulta essere trasparente ai neutrini.

Nella tabella 4.4 sono presentati i flussi di neutrini attesi sulla terra provenienti dalle varie reazioni nucleari. Questi flussi sono stimati utilizzando il cosiddetto modello solare standard (MSS).

Il MSS formula la produzione di energia secondo le catene di reazione presentate in precedenza. Le abbondanze dei vari nuclei coinvolti nelle reazioni nucleari sono descritte da un sistema di equazioni differenziali del tipo della (4.43). Queste equazioni sono risolte dando come dati iniziali l'abbondanza dei vari nuclei. Data la composizione chimica del sole si calcola la produzione di energia che viene inserita nelle equazioni (2.1-2.5) dell'equilibrio della stella. I vari modelli differiscono per le condizioni iniziali. In ogni caso, si richiede ad un modello solare standard di riprodurre i valori osservati della luminosità e del raggio del sole, e l'attuale rapporto tra idrogeno ed elementi più pesanti, osservato alla superficie del sole.

La verifica della validità del MSS è stata posta sotto particolare attenzione in questi anni perchè le misure di neutrini provenienti dal sole indicavano flussi inferiori a quelli attesi. Le reazioni a questa osservazione, ottenuta con un esperimento di tipo radiochimico in funzione dal 1968 [Dav89], è stata quella di mettere in dubbio la validità dell'esperimento, e quella del MSS.

Il grande sforzo investigativo sia sperimentale sia teorico dall'inizio degli anni '90, ha, da una parte, permesso di confermare il risultato osservativo di Davis et al., e dall'altra di consolidare le incertezze presenti nel MSS [Bah01]. La discrepanza tra i due risultati è stata quindi attribuita alle caratteristiche del neutrino con un fenomeno detto di oscillazione di sapore.

Recentemente un raffinato esperimento ha permesso di misurare reazioni di neutrini provenienti dal sole, sia di correnti cariche sia di correnti neutre. Senza entrare nei dettagli della tecnica sperimentale presentiamo nel seguito l'idea dell'esperimento e i risultati ottenuti.

La reazione di base per un processo di corrente carica è

$$\nu_l + n \rightarrow p + l^- , \quad (4.44)$$

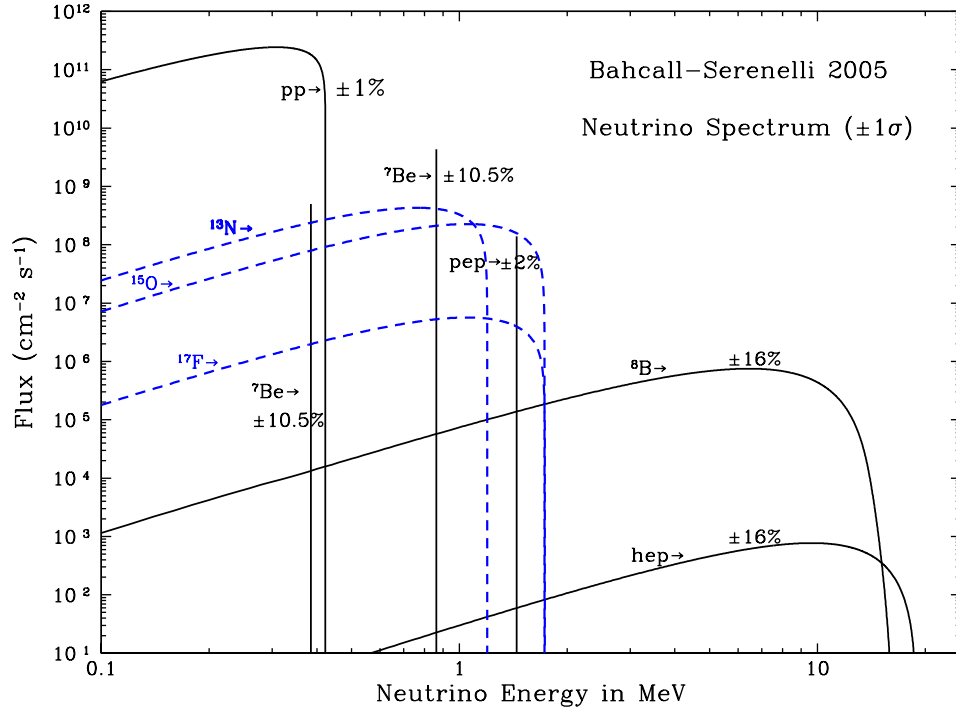


Figura 4.4: Flussi di neutrini previsti dal MSS [Bah01]. Le linee tratteggiate di riferiscono al ciclo *CNO*. I numeri indicano l'incertezza teorica.

dove l indica il leptone carico $l = e, \mu, \tau$. Il processo (4.44) può avvenire solo se il neutrino ν_l ha energia sufficiente per produrre il leptone carico l^- . Nel caso del neutrino elettronico è 0.5 MeV, per il neutrino muonico è necessaria un'energia di 105 MeV, e per il neutrino τ 1777 MeV. I neutrini prodotti dal sole sono tutti di tipo elettronico e hanno tutti energie al di sotto dei 10 MeV. Se nel viaggio dal sole alla terra il neutrino elettronico si trasforma in neutrino di un'altra famiglia, quest'ultimo risulta invisibile a rivelatori di leptoni carichi, perché non ha l'energia sufficiente per produrre il leptone della sua famiglia.

Il neutrino può interagire con la materia per mezzo di corrente neutra con un processo di diffusione elastica, ad esempio

$$\nu_l + n \rightarrow \nu_l + n, \quad (4.45)$$

oppure se interagisce con un nucleo X , con un processo anelastico del tipo:

$$\nu_l + X \rightarrow X^* + \nu_l', \quad (4.46)$$

dove l'asterisco indica uno stato eccitato del nucleo, e ν_l' indica che l'energia cinetica del sistema non è conservata (ovviamente lo è l'energia totale). Nelle reazioni di corrente neutra, non c'è alcuna energia di soglia. O meglio l'energia di soglia nel caso di reazioni anelastiche è quella del primo stato eccitato del nucleo bersaglio. Questo significa che la soglia di reazione non dipende dalla famiglia del neutrino in un processo di corrente neutra.

L'apparato sperimentale del Sudbury Neutrino Observatory (SNO) ha permesso di misurare il flusso di neutrini solari generati dal decadimento ^8B . Le misure [Ahm02] rivelano i neutrini con

reazioni di cambio carica del tipo:

$$\nu_e + d \rightarrow p + p + e^- ,$$

e di corrente neutra del tipo

$$\nu_l + d \rightarrow p + n + \nu_l ,$$

dove, dato il nucleo considerato, l'energia di soglia del processo anelastico è di 2.2 MeV.

Il flusso misurato con reazioni di cambio carica è compatibile con i flussi misurati da altri esperimenti, ed è inferiore al flusso previsto dal MSS. Al contrario il flusso misurato con corrente neutra è invece compatibile con le previsioni del MSS. Le deduzioni di questa misura sono le seguenti.

1. Le misure precedenti del flusso di neutrini solari fatte utilizzando solo processi di reazione con cambio carica sono corrette.
2. La validità del MSS è confermata.
3. Esiste un fenomeno che permette ai neutrini di cambiare il loro sapore leptonico.

Dal nostro punto di vista il punto 2) è quello di interesse. Quanto speculato sulla fisica delle reazioni nucleari all'interno del sole è verificato empiricamente grazie all'osservazione dei neutrini.

Dal punto di vista della fisica fondamentale, è il punto 3) quello di grande interesse. Il motivo più plausibile che induce il fenomeno di oscillazione, è la presenza di masse a riposo dei neutrini diverse da zero. La misura diretta del valore delle masse dei neutrini, e le conseguenze teoriche di masse diverse da zero sono problemi aperti della fisica contemporanea.

Capitolo 5

Reazioni nucleari nelle stelle giganti rosse

Nel capitolo precedente abbiamo visto che il meccanismo di produzione di energia nelle stelle della sequenza principale è la combustione dell'idrogeno con la produzione di ${}^4\text{He}$. Questo forma un core di ${}^4\text{He}$ al centro della stella che diventa sempre più massivo e si contrae, aumentando la sua densità. L'energia gravitazionale si trasforma in energia termica che riscalda gli strati più esterni della stella, quelli in cui avviene ancora la combustione dell'idrogeno. Questo processo di accrescimento della densità, e conseguente contrazione e riscaldamento del core di ${}^4\text{He}$, produce un'espansione degli strati superficiali della stella, fino ad aumentarne il raggio anche di 50 volte. In questo processo di espansione la temperatura superficiale della stella diminuisce e la radiazione emessa si sposta verso frequenze inferiori, verso il rosso. Questa è la fase detta di supergigante rossa.

Nel core di elio di una supergigante rossa non sono attive reazioni nucleari. Queste si attivano in una fase successiva, dopo circa 100 milioni di anni, quando il core raggiunge densità e temperature sufficienti ad innescare le reazioni nucleari che bruciano l'elio. Il risultato dell'accendersi del processo di combustione dell'elio provoca instabilità nella stella. Questo avviene perché il core, che adesso ha una fonte interna di energia comincia ad espandersi, raffreddandosi. Questo raffredda anche la temperatura degli strati esterni al core, in cui avviene ancora la combustione dell'idrogeno. Per questo motivo, in questi strati la produzione di energia rallenta, e quindi l'attrazione gravitazionale non è più bilanciata dalla pressione del gas. Gli strati più esterni della stella si contraggono fino a raggiungere una nuova situazione di equilibrio. Questa è la situazione di gigante rossa.

Dato che la vita della stella è determinata dalla sua massa iniziale, si stima che la trasformazione di una stella della sequenza principale in gigante rossa possa avvenire per stelle di massa superiore a metà masse solari. Stelle di massa inferiore terminano il combustibile di idrogeno e si trasformano direttamente in nane bianche.

5.1 La combustione dell' ${}^4\text{He}$

Nelle stelle di prima generazione le ceneri della combustione sono composte esclusivamente di ${}^4\text{He}$. Non è possibile produrre elementi più pesanti data l'instabilità di nuclei con $A=5$ e $A=8$. Non esistono in natura nuclei stabili con questi valori della massa. Questo fatto implica che il processo descritto nel capitolo 4 in cui si formano nuclei per cattura di un protone, si blocca una volta formato l' ${}^4\text{He}$. Il nucleo di ${}^{12}\text{C}$ è il quarto nucleo più abbondante nell'universo, dopo idrogeno

^4He e ^{16}O . Per il motivo menzionato sopra, chiamato gap di masse, il ^{12}C non può avere origine cosmologica, e deve essere sintetizzato nelle stelle.

Uno dei problemi della nucleosintesi consiste nel capire come si possa superare il gap delle masse. La fusione simultanea di tre particelle α è energeticamente possibile, ma la probabilità che avvenga è così bassa da non poter essere responsabile della presenza del ^{12}C .

L'idea è quella che il ^{12}C sia formato in una sequenza a due passi. In un primo passo due particelle α si fondono per formare un nucleo di ^8Be . Lo stato fondamentale di questo nucleo è instabile per il decadimento in due α , con una vita media di 10^{-16} secondi. Tuttavia questo tempo è relativamente lungo rispetto ai 10^{-19} secondi del tempo di attraversamento del volume nucleare da parte delle due particelle α con energia cinetica totale di 92 keV prodotte dal decadimento. Questo significa che una frazione di nuclei di ^8Be rimane in equilibrio dinamico tra le particelle che lo producono e quelle in cui decadono



Si stima che per temperature di 100 milioni di gradi e densità dell'ordine di 10^6 kg m^{-3} si abbia un nucleo di ^8Be ogni 10^9 nuclei di ^4He .

A questo punto avviene il secondo passo del processo che permette la cattura di una particella α da parte del ^8Be .



quindi il risultato finale del processo è la trasformazione di tre α in ^{12}C . Una stima della sezione d'urto per questo processo ha dimostrato però che la quantità di ^{12}C prodotto è insufficiente per descrivere quella osservata.

L'ipotesi è che il processo (5.2) avvenga in presenza di una risonanza, con il meccanismo descritto nella sezione 3.4. Il Q valore della reazione (5.2) è di 7.68 MeV, l'idea è che esista una risonanza stretta attorno a questa energia, che possa aumentare il valore della reazione di fusione.

Ovviamente il processo deve avvenire con la conservazione di momento angolare e parità. Dato che gli spin di ^8Be e della particella α sono nulli, e le loro parità intrinseche sono positive, il momento angolare e la parità dello stato iniziale sono caratterizzate dal momento angolare relativo dei due nuclei in questione. Alle energie in questione, per banali ragioni geometriche la probabilità di fusione in onda s , momento angolare nullo, è favorita rispetto alle situazioni con momenti angolari maggiori. Si deve quindi trovare una risonanza di tipo $J^\pi = 0^+$ a circa 7.68 MeV. Lo sforzo combinato di vari laboratori ed esperimenti ha permesso di individuare una risonanza di questo tipo a 7.654 MeV. Lo studio accurato dell'ampiezza di decadimento di questa risonanza ha permesso di calcolare la sezione d'urto, e il tasso di reazioni. Tutto risulta compatibile con l'osservazione.

Anche per quanto riguarda la combustione dell'idrogeno abbiamo indicato la dipendenza dal tasso di produzione dell'energia con la temperatura. In questo caso, per una temperatura di 100 milioni di gradi, temperatura a cui la combustione dell'elio viene attivata, si ha una dipendenza del tasso di reazione dalla temperatura che è T^{41} . Data questa fortissima dipendenza del tasso di reazione dalla temperatura, è evidente che il processo di produzione del ^{12}C con triplo α , avviene a temperature molto grandi.

Questo processo di produzione del ^{12}C non coinvolge i nuclei con masse da $A=6$ ad $A=11$, la cui abbondanza relativa risulta essere molto bassa. Questi nuclei non vengono prodotti nelle stelle, ma sono prodotti da altri processi di nucleosintesi (vedi cap. 8).

5.2 La sopravvivenza del ^{12}C nelle giganti rosse.

Abbiamo detto che il nucleo di ^{12}C è il quarto elemento più abbondante nell'universo, dopo H, ^4He e ^{16}O . Nel processo di fusione dell'elio il ^{12}C è un combustibile dato la che reazione



avviene anche alle temperature di formazione del ^{12}C . In principio, quindi il ^{12}C dovrebbe essere completamente bruciato, per arrivare alla formazione dell' ^{16}O . Si osserva invece un rapporto carbonio ossigeno $\text{C/O}=0.6$.

La spiegazione della sopravvivenza del ^{12}C è legata al fatto che mentre la (5.2) avviene in regime risonante, la reazione (5.3) è un processo non risonante, quindi molto più lento. Questo non significa che non ci siano risonanze nell' ^{16}O , alle energie di assorbimento. Il problema è che questi stati eccitati hanno valori di momento angolare e parità che difficilmente permettono la cattura di una particella α , se non addirittura sono proibiti per questo tipo di processo.

La sezione d'urto relativamente piccola del processo (5.3) rispetto a quella della formazione del ^{12}C con un processo di cattura di tre α , implica che, quando il combustibile di elio è terminato rimangono ancora dei nuclei di carbonio da bruciare. A questo punto la temperatura si abbassa al punto tale che la (5.3) non può più avvenire e il rapporto tra carbonio e ossigeno rimane congelato.

Questo è il meccanismo che di fatto blocca la nucleosintesi di nuclei più pesanti. In realtà il processo di assorbimento di α da parte dei nuclei stabili potrebbe continuare. L'assorbimento di una α da parte dell' ^{16}O forma il ^{20}Ne e quindi, il processo può continuare formando ^{24}Mg , ^{28}Si e così via fino al ^{56}Fe . Ad ogni passo la barriera coulombiana da superare per la fusione aumenta, e questo implica la presenza di temperature sempre più grandi perchè il processo possa avvenire. Inoltre, contrariamente a quanto avviene per il caso della cattura di α , non ci sono risonanze che aumentano la probabilità di fusione. Di fatto la formazione di nuclei più pesanti dell'ossigeno, non avviene nelle stelle giganti rosse.

Abbiamo analizzato il caso di stelle giganti rosse di prima generazione, in cui il solo combustibile nucleare è l' ^4He . In stelle di seconda o terza generazione ci sono anche nuclei più pesanti. Tuttavia la probabilità che si inneschino cicli come il *CNO* è estremamente bassa, sia per le maggiori barriere coulombiane da superare, ma soprattutto per la caratteristica specifica del processo di fusione di tre α che avviene con un meccanismo di risonanza.

Capitolo 6

Nane bianche

Possiamo riassumere la struttura di una stella gigante rossa in età avanzata, come formata da un nucleo di carbonio e ossigeno, circondato da una frangia di elio. Nella parte più interna l'elio continua a bruciare alimentando il nucleo centrale della stella, nella parte più esterna c'è un involucro gassoso contenente sia elio sia idrogeno.

A questo punto l'evoluzione della stella dipende dalla sua massa. Per stelle con massa insufficiente per poter innescare reazioni tra nuclei di carbonio, la frangia di elio in combustione si estende sempre più verso la superficie della stella. La luminosità della stella aumenta perché vi è una diminuzione dell'opacità della stella e quindi un aumento del numero dei fotoni che escono dalla superficie.

La luminosità può diventare così alta che la pressione di radiazione determina una rapida espulsione dell'involucro esterno di idrogeno, lasciando a nudo la zona centrale, luminosissima a causa della frangia di elio in combustione. L'oggetto celeste appare come una stella di elevata luminosità superficiale circondata da una corona di gas. Si parla di nebula planetaria. La corona di gas esterni tende ad allontanarsi dalla stella e a disperdersi nello spazio.

La temperatura superficiale del corpo centrale è dell'ordine dei 10^5 K, da confrontare con i circa 6000 K della superficie del sole. La temperatura interna è dell'ordine dei 10^8 K, e la densità centrale supera i 10^8 kg/m³. A queste densità le distanze interatomiche sono tali che le nubi elettroniche dei vari atomi vengono a compenetrarsi.

Stimiamo le distanze interatomiche per un gas di atomi di elio alla densità di 10^8 kg/m³. Dato che una mole di elio è data da 4 g di elio, circa, abbiamo che in un m³ ci sono

$$\frac{10^8 \text{kg}}{4 \times 10^{-3} \text{kg}} = 0.25 \times 10^{11} \text{moli} ,$$

che corrisponde a

$$0.25 \times 10^{11} \times 6 \times 10^{23} = 1.5 \times 10^{34} ,$$

atomi.

Il volume occupato da ogni singolo atomo è quindi:

$$\frac{1 \text{m}^3}{1.5 \times 10^{34}} \simeq 10^{-36} \text{m}^3 .$$

Le distanze tra due atomi si ottengono prendendo la radice cubica, quindi abbiamo distanze dell'ordine dei 10^{-12} m, circa cento volte più piccole delle tradizionali dimensioni di un atomo isolato.

L'energia termica raggiunge le decine di keV, quindi gli atomi sono totalmente ionizzati. La stella presenta una nuova struttura: un insieme di nuclei immersi in un gas di elettroni. In questa situazione in nuclei si posizionano in una disposizione reticolare, piuttosto che formare un gas o un liquido. Nella materia ordinaria gli elettroni schermano le cariche positive dei nuclei evitando quindi la repulsione coulombiana tra di loro. Quando gli atomi sono totalmente ionizzati, questa azione cessa. I nuclei non schermati si respingono a vicenda e il sistema raggiunge una situazione di minimo energetico disponendo i nuclei in posizioni fisse, essenzialmente come in una struttura cristallina.

Per densità dell'ordine di $10^{10} \text{ kg m}^{-3}$ il gas di elettroni è relativistico, dato che le massime energie cinetiche, l'energia di Fermi, raggiunge il valore di alcuni MeV, confrontabile con la massa a riposo dell'elettrone. La corrispondente temperatura di Fermi è dell'ordine dei 10^{11} K , valore maggiore di quello della temperatura della stella. Questo significa che l'attrazione gravitazionale non è bilanciata dalla pressione prodotta dall'energia termica del gas che lo compone, ma piuttosto dalla pressione generata dal principio di esclusione di Pauli. Un fenomeno tipico della microfisica gioca un ruolo fondamentale nell'equilibrio di una struttura macroscopica, come una stella. Vedremo che esiste un valore massimo della massa della stella per cui questo equilibrio può realizzarsi. Per stelle con massa maggiore di questo limite, la pressione del gas di elettroni non è sufficiente a bilanciare l'attrazione gravitazionale, e quindi si ha un collasso della stella.

Le nane bianche sono state osservate sperimentalmente molto prima che la loro struttura venisse modellata teoricamente. Fin dal 1844 F.W. Bessel aveva osservato che il moto della stella Sirio non era rettilineo, ma oscillava periodicamente attorno ad una posizione. Per questo motivo aveva dedotto che l'astro doveva essere perturbato da un altro corpo celeste di notevole massa. Lo sconosciuto perturbatore veniva identificato e battezzato Sirio B. Nel 1915 W.S. Adams trovò che si tratta di una stella bianca, quindi molto luminosa nell'unità di superficie, e molto piccola, dato che nonostante la sua relativa vicinanza alla terra ci appare molto debole. Sirio B ha una massa paragonabile a quella del sole ma un raggio di soli 12000 km.

Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare che le nane bianche hanno una massa limite. Discuteremo prima le proprietà di un gas di Fermi di elettroni a temperatura zero. Nello specifico calcoleremo l'equazione di stato, ovvero la pressione in funzione della densità. Questo verrà fatto considerando sia il caso di un gas in cui gli elettroni si muovono con energie non relativistiche, sia il caso, più interessante per le nane bianche, di energie relativistiche. Dato che le relazioni tra pressione e densità che otterremo sono del tipo:

$$P \propto \rho^\Gamma ,$$

tratteremo in generale il problema dell'equilibrio idrostatico di queste stelle che prendono il nome di *politropi*. Associando le proprietà generali dei politropi, con quelle specifiche del gas di elettroni, vedremo che nel caso relativistico esiste un valore massimo della massa della stella.

6.1 Gas di Fermi

La massa della nana bianca è determinata essenzialmente dai nuclei degli atomi ionizzati. Questo perché il nucleone è circa 2000 volte più massivo dell'elettrone. Per lo stesso motivo, in equilibrio termodinamico, gli elettroni hanno mediamente velocità maggiori dei nuclei. Per una temperatura di circa 10^8 K , quella che si ritiene sia la temperatura al centro di una nana bianca, si ha un'energia cinetica media dell'ordine di:

$$k_B T \simeq \frac{8.6 \times 10^{-5} \text{ eV}}{\text{K}} 10^8 \text{ K} \simeq 10^4 \text{ eV} . \quad (6.1)$$

Una stima del contributo dell'interazione elettrone-elettrone è:

$$V = \frac{e^2}{r} \simeq \frac{1.44 \times 10^6 \text{eV} 10^{-15} \text{m}}{10^{-12} \text{m}} \simeq 1.5 \times 10^3 \text{eV} ,$$

dove abbiamo utilizzato per la distanza media tra due elettroni, r , il valore di 10^{-12} m, stimato in precedenza. Da questa stima grossolana, che probabilmente fornisce una distanza interelettronica troppo piccola, si vede che il termine di energia potenziale, è più piccolo di quello dell'energia cinetica, e in prima approssimazione è possibile trascurarlo. Questa approssimazione, semplifica enormemente il calcolo dell'equazione di stato del gas di elettroni.

Dal punto di vista della teoria a molti corpi, il gas di elettroni è descritto da un'hamiltoniana del tipo:

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A U(i) + \sum_{i < j}^A V(i, j) ,$$

dove $T(i)$ è l'energia cinetica dell' i -esimo elettrone, $V(i, j)$ l'interazione tra due di essi, e il termine a un corpo $U(i)$ rappresenta l'interazione tra il singolo elettrone e il campo generato dalle cariche positive dei nuclei. In un singolo atomo con più elettroni, rappresenterebbe l'interazione tra il singolo elettrone e il nucleo.

Nell'approssimazione a campo medio si trascura il termine di interazione $V(i, j)$. Quindi l'equazione di Schrödinger viene risolta per l'hamiltoniana

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) = \sum_{i=1}^A [T(i) + U(i)] ,$$

che è somma di hamiltoniane ad un corpo. L'autostato a molti corpi dell'hamiltoniana precedente, può essere costruito come determinante di Slater degli autostati dell'hamiltoniana di singola particella $h(i)$. Nell'approssimazione a campo medio, il problema ad N corpi è trasformato in N problemi ad un corpo. Normalmente il modello a campo medio viene identificato come un modello in cui le particelle non interagiscono tra di loro, nel senso che manca il termine di interazione $V(i, j)$.

Nel caso specifico consideriamo un sistema infinito ed omogeneo. Queste approssimazioni sono valide pensando alla differenza tra le distanze tra elettroni e quelle dell'oggetto macroscopico che stiamo descrivendo. Si passa da 10^{-12} m a 10^7 m, circa 19 ordini di grandezza di differenza. In caso di sistema omogeneo, ed infinito, il termine $U(i)$ è costante, questo di fatto implica semplicemente una semplice ridefinizione dello zero di energia. Quindi nel caso gas di Fermi estremo l'hamiltoniana a molti corpi è costituita solo dalla somma degli operatori di energia cinetica dei singoli elettroni.

L'hamiltoniana che descrive un gas di elettroni non interagenti è

$$H_0 = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \right) , \quad (6.2)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone. Il problema ad un corpo da risolvere è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) . \quad (6.3)$$

Supponiamo che l'elettrone sia confinato in un cubo di volume $V = L^3$. I risultati di nostro interesse saranno quelli indipendenti dal volume. Le condizioni al contorno che utilizziamo sono quelle periodiche:

$$\begin{aligned}\phi(x+L, y, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y+L, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y, z+L) &= \phi(x, y, z) .\end{aligned}$$

Con queste condizioni al contorno il numero totale di elettroni contenuti nel cubo è costante. Se un elettrone raggiunge il bordo del cubo e lascia il sistema viene immediatamente rimpiazzato da un altro elettrone che entra nel cubo dalla faccia opposta.

Le autofunzioni dell'hamiltoniana (6.3), sono onde piane:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_{s_i} , \quad (6.4)$$

dove il sottoindice s indica la terza componente dello spin della particella e χ il tradizionale spinore di Pauli:

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Data l'espressione precedente delle funzioni d'onda di singola particella, ogni prodotto scalare, per conservare la normalizzazione, deve essere moltiplicato per un fattore $V/(2\pi)^3$:

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3r \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)}{V} . \quad (6.5)$$

Il fattore moltiplicativo necessario per la corretta normalizzazione dei prodotti scalari, è lo stesso anche quando il prodotto scalare viene fatto nello spazio complementare degli implusi.

Se il modulo quadro della funzione d'onda di singola particella dà la probabilità di trovare la particella in un punto dello spazio, per un sistema di particelle non interagenti, la densità totale del sistema, ovvero la probabilità di trovare una particella qualsiasi in un certo punto dello spazio, è data dalla somma delle probabilità prodotta da ogni particella:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2 . \quad (6.6)$$

In questa equazione la somma è limitata al numero A di nucleoni. Successivamente faremo tendere all'infinito questo numero.

Il sistema in oggetto è composto da fermioni che obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Dato che ciò che distingue le particelle è il loro impulso $\mathbf{k}$, lo stato fondamentale del sistema sarà configurato in modo che tutti gli stati con $0 \leq |\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}|_F$ siano occupati e tutti gli altri siano vuoti. Il massimo valore dell'impulso, $|\mathbf{k}|_F \equiv k_F$ è detto impulso di Fermi, e l'energia associata, ϵ_F , energia di Fermi. Il numero di elettroni per unità di volume, la densità di numero, è:

$$\begin{aligned}n_e &= \sum_{a \leq k_F} |\phi_a(\mathbf{r})|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k_a \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \sum_{s_a} \chi_{s_a}^+ \chi_{s_a} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2}{V} \int_0^{k_F} d^3k_a = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k_a^2 dk_a = \frac{8\pi}{8\pi^3} \frac{k_F^3}{3} = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 .\end{aligned} \quad (6.7)$$

Questo risultato mostra come la densità del sistema sia indipendente da $\mathbf{r}$. Si tratta di un risultato atteso visto che anche la densità di singola particella non dipende da $\mathbf{r}$. In altre parole si conferma

che il sistema è omogeneo. La densità dipende dall'impulso di Fermi $p_F = \hbar k_F$. L'energia cinetica associata al momento di Fermi è:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} k_F^2 = \frac{(3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2}{2m_e} . \quad (6.8)$$

L'energia del sistema è data da:

$$E = 2 \sum_{k < k_F} \epsilon(k) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\hbar^3} \epsilon(|\mathbf{p}|) \Theta(p_F - |\mathbf{p}|) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} dp p^2 \epsilon(p) , \quad (6.9)$$

dove Θ è la funzione gradino e il fattore 2 considera la degenerazione di spin.

Consideriamo l'espressione relativistica per l'energia cinetica dell'elettrone:

$$\epsilon(k) = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = m_e c^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right] , \quad (6.10)$$

dove nell'ultimo termine abbiamo definito la nuova variabile:

$$x = \frac{pc}{m_e c^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} k . \quad (6.11)$$

L'energia del sistema è quindi:

$$\begin{aligned} E &= V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^{x_F} dx x^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right] = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} f(x_F) \\ &= V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{8} \left[x_F (1 + 2x_F^2) \sqrt{1 + x_F^2} - \ln \left(x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right) - \frac{8}{3} x_F^3 \right] . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Analizziamo il risultato in due limiti estremi. Nel caso non relativistico $\hbar c k_F \ll m_e c^2$, quindi $x_F \ll 1$.

Possiamo sviluppare il termine sotto radice quadrata nella (6.12) in serie di potenze,

$$\sqrt{1 + x^2} \simeq 1 + \frac{x^2}{2} + \dots ,$$

quindi utilizziamo lo sviluppo

$$\ln(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2} x^2$$

e otteniamo

$$\ln \left(x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right) \simeq x_F + \frac{1}{2} x_F^2 - \frac{1}{2} \left(x_F + \frac{1}{2} x_F^2 \right)^2 = x_F - \frac{1}{2} x_F^3 - \frac{x_F^4}{8}$$

Inserendo questi risultati nell'espressione in parentesi quadre dell'equazione (6.12) otteniamo

$$\left[x_F (1 + 2x_F^2) \left(1 + \frac{1}{2} x_F^2 \right) - x_F - \frac{1}{2} x_F^3 - \frac{x_F^4}{8} - \frac{8}{3} x_F^3 \right]$$

Trascurando i termini con potenze superiori a x_F^3 otteniamo

$$E_{nr} = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \right] . \quad (6.13)$$

Nel caso relativistico $x_F \gg 1$ il termine dominante della (6.12), è:

$$E_{rel} = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{2x_F^4}{8} . \quad (6.14)$$

Utilizzando le tradizionali relazioni termodinamiche, la pressione risulta essere espressa come:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} f(x_F) \right] = -\frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[f(x_F) + V \frac{df(x_F)}{dx_F} \frac{dx_F}{dV} \right] . \quad (6.15)$$

Abbiamo che:

$$\frac{df(x_F)}{dx_F} = x_F \sqrt{x_F^2 + 1} .$$

e dalla definizione di x :

$$x_F = \frac{\hbar c}{m_e c^2} (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} , \quad (6.16)$$

e

$$V \frac{dx_F}{dV} = V \frac{\hbar c}{m_e c^2} (3\pi^2)^{1/3} N^{1/3} V^{-4/3} \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} x_F ,$$

abbiamo che:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} - f(x_F) \right] . \quad (6.17)$$

Nel limite non relativistico abbiamo:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{x_F^2}{2} + \dots \right) - \frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{3x_F^2}{10} + \dots \right) \right] = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{x_F^5}{15} , \quad (6.18)$$

e utilizzando la (6.16)

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{15} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^5 (3\pi^2)^{5/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} . \quad (6.19)$$

Nel limite relativistico abbiamo che:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[\frac{1}{3} x_F - \frac{1}{4} x_F \right] = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{12} x_F^4 , \quad (6.20)$$

quindi

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{12} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^4 (3\pi^2)^{4/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3} . \quad (6.21)$$

6.2 Politropi

Come abbiamo già detto, sono definite come **politropi** stelle la cui pressione è legata alla densità da una relazione del tipo

$$P = K \rho^\Gamma , \quad (6.22)$$

dove K e Γ sono costanti reali. Dato che le espressioni (6.19) e (6.21) della pressione ricavate nella sezione precedente sono equazioni del tipo (6.22), discutiamo alcune proprietà generali dei politropi.

Normalmente si definisce l'indice politropico come:

$$\Gamma = \frac{n+1}{n} , \quad (6.23)$$

dato che n è la potenza della temperatura quando la pressione è generata da un gas perfetto [Sch58, Str06]. Definendo la densità della stella come $\rho(r) = \rho_c [\Phi(r)]^n$ possiamo riscrivere la pressione come:

$$P = K \rho^{(n+1)/n} = K \rho_c^{(n+1)/n} [\Phi(r)]^{n+1} . \quad (6.24)$$

Nell'equazione precedente ρ_c è una costante che ha le dimensioni di una densità e $\Phi(r)$ è una funzione adimensionale della distanza dal centro della stella.

L'equazione (2.1) di equilibrio idrostatico, può essere riscritta come:

$$\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = -G_N m(r) , \quad (6.25)$$

Derivando rispetto ad r , abbiamo:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right] = -G_N \frac{dm(r)}{dr} = -G_N 4\pi r^2 \rho(r) , \quad (6.26)$$

da cui

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right] = -G_N 4\pi \rho(r) . \quad (6.27)$$

Utilizzando l'equazione politropica (6.24) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^2}{\rho_c \Phi^n(r)} \frac{d}{dr} \left[K [\rho_c \Phi^n(r)]^{(n+1)/n} \right] \right\} &= -G_N 4\pi \rho_c \Phi^n(r) \\ \frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= -G_N 4\pi \rho_c \Phi^n(r) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Definiamo la costante

$$a^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G_N} , \quad (6.29)$$

e la variabile adimensionale

$$\xi = \frac{r}{a} , \quad (6.30)$$

per riscrivere la (6.28) in maniera più sintetica:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right] = -\Phi^n(\xi) . \quad (6.31)$$

In questa forma, l'equazione di equilibrio idrostatico per un politropo prende il nome di equazione di *Lane-Emden*. Le soluzioni di interesse fisico di questa equazione, richiedono appropriate condizioni al contorno. Al centro della stella si pone:

$$\Phi(\xi = 0) = 1 , \quad (6.32)$$

che implica che la costante ρ_c rappresenti la densità al centro della stella. Si richiede anche che la densità raggiunga un massimo valore al centro quindi:

$$\left(\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0 . \quad (6.33)$$

L'equazione di Lane-Emden (6.2) con le condizioni al contorno (6.32) e (6.33) viene risolta numericamente per un generico valore dell'indice politropico n . Per alcuni valori di n , per esempio quando n è intero o semintero, l'equazione di Lane-Emden assume espressioni relativamente semplici le cui soluzioni sono note analiticamente.

Per esempio nel caso in cui $n = 0$ l'equazione di Lane-Emden diventa:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right] = -\xi^2 .$$

Integrando abbiamo

$$\left[\xi^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right] = -\frac{1}{3}\xi^3 - C ,$$

dove C è una costante da definire utilizzando le condizioni al contorno. Integrando un'altra volta abbiamo

$$\Phi(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 - C\left(\frac{-1}{\xi}\right) + D .$$

Affinché le condizioni al contorno (6.32) e (6.33) siano soddisfatte, le costanti devono assumere i valori $C = 0$ e $D = 1$, quindi la soluzione fisicamente accettabile è

$$\Phi(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} .$$

Il raggio della stella è definito come la distanza dal centro in cui la pressione è nulla. Per la (6.24) abbiamo che il raggio della stella è dato dal valore ξ_R tale che:

$$\Phi(\xi_R) = 0 ,$$

e per la soluzione che abbiamo trovato questo implica

$$\xi_R = \sqrt{6} .$$

n	Γ	ξ_R	$-\xi_R^2 \Phi'(\xi_R)$
5	6/5	∞	1.73205
9/2	11/9	31.8365	1.73780
4	5/4	14.9716	1.79723
7/2	9/7	9.5358	1.89056
3	4/3	6.8969	2.01824
5/2	7/5	5.3553	2.18720
2	3/2	4.3529	2.41105
3/2	5/3	3.6538	2.71406
1	2	π	π
1/2	3	2.7528	3.78710
0	∞	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

Tabella 6.1: Raggi dei politropi ξ_R per particolari valori dell'indice politropico n , Eq. (6.23).

Nella tabella 6.1 presentiamo alcuni valori dei raggi ξ_R dei politropi per specifici valori dell'indice n [Wei72, Ber13]. Le soluzioni dell'equazione di Lane-Emden sono monotone decrescenti per $n \leq 5$.

Si nota che il valore di ξ_R aumenta con il crescere del valore di n , fino a $n = 5$ quando la soluzione analitica che si ottiene è [Str06, Ber13]:

$$\Phi(\xi) = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2}$$

e tende a zero solo per $\xi \rightarrow \infty$.

6.3 La massa di Chandrasekhar

Il problema da risolvere è quello di determinare la massa, e il raggio della stella utilizzando l'equazione (2.2) di conservazione della massa. La densità è ottenuta risolvendo l'equazione (6.27) di equilibrio idrostatico, che lega pressione e densità. La pressione del gas di Fermi relativistico è data dall'equazione (6.15). Queste equazioni possono essere risolte numericamente senza utilizzare altre approssimazioni [Koo86].

Nel caso in cui si faccia l'ipotesi politropica (6.22), si possono ottenere delle soluzioni analitiche. Dalla definizione (6.30) della variabile ξ il raggio della stella è dato da:

$$R = a\xi_R = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G_N}\right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_R . \quad (6.34)$$

La massa della stella è data da:

$$\begin{aligned} M &= m(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \\ &= \int_0^{\xi_R} 4\pi a^2 \xi^2 \rho_c \Phi^n(\xi) a d\xi = 4\pi a^3 \int_0^{\xi_R} \rho_c \Phi^n(\xi) \xi^2 d\xi , \end{aligned}$$

e utilizzando l'equazione (6.31) otteniamo

$$\begin{aligned} M &= -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_R} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \xi_R^2 \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_R} \\ &= -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G_N} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \xi_R^2 \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_R} . \end{aligned} \quad (6.35)$$

La relazione tra massa e raggio si ottiene combinando le due equazioni precedenti. Il valore della derivata prima di Φ nel punto del primo zero è sempre negativo, come indicato nella tabella 6.1.

Consideriamo le espressioni delle pressioni ottenute nella sezione 6.1. Per il caso non relativistico, abbiamo dalla (6.19) che la pressione è proporzionale a $\rho^{5/3}$ che corrisponde ad un valore dell'indice politropico $n = 3/2$. Utilizzando l'equazione (6.35) si ha che la massa dipende dalla densità centrale con la relazione:

$$M \propto \rho_c^{1/2} \quad (6.36)$$

Per il caso relativistico l'eq. (6.21) indica che la pressione è proporzionale a $\rho^{4/3}$, quindi $n = 3$. In questo caso l'equazione (6.35) indica che la massa della stella è indipendente dalla sua densità centrale. Questo valore della massa, unico per tutti i politropi con $n = 3$, è la *massa di Chandrasekhar*. Stelle con massa inferiore alla massa di Chandrasekhar, che è dell'ordine di 1.2 - 1.4 $M_\odot$, formano nane bianche stabili. In queste stelle, la pressione prodotta dal principio di esclusione di Pauli nel gas relativistico di elettroni, compensa l'attrazione gravitazionale. Stelle con masse superiori a quella di Chandrasekhar sono soggette ad ulteriori trasformazioni.

Per comprendere l'esistenza di questo limite consideriamo la dipendenza dalla massa e dal raggio R della nana bianca delle quantità fisiche importanti per l'equilibrio termodinamico. Ovviamente la relazione tra densità e raggio è

$$\rho \propto \frac{M}{R^3} , \quad (6.37)$$

e quindi la forza gravitazionale

$$\rho \frac{G_N m(r)}{r^2} \propto \frac{M^2}{R^5} . \quad (6.38)$$

Abbiamo visto che la pressione, nel caso non relativistico dipende dalla densità come

$$P \propto \rho \propto \rho^{5/3} \propto \frac{M^{5/3}}{R^5} , \quad (6.39)$$

e nel caso relativistico

$$P \propto \rho \propto \rho^{4/3} \propto \frac{M^{4/3}}{R^4} . \quad (6.40)$$

Da queste relazioni, risulta che la forza dovuta alla pressione, che deve bilanciare la forza di attrazione (6.38) è data, nel caso non relativistico da

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M^{5/3}}{R^6} \quad (6.41)$$

e per il caso relativistico

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M^{4/3}}{R^5} \quad (6.42)$$

Confrontando queste relazioni con la (6.38) si vede che nel caso non relativistico le due forze hanno potenze diverse del raggio. Quindi, per un valore fissato della massa, la stella può raggiungere un equilibrio modificando il raggio. Ad esempio, se la forza di pressione è troppo grande, la stella si espande e questa espansione fa diminuire più velocemente la forza di pressione che quella gravitazionale. L'espansione termina quando si raggiunge una nuova situazione di equilibrio.

Nel caso relativistico, forza di pressione e gravitazionale hanno la stessa potenza in R . Quindi il processo di riequilibrio descritto sopra non è possibile. D'altra parte la potenza delle masse è diversa. Deve esistere quindi un valore preciso della massa, la massa di Chandrasekhar, per la quale le due forze sono in equilibrio. Per valori della massa maggiori del valore limite, l'interazione gravitazionale domina sulla pressione, indipendentemente dal valore del raggio. La stella non riesce a trovare un equilibrio a meno di emettere della massa. Nel caso opposto, la massa è inferiore al valore limite, la forza di pressione è superiore a quella gravitazionale e la stella si espande. Nel processo di espansione, la densità della stella, almeno nelle sue parti esterne, diminuisce, diminuendo il valore dell'impulso di Fermi, e quindi quello dell'energia cinetica delle particelle. Si raggiunge quindi la situazione in cui il gas è non relativistico, e quindi si può trovare un valore del raggio che permette l'equilibrio tra le due forze.

Riassumendo, per valori della massa inferiori alla massa di Chandrasekhar è possibile trovare un valore del raggio per il quale ci sia equilibrio tra attrazione gravitazionale e repulsione per pressione da principio di Pauli, questo non è possibile per masse con valori superiori, nelle quali l'attrazione gravitazionale domina per ogni valore del raggio.

Capitolo 7

Supernovae

Dal punto di vista osservativo le curve di luce delle *novae* e delle *supernovae* appartengono a quella classe di fenomeni celesti che presentano variabilità in tempi di osservazione umani. I fenomeni di nova sono interpretati in termini di collasso di sistemi binari [Uns83].

Le supernovae sono catalogate in due classi caratterizzate dai spettri luminosi. Lo spettro di supernovae di tipo I è ricco di elementi pesanti e povero di linee di idrogeno. A loro volta, queste supernovae sono catalogate nelle categorie a, b e c. Le supernovae di tipo Ia hanno curve di luce molto simili tra di loro. Si pensa che siano generate dall'esplosione di una nana bianca di un sistema binario. La nana bianca accresce attraendo materia dalla stella compagna. La massa del core di carbonio e ossigeno aumenta. Il carbonio accende una combustione e forma un'onda d'urto che viaggia verso l'esterno fino a fare esplodere la stella. [Bet85, Rol88].

Più interessanti per gli argomenti che stiamo trattando, sono le supernovae di tipo Ib, Ic e II. Le curve di luce di queste supernovae sono piuttosto irregolari. La loro luminosità rimane quasi costante per 50-100 giorni e poi diminuisce rapidamente di ordini di grandezza in pochi giorni. Si osserva che in circa il 40% dei casi di esplosione di queste supernovae viene prodotta una *pulsar*, che si ritiene sia una stella di neutroni rapidamente rotante, vedi Cap. 8. E' plausibile ritenere che negli altri casi, il campo magnetico non sia sufficientemente potente da produrre una pulsar, oppure che si sia formato un buco nero.

L'idea è che le supernovae di tipo Ib, Ic e II rappresentino uno degli stati evolutivi delle stelle con massa superiore a 5 volte la massa solare. Queste stelle, una volta esaurito tutto il combustibile nucleare a loro disposizione, collassano sotto la spinta dell'interazione gravitazionale prodotta dalla loro massa. In questo processo di collasso si forma un'onda d'urto che espelle le parti più esterne della stella, e questo produce il fenomeno di rapida crescita della luminosità che viene osservato. Al centro della stella esplosa si forma una stella di neutroni, oppure quando la stella è estremamente massiva ($M > 30 M_{\odot}$), un buco nero.

Analizzando un evento di supernova dal punto di vista spettroscopico e fotometrico si trova che la quantità di energia emessa in termini di fotoni è circa 10^{42} J. Si stima che questo sia soltanto circa lo 0.01% dell'energia prodotta dall'esplosione della stella. La maggior parte dell'energia viene trasportata principalmente da neutrini. Si stima anche che in una esplosione di supernova vengano emessi circa 10^{46} J/s, una quantità che corrisponde a circa $10^{20} L_{\odot}$. La luminosità di una supernova è maggiore a quella dell'intera galassia.

A partire dagli anni trenta [Baa34] si sono sviluppati vari modelli per spiegare il meccanismo che porta all'esplosione di una stella massiva. Noi presenteremo il modello che è attualmente il più accreditato, nel senso che è quello che ha resistito più degli altri ai limiti imposti dal continuo accumularsi di dati osservativi da riprodurre.

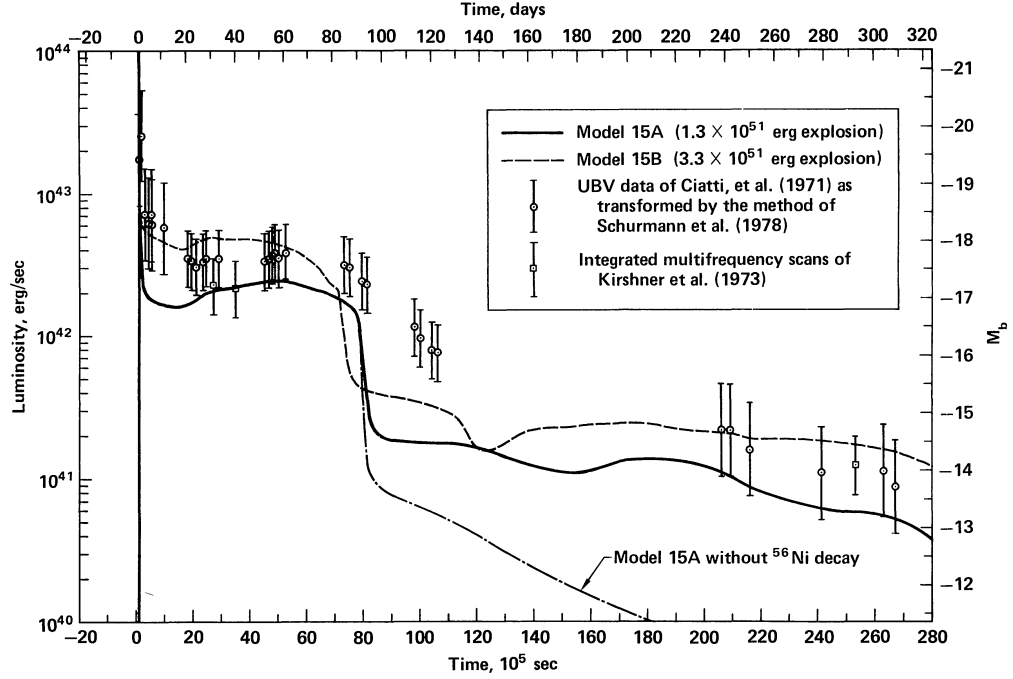


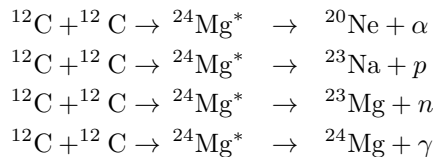
Figura 7.1: Curva di luce prevista per un modello di supernova con $15 M_{\odot}$ confrontata con le osservazioni della SN1969I [Wos86].

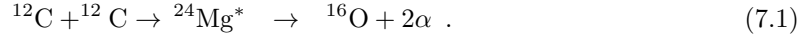
Il collasso di una supernova è uno dei problemi più difficili dell'astrofisica teorica. La difficoltà è in parte dovuta ai complicati meccanismi che intrecciano reazioni nucleari, idrodinamica, collasso gravitazionale, trasporto di neutrini in situazioni fisiche estreme, difficilmente riproducibili nei laboratori terrestri. Coscienti di questi limiti presenteremo comunque le idee principali del modello.

7.1 Presupernova

Abbiamo visto nella sezione 5.2 che per stelle con massa dell'ordine di una massa solare, la combustione nucleare termina con la formazione di ^{12}C e ^{16}O . Se la stella ha una massa inferiore alla massa di Chandrasekhar, si forma una stella nana bianca stabile, sostenuta dalla pressione del gas relativistico di elettroni, come abbiamo descritto nel capitolo 6. Nella sezione 5.2 abbiamo anche spiegato perché la combustione dell'elio si ferma alla produzione di ^{12}C e ^{16}O .

Per stelle con massa superiore a quella di Chandrasekhar si possono innescare processi di reazione tra nuclei pesanti. A temperature dell'ordine dei 10^9 K e densità di 10^2 kg/m³ inizia la fusione del carbonio. La massa di due nuclei di carbonio è circa di 14 MeV maggiore della massa del ^{24}Mg , che quindi si trova in uno stato eccitato. Questa quantità di energia permette il decadimento dello stato eccitato del ^{24}Mg in diversi canali. Si hanno le seguenti reazioni:





La probabilità di decadimento di ognuna delle prime due reazioni è poco meno del 50%. Le ultime tre reazioni sono estremamente rare. Protoni e α sono rapidamente catturati in modo da formare, in ordine di abbondanza ^{24}Mg , ^{25}Mg , ^{26}Mg , ^{27}Al , ^{28}Si .

Quando il combustibile di carbonio si esaurisce, il core delle stella si contrae ulteriormente e la temperatura si innalza. I fotoni della coda ad alta energia della distribuzione di Planck sono sufficientemente energetici da rendere importante il ruolo della fotodissociazione del ^{20}Ne soprattutto attraverso la reazione



Le particelle α prodotte in questo modo reagiscono con il ^{20}Ne non dissociato e producono ^{24}Mg . Al termine di questo processo di combustione del neon, processo che dura un periodo relativamente breve, rimane un core composto da ^{16}O e ^{24}Mg . A temperature di $2 \cdot 10^9$ K iniziano le reazioni tra nuclei di ossigeno che producono soprattutto silicio e zolfo, ma anche, in misura minore, calcio, argo, potassio, cloro e scandio attraverso una serie di complicate reazioni nucleari.

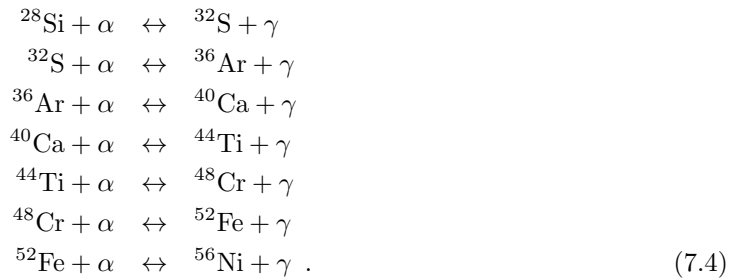
Il processo di combustione di ossigeno produce essenzialmente ^{28}Si , grazie alla fusione di due nuclei di ^{16}O .



Perché possano avvenire processi di fusione tra due nuclei di ^{28}Si sono necessarie temperature di circa $3.5 \cdot 10^9$ K. Prima di raggiungere queste temperature i processi di disintegrazione del silicio diventano così importanti da dominare i processi di fusione. Il numero di fotoni cresce come la quarta potenza della temperatura. Ne risulta che, alle temperature indicate, i nuclei di silicio si trovano immersi in un gas di fotoni.

Per un nucleo come il ^{28}Si , l'energia di separazione di un nucleone è di circa 8 MeV ed è molto vicina all'energia di separazione della particella α . Questo è dovuto alla grande energia di legame dell' α . Per questo motivo, processi del tipo (γ, p) , (γ, n) e (γ, α) , sono molto attivi nella disintegrazione dei nuclei di ^{28}Si . La presenza di protoni, neutroni e α liberi permette il loro assorbimento da parte di nuclei non dissociati, formando così nuclei sempre più stabili.

Ad esempio una possibile catena di reazioni che coinvolge particelle α può essere:



In aggiunta alla fotodisintegrazione e ai processi di cattura radiativa (p, γ) , (n, γ) e (α, γ) hanno luogo anche reazioni del tipo (α, n) , (α, p) , (p, n) , e le loro inverse. In ogni reazione il sistema cerca di raggiungere l'assetto più stabile. In questo complicato sistema di reazioni nucleari il core di ^{28}Si si trasforma in un core costituito da nuclei più pesanti, e con maggiore energia di legame per nucleone. Dato che il ^{28}Si è particolarmente stabile, la fotodisintegrazione di questo nucleo è il processo più lento. Questa reazione rimane in equilibrio con le varie centinaia di reazioni attivate a questa temperatura. La scala temporale del processo di formazione di nuclei pesanti rimane quindi fissata dal tasso di reazioni di fotodisintegrazione del silicio. Questo processo di combustione del silicio termina con la produzione di ^{56}Fe che è il nucleo con massima energia di legame per nucleone, vedi la figura 3.1.

In questo processo di formazione del core di ^{56}Fe viene liberata energia nucleare, soprattutto in termini di neutrini che fuggono dalla stella. In questa fase della sua evoluzione, la stella ha una grande luminosità neutrinica. L'emissione di neutrini è il meccanismo di raffreddamento del core della stella, che deve bruciare il suo combustibile nucleare sempre più velocemente per compensare l'attrazione gravitazionale. La vita della stella in questa fase è relativamente breve, e la probabilità che venga osservata è molto piccola.

La formazione del core di ferro e nichel, è il punto di arrivo dei processi di fusione in una stella. Non è possibile formare nuclei più pesanti senza perdere energia. In termini di stabilità nei confronti dell'attrazione gravitazionale che porta al collasso della stella, il core di ferro è quanto di più denso si possa ottenere.

Nuclei	ρ (kg/m ³)	T (K)	t
$^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^6$ y
$^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}, ^{16}\text{O}$	10	$2 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^5$ y
$^{12}\text{C} \rightarrow ^{20}\text{Ne}$	10^2	$5 \cdot 10^8$	600 y
$^{20}\text{Ne} \rightarrow ^{16}\text{O}$	10^3	$1 \cdot 10^9$	1 y
$^{16}\text{O} \rightarrow ^{28}\text{Si}$	10^3	$2 \cdot 10^9$	0.5 y
$^{28}\text{Si} \rightarrow ^{56}\text{Ni}$	10^4	$4 \cdot 10^9$	1 d
$^{56}\text{Ni}, ^{56}\text{Fe}$	$> 10^4$	$> 4 \cdot 10^9$	1 s

Tabella 7.1: Strati della stella presupernova. Sono mostrate le reazioni che avvengono al passaggio da uno strato a quello successivo, le densità, le temperature e i tempi di formazione dello strato. I calcoli sono fatti per una stella di $25 M_{\odot}$ [Bet85, Rol88].

La struttura della stella a questo punto del suo stadio evolutivo è sintetizzata nella tabella 7.1. La stella è formata da diversi strati ognuno di questi costituito prevalentemente da uno specifico elemento. La parte più esterna è molto simile a quella del sole ed è formata da idrogeno ed elio. Addentrandosi verso il centro della stella si incontrano strati dominati da ossigeno, neon, silicio e ferro. In questo processo di discesa verso il centro della stella aumentano densità e temperatura. Ai limiti di ogni strato sono accese delle reazioni nucleari che bruciano man mano i vari elementi che formano lo strato più esterno, trasformandoli in elementi dello strato più interno. Ad esempio tra i due strati più esterni c'è una zona di combustione dell'idrogeno in elio.

La struttura dettagliata di questa stella presupernova è fissata dal valore della massa iniziale della stella. Ovviamente i dettagli delle reazioni nucleari sono rilevanti per poter ottenere il profilo della stella. Per una stella di $25 M_{\odot}$ si ha che lo strato di idrogeno contiene circa $15 M_{\odot}$, e quello di elio circa 2. Lo strato più interno di ferro è ha una massa di circa $2 M_{\odot}$.

7.2 Innesco del collasso

Una volta formato il core di Fe la stella si regge grazie alla pressione del gas degeneri di elettroni, con lo stesso meccanismo descritto nel capitolo 6 per le nane bianche. Anche in questo caso la massa di Chandrasekhar indica il massimo valore della massa in cui l'attrazione gravitazionale e la pressione del gas di elettroni degeneri si compensano.

Una volta superato il valore della massa di Chandrasekhar la stella si contrae nuovamente. Visto quanto detto nei capitoli precedenti questo fatto dovrebbe aumentare la temperatura, la pressione, e quindi il sistema dovrebbe raggiungere una nuova situazione di equilibrio. Al contrario, nel caso delle supernovae la contrazione del core di ferro, innesca un processo che conduce al collasso del core e alla produzione di un'onda d'urto.

La pressione è determinata da due fattori, il numero di particelle di un sistema e la loro energia cinetica media. Nel core di ferro contribuiscono alla pressione sia gli elettroni sia i nuclei, ma il contributo della componente elettronica è molto più grande perché gli elettroni sono più numerosi.

Alla temperatura di circa 10^{10} K il numero di fotoni con energia superiore a 8 MeV, che possono quindi indurre la fotodissociazione del ferro, è sufficientemente grande perché una frazione significativa dei nuclei di ferro si disintegri. Una catena di complicate reazioni nucleari porta al risultato che una frazione di nuclei di ferro viene dissociata secondo la reazione:

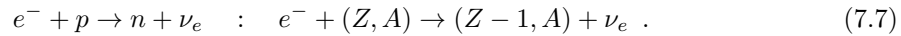


Questa reazione assorbe una quantità di energia pari a

$$Q = (13m_\alpha + 4m_n - m_{Fe})c^2 \sim 124\text{ MeV} , \quad (7.6)$$

che viene sottratta agli elettroni del core, che in tal modo si raffreddano, con conseguente diminuzione della pressione. Per compensare questa perdita di energia si ha un'ulteriore contrazione della stella che aumenta la propria temperatura, incrementando anche il valore medio dell'energia dei fotoni, e quindi aumentando anche il numero di processi di fotodissociazione.

A densità e temperature sufficientemente alte si innesca un altro processo fisico che contribuisce a creare instabilità nella stella. Si tratta della cattura elettronica

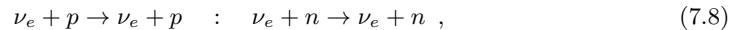


Questo processo riduce il numero di elettroni e quindi riduce la pressione di degenerazione elettronica, e contribuisce a far perdere stabilità al sistema.

7.3 Intrappolamento dei neutrini

Inizialmente i neutrini prodotti dai processi di cattura elettronica (7.7) sfuggono dalla stella. Si ha un cambiamento profondo del processo di collasso quando la densità raggiunge il valore di $4 \cdot 10^9$ kg/m³. Questo non è il massimo valore che la densità può raggiungere secondo i processi presentati nella sezione 7.2, ma a queste densità il core diventa opaco ai neutrini.

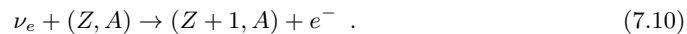
La stima della densità critica per l'intrappolamento dei neutrini è un problema cruciale per lo studio delle supernovae, dato che questa densità determina la massa del core che collassa. I processi a cui sono soggetti i neutrini prodotti dalla (7.7) sono: processi di diffusione su nucleoni liberi,



processi di diffusione su nuclei, detti di *diffusione coerente*



Questi sono processi indotti da corrente debole neutra. Ovviamente ci sono anche processi di corrente carica, che implicano l'assorbimento del neutrino:



A questi processi su nucleoni e nuclei, si aggiungono processi di diffusione su elettroni:



che possono essere indotti sia da correnti cariche sia da correnti neutre. Lo studio delle varie sezioni d'urto [Sha83] indica che il processo più importante è quello della diffusione di neutrini su nuclei (7.9) la cui sezione d'urto risulta proporzionale ad A^2 . Una stima del libero cammino medio basata su un'espressione approssimata della sezione d'urto dei neutrini su nuclei indica [Cos03]:

$$\lambda_\nu \sim 2.6 \rho_9^{-5/3} 10^2 \text{ m} , \quad (7.12)$$

dove la densità ρ_9 è espressa in unità di 10^9 kg/m^3 . Il libero cammino medio dei neutrini alla densità di intrappolamento di 10^9 kg/m^3 è quindi di circa 0.26 km. Si stima che il core della stella che collassa abbia un raggio di circa 100 km. Il tempo impiegato dal neutrino per sfuggire dal core è

$$t_{esc} \simeq \frac{R^2}{c\lambda_\nu} \sim 0.1 \text{ s} , \quad (7.13)$$

da confrontare con i tempi del collasso che sono dell'ordine di 0.001 s [Bro82, Bet85].

In [Bro82] si stima $\lambda_\nu = 1.2 \text{ km}$ e un raggio di circa 30 km per il core che collassa.

I neutrini intrappolati si muovono coerentemente con il materiale che collassa. La regione in cui i neutrini sono intrappolati è detta *neutrinosfera*, in analogia con la fotosfera. I neutrini intrappolati interagiscono con i nuclei secondo i processi inversi rispetto a quelli di cattura elettronica (7.7), e si forma quindi un equilibrio tra le varie reazioni. A questo punto del processo di collasso, si stima che il numero di leptoni per barione sia [Bro82]:

$$Y_l = Y_e + Y_{\nu_e} \sim 0.33 - 0.40 . \quad (7.14)$$

Questo numero si avvicina al valore di Y_e all'inizio del collasso (~ 0.5) ed è molto differente dal quello di una stella di neutroni (0.05). Il grosso della neutronizzazione del core non avviene in questa fase di collasso.

Il problema è quello di sapere come cambia la pressione con l'aumento della densità e della temperatura. Nel sistema che stiamo considerando il maggiore contributo alla pressione è ancora quello degli elettroni, anche dopo l'intrappolamento dei neutrini. Questo perchè la pressione è direttamente legata al numero di particelle libere, quindi i 56 nucleoni del nucleo di ferro forniscono alla pressione lo stesso contributo di un protone isolato. Se i nuclei di ferro si disintegrassero in 56 nucleoni la pressione nucleonica legata al principio di esclusione di Pauli per i nucleoni sarebbe sufficiente per fermare la contrazione. Questo non avviene perchè l'entropia del sistema è troppo bassa [Bet79]. Un core di supernova fatto di protoni e neutroni liberi avrebbe entropia tra 5 e 8 k_B , mentre calcoli e simulazioni indicano nel nostro caso un valore dell'entropia di circa 1 k_B [Bet79, Sha83, Bet85]. Il basso valore dell'entropia di questo sistema, e la sua conservazione, implica che il collasso avvenga in maniera adiabatica e che non si formino nuclei ricchi di neutroni oltre la linea di gocciolamento neutronico. Per questo motivo il core della stella di neutroni rimane costituito da nuclei con un rapporto tra neutroni e protoni circa uguale all'unità. Non si formano nuclei ricchi di neutroni che porterebbero all'evaporazione dei neutroni e alla conseguente formazione di un gas di neutroni.

Dato che la pressione della materia è esercitata principalmente dagli elettroni, e non si hanno modifiche sostanziali dello stato della materia, il collasso continua fino a quando si raggiunge la densità di saturazione della materia nucleare $\rho_0 \simeq 2.7 \cdot 10^{11} \text{ kg/m}^3$. A questo punto i nuclei si fondono tra loro formando un core di materia nucleare che ha un grosso valore del modulo di compressione. La materia nucleare è di fatto incompressibile, quindi il collasso si ferma. Questo arresto è la sorgente dell'onda d'urto.

E' da notare che la formazione del core di materia nucleare nella supernova avviene ad altissime temperature. La stella di neutroni è invece un sistema a temperatura nulla.

7.4 Collasso omologo ed onda d'urto

La massa di Chandrasekhar è stata definita nella sezione 6.3, come la massa massima che può reggere la pressione di degenerazione degli elettroni. A questo punto il suo significato cambia diventando la massa massima che collassa come singola unità. Le parti di questa unità comunicano tra di loro attraverso onde sonore e di pressione in modo tale che le variazioni di densità sono immediatamente livellate. Questa parte del core collassa in maniera *omologa* mantenendo la sua forma.

Si parla di collasso omologo quando la velocità di collasso di una parte del sistema dipende dalla sua distanza dal centro del sistema. Chiamiamo $r(0)$ la distanza r di un punto materiale dal centro del sistema al tempo $t = 0$. Definiamo una funzione del tempo $\alpha(t)$ in modo tale che descriva l'evoluzione temporale della posizione del punto materiale

$$r(t) = \alpha(t)r(0) . \quad (7.15)$$

Il collasso si dice *omologo* se la velocità u del punto materiale è data da:

$$u(t) = r(0) \frac{d\alpha(t)}{dt} , \quad (7.16)$$

e la densità, proporzionale a $[r(t)]^{-3}$, scala come:

$$\rho(r[t], t) = \frac{\rho(r[0], t = 0)}{\alpha(t)^3} . \quad (7.17)$$

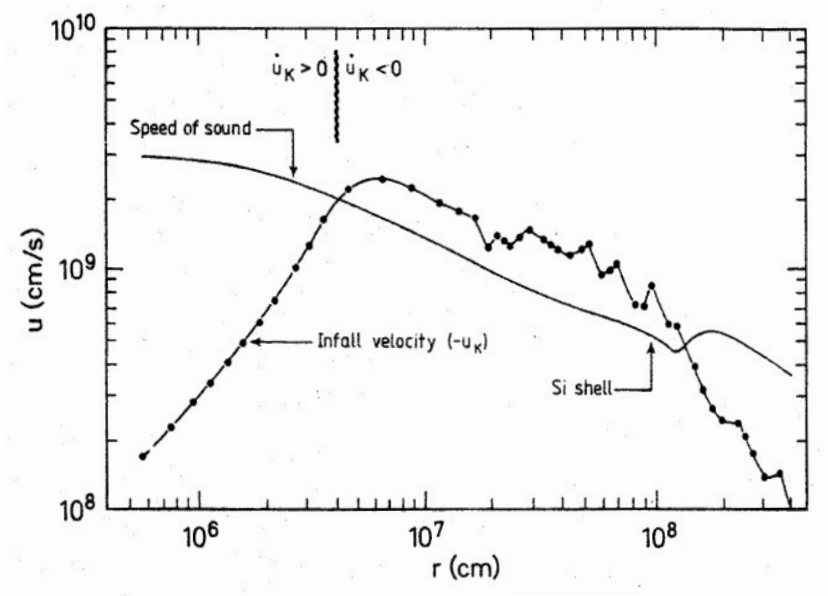


Figura 7.2: Velocità del materiale e velocità del suono in funzione del raggio, circa 1 millisecondo prima del collasso [Arn77].

Mentre la velocità del materiale che collassa aumenta con la distanza dal centro, la densità diminuisce, e quindi anche la velocità del suono diminuisce, come mostra la figura 7.2. Il punto in

cui la velocità del suono e quella del collasso sono uguali si chiama *punto sonico*. Una perturbazione che si produce a distanze dal centro della stella inferiori a quella del punto sonico non ha influenza sul materiale esterno.

Nel punto sonico le onde sonore si muovono verso l'esterno alla velocità del suono, misurata nel sistema di riferimento del materiale che collassa. Dato che questo materiale collassa alla velocità del suono, ne risulta che le onde sonore sono ferme rispetto al centro della stella.

Quando il centro del core che collassa raggiunge la densità di materia nucleare si arresta improvvisamente. Questo provoca la formazione di un'onda sonora che si muove verso l'esterno della stella. La velocità dell'onda sonora rallenta, sia perché la densità diminuisce, sia perché si muove in direzione opposta rispetto al materiale che collassa sempre più velocemente. Al punto sonico l'onda sonora si arresta. Nel frattempo altro materiale è caduto sul core di materia nucleare, producendo altre onde sonore. Per una frazione di millisecondo le onde sonore si accumulano al punto sonico producendo pressione. Il picco di pressione rallenta il materiale che collassa attraverso il punto sonico e crea una discontinuità nella velocità. Questa discontinuità produce l'onda d'urto.

L'onda d'urto differisce dall'onda sonora perché produce dei cambiamenti permanenti del sistema e poi perché si muove a velocità superiori a quella del suono.

Le equazioni dell'idrodinamica ammettono soluzioni discontinue, ovvero tali che, su certe superfici, tutte le quantità fisiche che descrivono il sistema sono discontinue. L'onda d'urto è descritta da una soluzione discontinua delle equazioni idrodinamiche. L'onda d'urto contiene una superficie di separazione del materiale con proprietà fisiche distinte, in cui però c'è un flusso di massa, impulso ed energia.

Consideriamo una generica variabile idrodinamica J (impulso, energia, massa, ...) ed indichiamo con gli indici 1 e 2 le quantità rispettivamente prima e dopo la superficie di discontinuità. Le equazioni idrodinamiche possono essere espresse nella forma [Vie06]:

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad , \quad (7.18)$$

dove x indica la coordinata ortogonale alla superficie di separazione, che per comodità viene normalmente posizionata a $x = 0$. Se consideriamo un intervallo di lunghezza 2η attorno alla superficie di discontinuità, abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{dJ}{dx} dx = J_2 - J_1 = [J] = 0 \quad , \quad (7.19)$$

dove abbiamo utilizzato il simbolo $[X] \equiv X_2 - X_1$.

Dalle equazioni differenziali dell'idrodinamica che implicano la conservazione delle varie quantità otteniamo:

$$[\rho v_x] = 0 \quad \text{massa} \quad (7.20)$$

$$\left[\rho \left(\frac{1}{2} v_x^2 + w \right) \right] = 0 \quad \text{energia} \quad (7.21)$$

$$[p + v_x^2] = 0 \quad \text{impulso} \quad (7.22)$$

$$[\rho v_x v_y] = [\rho v_x v_z] = 0 \quad \text{impulso} \quad . \quad (7.23)$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con v_i le varie componenti della velocità del fluido, con p la pressione esercitata sulla superficie di discontinuità, con ρ la densità di massa e con w la densità di entalpia

$$w = \frac{U}{V} + p \quad (7.24)$$

con U energia interna e V volume del sistema. Le equazioni (7.20-7.23) sono dette condizioni di Rankine-Hugoniot.

Per risolvere in forma chiusa le equazioni (7.20-7.23) bisogna avere un'equazione di stato del sistema. Per un fluido ideale con un rapporto γ tra i calori specifici si ha che:

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{v_s}{\gamma - 1} = c_p T, \quad (7.25)$$

dove R è la costante dei gas, v_s la velocità del suono, c_p il calore specifico a pressione costante, e, come sempre, T la temperatura. Definiamo il numero di Mach dello shock come $M_1 = v_1/v_{s1}$, il rapporto tra la velocità del fluido e quella del suono. Utilizzando l'espressione dell'entalpia e le condizioni di Rankine-Hugoniot, otteniamo le seguenti relazioni che dipendono solo dalla velocità del materiale prima dell'onda d'urto.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (7.26)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (7.27)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (7.28)$$

e il numero di Mach dopo l'onda d'urto è:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}. \quad (7.29)$$

Per valori di $M_1 \gg 1$ le equazioni (7.26-7.28) si semplificano. Si può vedere che l'onda d'urto produce un'aumento della densità modesto (un fattore 4 per $\gamma = 5/3$). Al contrario l'aumento della temperatura è notevole perché proporzionale a M_1^2 . La velocità del fluido dopo la superficie di discontinuità è inferiore a quella prima della superficie. L'onda d'urto trasforma l'energia cinetica in energia interna e produce un aumento di entropia del sistema. Se imponiamo $M_1 < 1$ abbiamo dall'equazione (7.26) che $v_1 < v_2$ e dalla (7.28) che $T_1 > T_2$. Questo significa che in questo caso parte dell'energia interna del sistema è stata trasformata in energia cinetica, calore, senza produrre nient'altro. Questo tipo di trasformazioni, in cui l'unico risultato è la trasformazione di calore in lavoro, è proibito dal secondo principio della termodinamica. Quindi onde d'urto subsoniche, cioè con $M_1 < 1$, sono proibite dal secondo principio della termodinamica. **Le onde d'urto sono sempre supersoniche.** Inoltre l'entropia del sistema deve aumentare, quindi $s_2 > s_1$.

Una volta formata l'onda d'urto, che ha velocità supersonica, continua il suo percorso verso l'esterno della stella attraversando gli strati che si trovano al di là del core che è collassato in maniera omologa. L'onda d'urto raggiunge la superficie del core di ferro in una frazione di secondo, poi si fa strada negli strati più esterni della stella, e dopo alcuni giorni produce una violenta esplosione. Tutto il materiale della stella al di là di un certo raggio viene disperso dall'esplosione. Il materiale all'interno di questo raggio invece condensa in una stella di neutroni, o in un buco nero.

Solo recentemente questo scenario è stato confermato da risultati quantitativi. Per permettere all'onda d'urto di far esplodere la supernova è stato necessario considerare complicati moti convettivi che distruggono la simmetria sferica del sistema. Nelle simulazioni con simmetria sferica l'onda d'urto perdeva energia dissociando il ferro, e, ad una distanza compresa tra i 200 e 300 km dal centro della stella, si ferma, rimanendo sempre nella stessa posizione mentre il materiale continuava a cadere attraverso la sua superficie.

Il processo di dissociazione dei nuclei di ferro in nucleoni assorbe energia perché è endotermico, ma anche perché i protoni liberi si convertono in neutroni catturando elettroni, e anche questo processo richiede energia. Nel processo di cattura elettronica vengono prodotti neutrini elettronici

che inizialmente si accumulano sotto il fronte dell'urto dove la materia è ancora opaca, ma poi vengono emessi dalla stella. Anche questo processo faceva perdere energia all'onda d'urto.

Simulazioni che considerano tempi dell'ordine del secondo indicano che i neutrini emessi dal core collassato della stella che si sta raffreddando sono assorbiti per circa il 10% dalle parti più esterne della stella. Se l'energia depositata dai neutrini è dell'ordine di 10^{44} J, quantità chiamata *foe*, l'onda d'urto può essere rivitalizzata e produrre quindi l'esplosione.

I neutrini sono assorbiti con processi di dissociazione nucleare depositano energia e quindi scaldano il materiale, aumentandone la pressione. Il processo di riscaldamento da parte dei neutrini avviene a circa 150 km dal centro della stella, dove la probabilità di assorbimento dei neutrini non è troppo bassa, da essere trascurabile, e la materia non è troppo calda da essere essa stessa un sorgente di neutrini.

A questa distanza la pressione cresce in modo da fermare la caduta libera del materiale che si trova al di là di questa distanza. Questo materiale viene spinto a distanze maggiori. Quindi 150 km indicano il raggio di biforcazione. Il materiale a distanze inferiori a questo raggio cade nel core, mentre la materia al di là di questa distanza viene espulsa dalla stella.

7.5 Il raffreddamento

A questo stadio evolutivo della supernova, rimane un core residuo formato da materia nucleare ad alta temperatura, 10^{11} K. Il raffreddamento di questa protostella avviene per emissione di neutrini, e antineutrini. La principale sorgente di neutrini è data dai processi:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad e \quad p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad , \quad (7.30)$$

detti processi URCA.

Sembra che URCA fosse una casa da gioco di Rio de Janeiro, dove George Gamow vide sparire denaro così velocemente da ricordargli la veloce perdita di energia per mezzo dell'emissione di neutrini, nel raffreddamento della protostella di neutroni.

Associati ai processi URCA, che sono le principali sorgenti di produzione di neutrini e antineutrini elettronici, si hanno anche processi in cui vengono prodotti neutrini di tutte le specie:

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{annichilazione coppie } e^+e^- \quad , \quad (7.31)$$

$$e^\pm + (p, n) \rightarrow e^\pm + (p, n) + \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{bremsstrahlung elettrone-nucleone} \quad , \quad (7.32)$$

$$\gamma + e^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{fotoannichilazione} \quad . \quad (7.33)$$

Dal punto di vista energetico la fase di raffreddamento per emissione di neutrini trasporta il 90% dell'energia totale della supernova. Questo processo di raffreddamento dura pochi secondi.

Una stima del tempo di raffreddamento può essere fatta confrontandolo con il tempo di diffusione caratteristico dei neutrini all'interno della protostella.

$$t_{\text{cool}} \simeq t_{\text{diff}} \simeq \frac{R^2}{c < \lambda_\nu >} \quad , \quad (7.34)$$

dove R è il raggio della protostella di neutroni e $\langle \lambda_\nu \rangle$ è il libero cammino medio dei neutrini, mediato sull'intera stella di neutroni. Possiamo stimare il valore di $\langle \lambda_\nu \rangle$ come:

$$\langle \lambda_\nu \rangle \simeq \frac{1}{n \langle \sigma_\nu \rangle} , \quad (7.35)$$

dove n è il numero di nucleoni per unità di volume e $\langle \sigma_\nu \rangle$ è la sezione d'urto media neutrino nucleone. Consideriamo il valore [Sha83]:

$$\langle \sigma_\nu \rangle \sim 1.7610^{-44} \text{ cm}^2 \left(\frac{\epsilon_\nu}{\text{MeV}} \right)^2 , \quad (7.36)$$

con ϵ_ν l'energia del neutrino. Utilizzando la densità di $\rho = 3 \cdot 10^{11} \text{ kg / m}^3$ abbiamo $n \sim 1.8 \cdot 10^{38}$ e quindi

$$\langle \lambda_\nu \rangle \simeq 3 \text{ km} \langle \epsilon_\nu / \text{MeV} \rangle^{-2} \quad (7.37)$$

Per $\epsilon_\nu \sim 15 \text{ MeV}$ otteniamo $\langle \lambda_\nu \rangle \sim 13 \text{ m}$. Ipotizzando $R \sim 200 \text{ km}$, come indicato nella sessione precedente, abbiamo che:

$$t_{\text{cool}} \simeq \frac{(2 \cdot 10^5 \text{ m})^2}{c \cdot 13 \text{ m}} \sim 10 \text{ s} . \quad (7.38)$$

Un quadro riassuntivo delle varie fasi relative al processo di esplosione delle supernovae è dato nella tabella 7.2. In questa tabella è stata messa in evidenza la produzione di neutrini nelle varie fasi dell'esplosione. E' evidente che la rivelazione dei neutrini può fornire delle indicazioni precise sulla validità del modello sviluppato.

Il 23 febbraio 1987 sono stati rivelati neutrini emessi dall'esplosione di una supernova che solo dopo qualche ora è stata identificata nello spettro ottico. Si tratta della prima osservazione in cui neutrini e supernova vengono associati.

Fase	Descrizione	neutrini	Tempi	Energia
Collasso	Cattura elettronica. Intrappolamento dei neutrini.	ν_e ($e^- + p \rightarrow \nu_e + n$)	10-100 ms	$\sim 10^{44} \text{ J}$ $< 1\% E_n$
Onda d'urto	Il core rimbalza. L'onda d'urto raggiunge la neutrinofera.	$\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_x$ ($e^- + p \rightarrow \nu_e + n$)	Qualche ms	$\sim 3 \cdot 10^{44} \text{ J}$ $\sim 1\% E_n$
Accrescimento	L'urto va in stallo. Il mantello della PNS si accresce e si raffredda. L'urto si rivitalizza.	$\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_x$ ($e^- + e^+ \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i$)	$\sim 100 \text{ ms}$	$\sim 2 \cdot 10^{45} \text{ J}$ $\sim 10\% E_n$
Raffreddamento	La PNS si contrae e si raffredda.	$\nu_i + \bar{\nu}_i$ URCA + (7.31-7.33)	10 s	$\sim 10^{46} \text{ J}$ $\sim 90\% E_n$

Tabella 7.2: Quadro riassuntivo delle varie fasi del processo di esplosione di una supernova. E_n indica l'energia totale emessa durante il processo, e corrisponde all'energia di legame della stella di neutroni residua.

Il processo di raffreddamento della protostella di neutroni non termina qui, e il suo destino finale è determinato dalla sua massa. Al momento l'alta temperatura produce pressione sufficiente per contrastare l'attrazione gravitazionale. Se la massa supera il valore della massa di Chandrasekhar dopo il raffreddamento si forma un buco nero.

Per protostelle con massa inferiore a $2.5 M_\odot$ il destino è quello della formazione di una stella di neutroni, che identifichiamo normalmente con una pulsar. Dopo il rapidissimo raffreddamento URCA, nell'arco di qualche giorno la temperatura della protostella è dell'ordine dei 10^9 K. A queste temperature il gas di nucleoni ed elettroni che forma la protostella comincia a diventare degenere e le reazioni URCA sono sopprese.

Consideriamo le energie di Fermi di protoni, neutroni ed elettroni

$$E_{F_n} \simeq m_n c^2 + \frac{p_{F_n}^2}{2m_n} \quad (7.39)$$

$$E_{F_p} \simeq m_p c^2 + \frac{p_{F_p}^2}{2m_p} \quad (7.40)$$

$$E_{F_e} \simeq p_{F_e} c \quad (7.41)$$

Il fatto che la stella sia elettricamente neutra implica che

$$p_{F_p} = p_{F_e} \quad (7.42)$$

come verrà discusso con maggiore dettaglio nella sezione 8.3.4. Combinando le equazioni precedenti otteniamo:

$$\frac{p_{F_n}^2}{2m_n} \simeq p_{F_e} c \left(1 + \frac{p_{F_e}}{2m_p c} \right) - (m_n - m_p) c^2 \quad (7.43)$$

trascurando il termine dove appare la differenza di massa, molto più piccolo degli altri termini, e considerando che $p_{F_e} \ll 2m_p c$ abbiamo:

$$\frac{p_{F_n}^2}{2m_n} \simeq p_{F_e} c = E_{F_e} \quad (7.44)$$

da cui abbiamo le relazioni

$$p_{F_e} = p_{F_p} \ll p_{F_n} \quad (7.45)$$

$$\frac{p_{F_p}^2}{2m_p} \ll \frac{p_{F_n}^2}{2m_n} \quad (7.46)$$

Consideriamo il decadimento del neutrone, come indicato in (7.30). I neutroni che decadono sono quelli vicini alla superficie di Fermi e hanno energia dell'ordine di $k_B T$. Per conservazione dell'energia anche protone, elettrone e neutrino devono avere energie dell'ordine di $k_B T$. Ma energie così alte sono in contrasto con la relazione (7.45) che richiede impulsi di Fermi di elettroni e protoni molto piccoli, rispetto all'impulso dei neutroni. Quindi c'è un contrasto tra conservazione di energia e dell'impulso. In realtà il processo URCA di decadimento del neutrone non è impedito, dato che il neutrino può prendere la maggior parte dell'energia e dell'impulso e garantire quindi che la (7.45) sia soddisfatta. Si tratta comunque di una situazione molto particolare rappresentata da una piccola porzione dello spazio delle fasi disponibile per il decadimento libero. Per questo motivo le reazioni URCA sono solo sopprese, non proibite.

I processi di raffreddamento continuano utilizzando la presenza di una particella intermedia che porta parte dell'impulso. Questi sono detti processi URCA modificati:

$$n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (7.47)$$

$$n + p + e^- \rightarrow n + n + \nu_e \quad (7.48)$$

Queste reazioni sono accompagnate anche da reazioni di emissione di neutrini muonici:

$$n + n \rightarrow n + p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (7.49)$$

$$n + p + \mu^- \rightarrow n + n + \nu_\mu . \quad (7.50)$$

I muoni sono presenti nella materia quando il potenziale chimico degli elettroni supera la massa a riposo del muone, come verrà discusso con maggiore dettaglio nella sezione 8.3.4. Data la grande massa dei leptoni τ , la produzione di neutrini τ non è rilevante. Ci sono altre reazioni che contribuiscono alla produzione di neutrini in questa fase di raffreddamento:

$$n + n \rightarrow n + n + \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{bremsstrahlung nucleonico} \quad (7.51)$$

$$n + p \rightarrow n + p + \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{bremsstrahlung nucleonico} \quad (7.52)$$

$$e^\pm + (Z, A) \rightarrow e^\pm + (Z, A) + \nu_i + \bar{\nu}_i \quad \text{bremsstrahlung elettrone-nucleone} \quad (7.53)$$

$$\pi^- + n \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{decadimento pionico} \quad (7.54)$$

$$\pi^- + n \rightarrow n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{decadimento pionico} \quad (7.55)$$

$$e^- + n \rightarrow n + \pi^- + \nu_e \quad \text{produzione pionica} \quad (7.56)$$

$$\mu^- + n \rightarrow n + \pi^- + \nu_\mu \quad \text{produzione pionica} . \quad (7.57)$$

Si tratta comunque di reazioni che contribuiscono per poche percentuali rispetto alle URCA modificate.

Questi processi di raffreddamento possono durare per migliaia di anni. L'energia persa per emissione di fotoni supera quella trasportata dai neutrini quando la temperatura scende sotto i 10^8 K. Questa è la temperatura del core neutronico della stella. La temperatura della superficie è circa due ordini di grandezza inferiore. Ovviamente queste stime di raffreddamento dipendono in maniera cruciale dagli ingredienti utilizzati per costruire il modello. Tipicamente si trova che temperature superficiali di 10^6 K sono raggiunte da stelle di circa 300 anni. Queste temperature implicano la possibilità di rivelare emissione di raggi X nella banda di 0.2-0.3 keV. Prima della scoperta delle radio pulsar, si pensava che un modo per identificare giovani stelle di neutroni fosse l'osservazione di questi raggi X provenienti dal loro raffreddamento.

La stella che rimane dopo la fase di raffreddamento è una stella di neutroni fredda.

Capitolo 8

Stelle di neutroni

L'esistenza di oggetti stellari composti da neutroni, fu ipotizzata da W. Baade e F. Zwicky [Baa34] poco dopo la scoperta del neutrone. Nel 1939 J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff [Opp39] fecero il primo calcolo dell'equazione di stato di una tale stella, stimando il valore massimo della massa attorno a $0.7 - 0.8 M_{\odot}$.

L'esistenza delle stelle di neutroni rimase una speculazione fino a quando nel 1967 fu identificato un segnale radio dal periodo di 1.337 secondi, proveniente da un preciso punto dello spazio [Hew68]. Oggi sono conosciute migliaia di sorgenti radio periodiche, dette **pulsar**. I periodi di emissione vanno da pochi secondi a qualche millisecondo. La frequenza di emissione delle pulsar ha enorme stabilità nel tempo. Le variazioni misurate del periodo di emissione, sempre in aumento, variano da 10^{-14} a 10^{-5} secondi per anno. Queste caratteristiche fanno ipotizzare che le pulsar siano oggetti stellari velocemente rotanti, dotati di intensi campi magnetici, che emettono radiazione in direzioni privilegiate, come fossero fari.

Il limite della velocità di rotazione di un corpo che rimane unito grazie all'interazione gravitazionale, è dato dall'eguaglianza tra l'attrazione gravitazionale e la forza centrifuga. Per una particella di massa unitaria che si trova all'equatore di una sfera omogenea rotante si ha:

$$G_N \frac{M}{R^2} = \Omega_{\max}^2 R ,$$

dove M e R indicano rispettivamente la massa e il raggio della stella, e $\Omega_{\max}$ la massima velocità angolare. Abbiamo quindi che:

$$\Omega_{\max} = \sqrt{G_N \frac{M}{R^3}} = \sqrt{G_N \frac{4\pi}{3} \bar{\rho}} ,$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità media della stella. Per una nana bianca si hanno delle densità medie dell'ordine di 10^9 kg/m^3 , ad esempio Sirio B ha una densità di circa $3.4 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3$. I periodi di rotazione

$$P = \frac{2\pi}{\Omega_{\max}} ,$$

sono dell'ordine di pochi secondi (6 s per Sirio B). Per la terra la velocità limite di rotazione è di circa 84 minuti.

Le grandi velocità di rotazione misurate, implicano che questi oggetti stellari devono avere alta densità di materia e dimensioni relativamente piccole. Questi fatti hanno spinto ad identificare le pulsar come stelle di neutroni rapidamente rotanti.

Misure di masse delle pulsar indicano valori delle masse delle stelle di neutroni superiori alla stima di Oppenheimer and Volkoff. Questa stima era stata fatta trascurando l'interazione tra le particelle che compongono il sistema, in analogia a quanto viene fatto per le nane bianche. L'evidente contraddizione con i valori osservati delle masse stelle di neutroni, inficia la validità di questa approssimazione. L'equilibrio della stella di neutroni non è solo determinato dalla pressione di Fermi, ma anche da effetti dinamici prodotti dall'interazione tra i neutroni.

Le attuali conoscenze modellizzano la stella di neutroni con una struttura a strati. Ovviamente i dettagli della struttura di questi strati sono legati alla precisa modellizzazione delle equazioni di stato. Possiamo classificare i vari strati nella sequenza che segue.

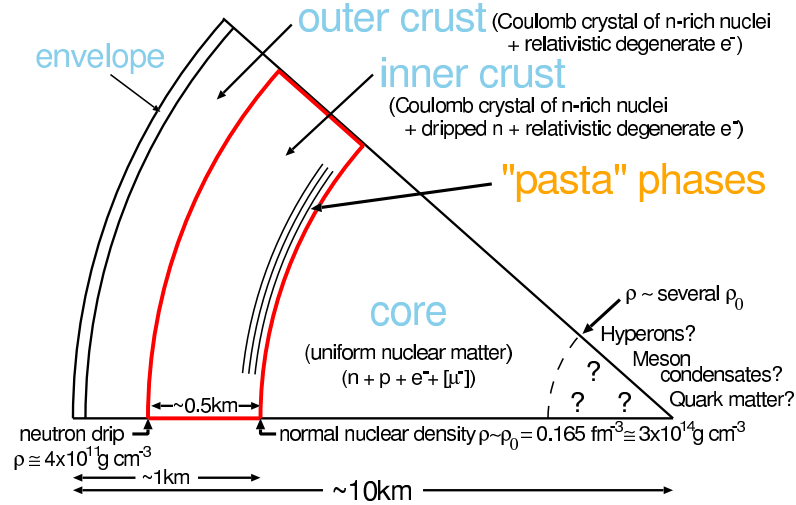


Figura 8.1: Struttura di una stella di neutroni.

- **Superficie.** La densità di questo strato è compresa tra $8.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e 10^9 kg/m^3 . La materia è composta da un reticolo di atomi di ^{56}Fe , che sono il prodotto finale dei processi di fusione (vedi la sezione 7.1). Aumentando la densità, e quindi la temperatura, sempre più elettroni si staccano dai rispettivi nuclei, e a densità di circa 10^7 kg/m^3 , c'è ionizzazione completa.
- **Crosta esterna.** Questo strato ha densità compresa tra 10^9 kg/m^3 e la densità detta di gocciolamento neutronico (neutron drip line) che si stima dell'ordine di $4.3 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$. La materia è composta da nuclei più pesanti del ^{56}Fe sistemati in un reticolo coulombiano ed in equilibrio da decadimento β con un gas relativistico e degenere di elettroni. Entrando più profondamente nella crosta, i nuclei diventano sempre più ricchi di neutroni poiché le reazioni di cattura elettronica $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ abbassano l'energia totale del sistema. Quando la densità raggiunge il valore di gocciolamento, i nuclei sono così ricchi di neutroni, che i neutroni prodotti dalla cattura elettronica non si legano più ai nuclei, e si trovano in stati del continuo.
- **Crosta interna.** Questa parte della crosta ha densità comprese tra il valore di gocciolamento e quello della pura materia neutronica, stimata tra 1.8 e $2.2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. In questo strato la

materia è composta da un reticolo di nuclei estremamente ricchi di neutroni inserito in un gas di elettroni ultrarelativistici e in un gas di neutroni.

- **Core di materia neutronica.** Per densità superiori a quelle dello strato precedente i nuclei si uniscono e si ha una trasformazione di fase della materia che produce la materia neutronica. In questa regione la stella consiste di materia neutronica in equilibrio per decadimento β con elettroni, positroni, muoni e antimuoni.
- **Core esotico.** Si ipotizza che per valori molto alti della densità, dalla materia neutronica si passi ad una forma di materia in cui la presenza di particelle differenti dai nucleoni diventa importante. Per definizione questo tipo di materia è definita esotica. L'eventuale presenza e la composizione di un core esotico ha notevoli conseguenze sulla proprietà della stella di neutroni.

8.1 La crosta

8.1.1 La crosta esterna

La formazione di un solido è possibile quando l'energia coulombiana che stabilizza la posizione di un atomo in un cristallo, è superiore all'energia cinetica prodotta dal moto termico dell'atomo:

$$\frac{Ze^2}{r_L} \gg k_B T, \quad (8.1)$$

dove r_L indica la distanza tra due atomi definita in termini della densità di numero degli ioni n_I come:

$$\frac{4\pi r_L^3}{3} = \frac{1}{n_I}. \quad (8.2)$$

Da quanto detto ci si aspetta che un solido si formi a temperature

$$T < T_{\max} = \frac{Ze^2}{r_L k_B} \propto Ze^2 n_I^{1/3}. \quad (8.3)$$

Nel caso del ferro, per densità di 10^{10} kg/m^3 , si ha solidificazione per $T \leq 10^8 \text{ K}$ in una struttura cubica a corpo centrale. Aumentando la densità aumenta $T_{\max}$ in modo che il solido rimane sempre formato. Tuttavia aumentando la densità, aumenta anche l'energia cinetica degli elettroni relativistici che compongono il gas in cui è immerso il reticolo di ioni. A densità da 10^{10} a 10^{14} kg/m^3 l'energia cinetica degli elettroni è tale da innescare una situazione in cui i processi di cattura elettronica, o decadimenti β inversi,

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e, \quad (8.4)$$

diventano energeticamente permessi, e quindi numerosi ed importanti per la struttura del sistema. Questi processi eliminano elettroni di alta energia e producono ν_e che lasciano la stella. Il processo di formazione del neutrone diventa permanente perché l'elettrone prodotto da un decadimento β avrebbe energia inferiore a quella di Fermi nel gas di elettroni, quindi la densità degli stati finali è nulla per il decadimento β . La cattura elettronica produce nuove specie di nuclei secondo sequenze del tipo

$$\text{Fe} \rightarrow \text{Ni} \rightarrow \text{Se} \rightarrow \text{Ge}. \quad (8.5)$$

Questo processo è chiamato di neutronizzazione perché i nuclei prodotti sono molto ricchi di neutroni.

Modellizziamo gli effetti del processo di cattura elettronica. Consideriamo un gas di protoni ed elettroni non interagenti a temperatura nulla. Ipotizzando nulla la massa del neutrino, e trascurandone l'interazione con il neutrone residuo, possiamo affermare che il processo (8.4) diventa energeticamente possibile quando l'energia dell'elettrone supera la soglia energetica della differenza di massa tra neutrone e protone:

$$\Delta = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV} . \quad (8.6)$$

La densità di elettroni che permette l'attivazione di questo processo può essere calcolata considerando che

$$\sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} = \Delta . \quad (8.7)$$

Dalla (6.7) abbiamo che:

$$\frac{p_F}{\hbar} = (3\pi^2 n_e)^{1/3} , \quad (8.8)$$

da cui

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{\Delta^2 - m_e^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right]^{3/2} \sim 7 \times 10^{36} \text{ m}^{-3} . \quad (8.9)$$

Per un sistema con ugual numero di protoni e neutroni, questo valore corrisponde ad una densità di massa di $7 \times 10^6 \text{ kg m}^{-3}$.

Consideriamo le condizioni necessarie perché un sistema formato da protoni, neutroni ed elettroni, sia in equilibrio rispetto a processi di cattura elettronica (8.4). In questo modello semplificato trascuriamo tutte le interazioni tranne quella debole. Cerchiamo il minimo della densità di energia $\epsilon(n_p, n_n, n_e)$ per variazioni delle densità di protoni n_p , neutroni n_n ed elettroni n_e . In questo sistema viene conservato il numero di barioni N_B , e quindi la densità barionica n_B . Inoltre il sistema è neutro, e la carica totale, nulla ovviamente, deve essere conservata. Questo implica $n_e = n_p$. Definiamo un funzionale

$$F(n_p, n_n, n_e) = \epsilon(n_p, n_n, n_e) + \lambda_B (n_B - n_p - n_n) + \lambda_Q (n_p - n_e) , \quad (8.10)$$

dove abbiamo indicato con λ_B e λ_Q i moltiplicatori di Lagrange. Il minimo del funzionale viene cercato per valori dei parametri tali che:

$$\frac{\partial F}{\partial n_p} = \frac{\partial F}{\partial n_n} = \frac{\partial F}{\partial n_e} = 0 , \quad (8.11)$$

con le condizioni aggiuntive

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_Q} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_B} = 0 . \quad (8.12)$$

Dalla definizione del potenziale chimico per una specie ($i = p, n, e$)

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_V = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_i} \right)_V , \quad (8.13)$$

e dalle (8.11) si ottengono le relazioni

$$\mu_p - \lambda_B + \lambda_Q = 0 ; \quad \mu_n - \lambda_B = 0 ; \quad \mu_e - \lambda_Q = 0 , \quad (8.14)$$

e quindi la condizione di equilibrio chimico

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e . \quad (8.15)$$

Calcoliamo il potenziale chimico della specie i utilizzando la definizione

$$\mu = \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = \frac{\partial p_F}{\partial n} \frac{\partial \epsilon}{\partial p_F} = \left(\frac{\partial p_F}{\partial n} \right) \frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial p_F} .$$

Utilizziamo l'espressione relativistica (6.14) dell'energia, e abbiamo

$$E = \frac{V}{4} \frac{\hbar c k_F^4}{\pi^2} ,$$

da cui

$$\frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial p_F} = \frac{1}{\hbar V} \frac{\partial E}{\partial k_F} = \frac{c}{\pi^2} k_F^3 .$$

Dalla relazione (6.7) che lega la densità al momento di Fermi abbiamo che:

$$\frac{\partial n}{\partial p_F} = \frac{\partial n}{\hbar \partial k_F} = \frac{k_F^2}{\pi^2 \hbar} .$$

Quindi

$$\mu = \frac{c}{\pi^2} k_F^3 \frac{\pi^2 \hbar}{k_F^2} = \hbar c k_F . \quad (8.16)$$

L'espressione (8.16) del potenziale chimico, è stata ottenuta considerando che la specie i sia un gas di fermioni non interagenti. Possiamo definire le frazioni di protoni e di neutroni come:

$$x_p = \frac{n_p}{n_B} = \frac{n_p}{n_p + n_n} , \quad x_n = \frac{n_n}{n_B} = 1 - x_p . \quad (8.17)$$

Gli impulsi di Fermi possono essere espressi in termini di frazione di protoni come:

$$k_{F_e} = k_{F_p} = [3\pi^2 x_p n_B]^{1/3} , \quad k_{F_n} = [3\pi^2 (1 - x_p) n_B]^{1/3} . \quad (8.18)$$

Per un valore fissato della densità barionica n_B , possiamo usare le espressioni precedenti per calcolare il valore del potenziale chimico (8.16) per ogni specie. Questi potenziali chimici, inseriti nelle equazioni (6.19) e (6.21), permettono di calcolare le pressioni dei gas di protoni, neutroni ed elettroni, la cui somma dà la pressione totale del sistema. Tutto dipende da una sola variabile, la frazione di protoni.

In realtà la modellizzazione proposta sopra è troppo semplificata, perchè quello che conta non è la differenza di massa tra neutrone e protone, ma piuttosto quella tra i due nuclei coinvolti nella reazione di cattura elettronica. La densità di energia per un insieme di nuclei di numero di massa A e carica Z , sistemato in un reticolo, e circondato da un gas di elettroni relativistici è:

$$\epsilon_T(n_B, A, Z) = \epsilon_e + \left(\frac{n_B}{A} \right) [M(A, Z) + \epsilon_L] . \quad (8.19)$$

Nell'equazione precedente ϵ_e indica la densità di energia degli elettroni, e ϵ_L l'energia elettrostatica del reticolo per ogni nucleo, eq. (8.1). Quest'ultimo termine può essere trascurato in una prima approssimazione. Per un valore fissato della densità di nucleoni n_B , la configurazione di equilibrio è data dalle condizioni

$$\frac{\partial \epsilon_T}{\partial A} = 0 , \quad \frac{\partial \epsilon_T}{\partial Z} = 0 . \quad (8.20)$$

La densità di energia degli elettroni è data dall'espressione (6.14) per elettroni relativistici. Il valore di $M(A, Z)$ può essere ottenuto utilizzando la formula semi-empirica della massa di Bethe-Weißacker

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \left[a_V A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta \right]. \quad (8.21)$$

Nell'equazione precedente sono messi in evidenza tra le parentesi quadre i termini di volume, superficie, coulombiano, simmetria e appaiamento. Utilizzando l'equazione (8.21) per il calcolo delle (8.20), si ottiene una relazione tra Z e A , che indica che Z cresce più lentamente di A al variare di n_B . Questo significa che aumentando la densità nucleonica aumenta il rapporto neutroni protoni, e si creano nuclei sempre più ricchi di neutroni.

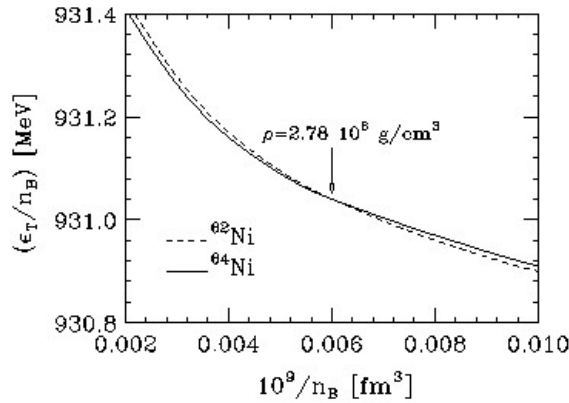


Figura 8.2: Densità di energia per due isotopi del nichel in funzione della densità barionica n_B .

In realtà anche questa trattazione è semplificata. I valori di A e Z sono discreti, e si possono utilizzare i valori misurati delle masse nucleari al posto della stima della formula semi-empirica della massa di Bethe-Weißacker. Inoltre si deve inserire l'energia di reticolo che abbassa ulteriormente l'energia totale del sistema. Un'espressione empirica della densità di energia che lega la densità di numero barionico n_B e il numero di massa A è data da:

$$\epsilon_T(n_B, A, Z) = \frac{3}{4} \left(Z \frac{n_B}{A} \right)^{4/3} + \left(\frac{n_B}{A} \right) \left[M(A, Z) - 1.4442 (Ze)^2 \left(\frac{n_B}{A} \right)^{1/3} \right]. \quad (8.22)$$

L'energia ϵ_T viene calcolata per un nucleo specifico e studiata in funzione di $1/n_B$. Dal confronto tra le curve calcolate è immediato identificare il nucleo per cui ϵ_T è minima per ogni valore della densità barionica n_B . In questa fase, si formano reticoli con nuclei sempre più ricchi di neutroni.

In Fig. 8.2 mostriamo una figura riguardante due isotopi del nichel. A densità barioniche più basse, alti valori di $1/n_B$, la densità di energia è inferiore per l'isotopo 62. Per valori della densità barionica tali che $10^9/n_B < 0.006$, è l'isotopo 64, più ricco di neutroni, che ha il valore inferiore della densità di energia.

Nella tabella 8.1, viene indicata una lista di nuclei che minimizzano il valore della densità di energia (8.22), per vari valori della densità del sistema.

La procedura che abbiamo descritto è limitata dalla nostra conoscenza della massa dei nuclei stabili, o prodotti in laboratorio. Al momento, non abbiamo informazioni riguardanti la massa di nuclei con grande eccesso di neutroni e lontani dalla valle di stabilità. Per aumentare la nostra conoscenza su questi nuclei di interesse astrofisico, è stato pianificato un vasto programma sperimentale che viene condotto con fasci di nuclei radioattivi.

Nucleo	Z	N=Z-A	Z/A	Δ [MeV]	$\rho_{\max}$ kg/m ³
⁵⁶ Fe	26	30	0.4643	0.1616	8.1 10 ⁹
⁶² Ni	28	34	0.4516	0.1738	2.7 10 ¹¹
⁶⁴ Ni	28	36	0.4375	0.2091	1.2 10 ¹²
⁸⁴ Se	34	50	0.4048	0.3494	8.2 10 ¹²
⁸² Ge	32	50	0.3902	0.4515	2.1 10 ¹³
⁸⁴ Zn	30	54	0.3750	0.6232	4.8 10 ¹³
⁷⁸ Ni	28	50	0.3590	0.8011	1.6 10 ¹⁴
⁷⁶ Fe	26	50	0.3421	1.1135	1.8 10 ¹⁴
¹²⁴ Mo	42	82	0.3387	1.2569	1.9 10 ¹⁴
¹²² Zr	40	82	0.3279	1.4581	2.7 10 ¹⁴
¹²⁰ Sr	38	82	0.3166	1.6909	3.7 10 ¹⁴
¹¹⁸ Kr	36	82	0.3051	1.9579	4.3 10 ¹⁴

Tabella 8.1: Lista dei nuclei che minimizzano il valore dell'energia (8.22), e la densità a cui questo avviene. Il valore delle loro masse è espresso in termini di $\Delta = M(A, Z)/A - 930$ MeV.

8.1.2 La crosta interna

Dalla tabella 8.1 possiamo notare come, aumentando la densità della stella il minimo di energia viene ottenuto con la formazione di nuclei sempre più ricchi di neutroni. Per valori della densità di $4.3 \cdot 10^{14}$ kg/m³ si ha che il nucleo che minimizza l'energia è il ¹¹⁸Kr. Questo nucleo ha un potenziale chimico negativo per i neutroni. Aumentando la densità si formano nuclei che hanno un eccesso di neutroni che eccede la cosiddetta linea di gocciolamento dei neutroni. Questo significa che il processo di neutronizzazione (8.5) produce nuclei in cui il neutrone non è più legato. Questi neutroni lasciano il nucleo (gocciolando) e formano un gas di neutroni liberi che si muovono attorno ai nuclei localizzati nel reticolo.

A queste densità, la materia presenta l'equilibrio tra due fasi. Una prima fase è quella composta da nuclei in un reticolo cristallino, e una seconda fase in cui la materia si presenta come gas di neutroni. I dettagli di come si passi da una fase all'altra sono piuttosto complicati e oggetto di studio.

Uno studio del 1983 [Rav83] ha messo in evidenza che a densità comprese tra $4.3 \cdot 10^{13}$ e $7.5 \cdot 10^{16}$ kg/m³ la materia è costituita da macrosfere di nuclei immersi in un gas di elettroni e neutroni. Con l'aumentare della densità la massima energia di legame del sistema viene raggiunta modificando la forma geometrica delle strutture in cui si organizzano i nucleoni. Il ruolo delle forme geometriche in cui i nucleoni si organizzano può essere dedotto dalla figura 8.3 che presenta il contributo repulsivo dell'energia, dovuto quindi alla forma, da aggiungere a quello attrattivo legato all'interazione nucleare. Si può notare come a bassa densità il minor contributo repulsivo, che produce quindi la maggiore energia di legame, sia quello della forma sferica (SP), ovvero i nuclei come li conosciamo nei laboratori terrestri. Aumentando la densità, è la forma cilindrica (C) a produrre il legame maggiore, poi quella prodotta da lamine (S per slab). A questo punto la densità aumenta a tal punto che il volume delle parti vuote, cioè quelle prive di nucleoni, è inferiore a quello delle parti piene. E' quindi più comodo identificare la forma geometrica della struttura concentrandosi sulle parti vuote. Si hanno quindi strutture in cui ci sono dei cilindri vuoti (CH), e infine sfere vuote (SH).

Nella Fig. 8.4 si possono vedere i risultati di una simulazione numerica, basata su metodi semi-classici. In questa simulazione, per una interazione nucleone-nucleone fissata si cambia la densità di nucleoni e la larghezza della scatola cubica da analizzare, si cerca il minimo di energia facendo

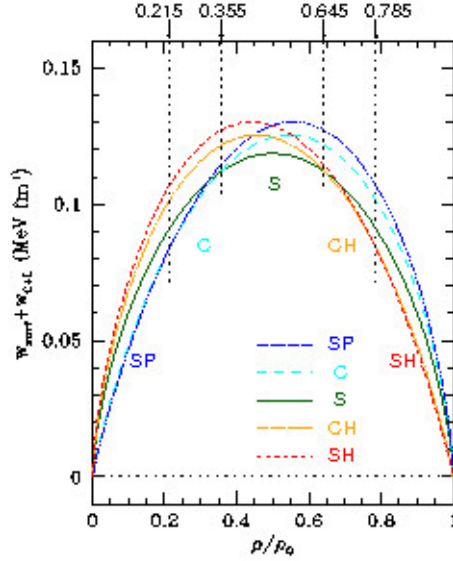


Figura 8.3: Contributo all'energia del sistema delle varie forme che le strutture nucleari possono assumere. I simboli SP, C, S, CH e SH, indicano rispettivamente sfere piene, cilindri pieni, lamine, cilindri vuoti e sfere vuote.

muovere i vari nucleoni su traiettorie classiche. Si può notare un'evoluzione dalla fase sferica, a quella cilindrica, a quella laminare fino a quelle in cui cilindri e sfere vuote dominano il volume.

In letteratura, a queste forme geometriche sono stati dati nomi provenienti dalla cucina italiana, spaghetti per la fase cilindrica, lasagne per quella laminare, quindi questa fase in cui la disposizione geometrica dei nucleoni viene modificata pende in genere il nome di fase di pasta. Questa fase è presente sulla superficie della stella di neutroni per densità comprese tra 7.5×10^{16} e 1.2×10^{17} kg/m³. A densità superiori l'energia del sistema è minima se la materia è un gas omogeneo di neutroni immersi in gas di elettroni. Quest'ultima fase è quella di materia neutronica e forma la parte di gran lunga più massiva della stella di neutroni.

8.2 Il core di materia neutronica

La crosta contiene l'1 o al massimo il 2 % della massa della stella di neutroni, il valore dipende dal tipo di equazione di stato utilizzata per modellarne il comportamento [Lor93]. Quindi, il 98, 99% della massa della stella di neutroni si trova nel core, ed è presumibilmente in uno stato di fluido quantistico. Lo stato attuale della ricerca in questo campo, riguarda lo studio delle sue condizioni di stabilità.

L'equazione di equilibrio termodinamico (2.1) è stata ottenuta considerando la meccanica newtoniana. In realtà, per oggetti compatti come le stelle di neutroni, è necessario utilizzare un'espressione che consideri la teoria della gravitazione di Einstein. La (2.1) deve essere sostituita con l'equazione [Wei72]

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \left\{ \left[1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m(r)} \right] \left[1 - \frac{2G_N m(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \right\}. \quad (8.23)$$

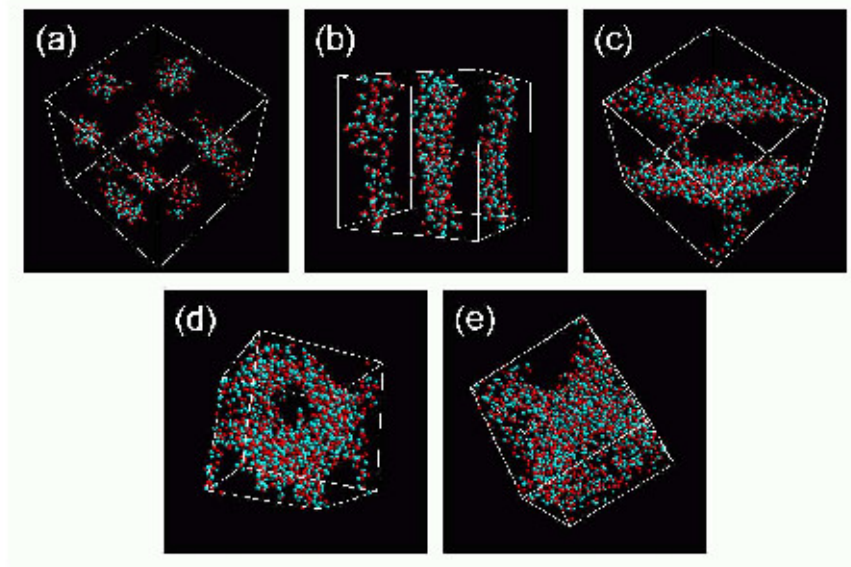


Figura 8.4: Distribuzioni di nucleoni nella crosta interna generate da simulazioni numeriche a varie densità. Il rapporto neutroni, protoni è 1. L_{box} indica le dimensioni della cella e N il numero di nucleoni usati per la simulazione. In (a), fase sferica, si ha $\rho = 0.1\rho_0$, $L_{\text{box}}=43.65$ fm e $N=1372$. In (b), fase cilindrica, si ha $\rho = 0.225\rho_0$, $L_{\text{box}}=38.07$ fm e $N=2048$. In (c), fase di lamine, si ha $\rho = 0.4\rho_0$, $L_{\text{box}}=31.42$ fm e $N=2048$. In (d), fase di cilindri vuoti, si ha $\rho = 0.5\rho_0$, $L_{\text{box}}=29.17$ fm e $N=2048$. In (e), fase di sfere vuote, si ha $\rho = 0.6\rho_0$, $L_{\text{box}}=27.45$ fm e $N=2048$. I punti rossi indicano i protoni, e quelli blu i neutroni.

L'equilibrio idrostatico è fissato dall'equazione precedente e dalla (2.2)

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad .$$

Nel limite in cui $c \rightarrow \infty$ la (8.23) riproduce la (2.1). Nell'ultimo termine della (8.23) appare il potenziale gravitazionale, che diminuendo il valore del denominatore fa crescere l'effetto dell'interazione gravitazionale, rispetto al risultato newtoniano.

	massa	raggio	densità media kg/m ³	$G_N M / R c^2$
sole	$M_\odot$	$R_\odot$	10^3	10^{-6}
nana bianca	$\leq M_\odot$	$10^{-2} R_\odot$	10^{10}	10^{-4}
stella di neutroni	$\sim 1.5 M_\odot$	$10^{-5} R_\odot$	10^{18}	10^{-1}
buco nero		$2G_N M / c^2$		1

Tabella 8.2: Confronto tra alcune quantità relative ad oggetti compatti

La necessità di utilizzare l'equazione (8.23) per lo studio delle stelle di neutroni, è indicata da quanto mostrato nella tabella 8.2. Come si può vedere il potenziale gravitazionale, che appare nell'ultimo termine della (8.23), è irrilevante per stelle come il sole, e anche per le nane bianche. Comincia invece a produrre correzioni del 10% rispetto al risultato newtoniano per le stelle di neutroni.

Le due equazioni differenziali di primo ordine (8.23) e (2.1) sono dette di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [Tol34, Opp39]. Le TOV sono integrate con le condizioni al contorno

$$m(0) = 0 \quad , \quad P(R) = P_{\text{sup}} \quad (8.24)$$

La prima condizione indica che $\rho(r)$ e $P(r)$ sono finite nel centro della stella. La seconda condizione specifica il valore della pressione alla superficie della stella. Normalmente si sceglie $P_{\text{sup}}=0$, che definisce il raggio della stella. Un'altra scelta fatta comunemente è quella di dare a P_{sup} , il valore della la densità degli atomi di ^{56}Fe (7.86 kg/m^3). In questo caso, la superficie definisce il raggio dello strato di materia neutronica.

Le equazioni TOV sono integrate fissando il valore della pressione al centro della stella. Questo valore delle condizioni iniziali della pressione viene determinato conoscendo la densità centrale della stella ρ_c . Risulta quindi fondamentale la conoscenza della relazione tra densità e pressione, quella che viene definita comunemente definita come Equazione di Stato (EOS).

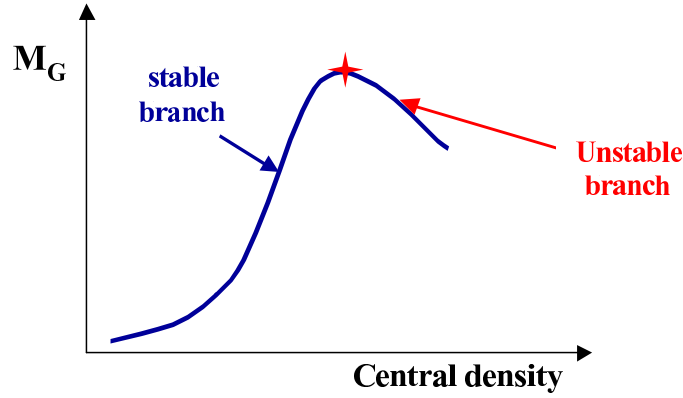


Figura 8.5: Andamento della massa della stella di neutroni in funzione della densità centrale.

Risolvendo le equazioni TOV, si ottiene la pressione della stella in funzione della densità centrale. D'altra parte, utilizzando l'equazione (2.2), otteniamo la massa in funzione del raggio della stella, o della densità centrale. Il tipico risultato che si ottiene per una densità è schematicamente presentato nella figura 8.5. L'aspetto più importante di questa figura è la presenza di un valore massimo della massa della stella. L'espressione della massa in funzione della densità mostra una crescita fino al valore massimo, poi una decrescita. Configurazioni stellari con massa superiore a quella massa sono instabili e collassano in buchi neri. L'esistenza di una massa massima è dovuta all'uso della relatività generale, non alla particolare equazione di stato utilizzata.

8.3 Equazione di stato della materia neutronica

Il calcolo della EOS della materia neutronica è il problema fondamentale della fisica delle stelle di neutroni. Per fare questo calcolo si ipotizza che la materia neutronica sia un *fluido perfetto*, nel senso che si escludono effetti di viscosità tangenziale. Si fa inoltre l'ipotesi che sia *materia catalizzata*. Questo significa che fissata la densità barionica n_B , i vari tipi di barioni sono presenti con rispettive abbondanze $x_i = n_i/n_B$, tali che l'energia totale per barione ($c^2\rho/n_B$) sia minima. Questo tipo di materia è in equilibrio rispetto alle interazioni forte e debole.

Una stella di neutroni appena nata si raffredda in poche ore a temperature dell'ordine di 10^7 - 10^9 K. Queste temperature sono molto piccole se confrontate con le scale di energia della materia

di neutroni, in cui le tipiche energie di Fermi vanno dalle decine alle centinaia di MeV (1 MeV corrisponde a circa $1.134 \cdot 10^{10}$ K). Per questo motivo nei calcoli dell'equazione di stato si ipotizza che $T=0$. Le ipotesi menzionate sopra si riassumono dicendo che il calcolo della EOS viene svolto per materia *fredda e catalizzata*.

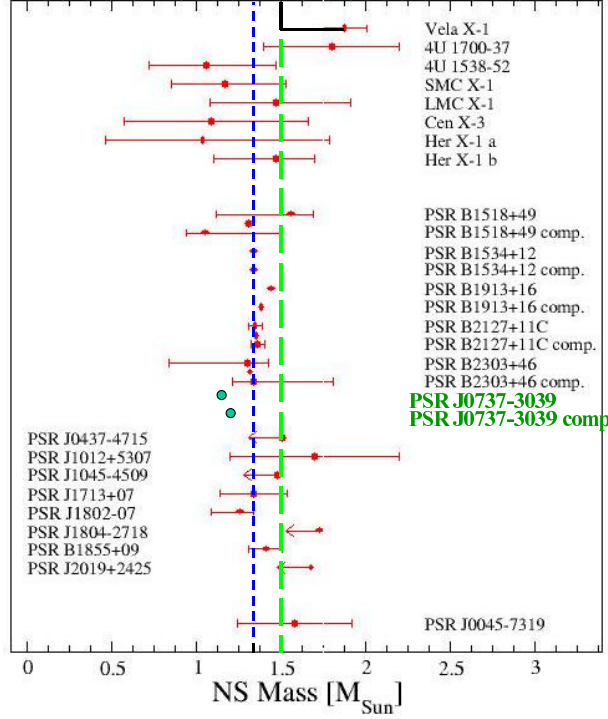


Figura 8.6: Masse osservate di alcune pulsar.

Il primo calcolo dell'EOS di materia neutronica fu fatto da Oppenheimer e Volkoff [Opp39]. I due autori modellizzarono il fluido di neutroni come un gas di Fermi di particelle non interagenti, in analogia con quanto fatto per gli elettroni nel caso delle nane bianche. Le equazioni che descrivono la pressione in funzione della densità sono analoghe a quelle presentate nel cap. 6. Anche in questo caso utilizzando una forma politropica relativistica, con indice politropico Γ , Eq. (6.23), uguale a 3, si ottiene un valore massimo della massa della stella di neutroni (vedi l'Eq. (6.35)). Il valore della massa massima trovato da Oppenheimer e Volkoff è:

$$M_{\max} = 0.71 M_{\odot} . \quad (8.25)$$

Questo valore è in aperta contraddizione con i valori osservati delle masse delle pulsar che sono dell'ordine di 1.4, 1.5 $M_{\odot}$ (vedi la Fig.8.6).

L'idea è che nell'equazione (6.35), il valore del termine della derivata di Φ nel punto in cui si ha il primo zero, $\xi = \xi_R$ sia troppo piccolo. In altre parole, l'EOS di Oppenheimer e Volkoff è poco ripida. La pressione deve essere in grado di sostenere l'attrazione gravitazionale evitando il collasso della stella. A parità di densità centrale della stella, più ripida è l'equazione di stato, maggiore è la pressione che il sistema esercita verso l'esterno. La massa limite in cui l'attrazione gravitazionale supera le capacità di repulsione del sistema aumenta con l'aumentare del valore della derivata di Φ .

Da quanto detto è evidente che la pura pressione di Fermi non è sufficiente nelle stelle di neutroni per descrivere correttamente il sistema. E' necessario calcolare l'EOS, tenendo conto dell'interazione tra i neutroni. Il core fortemente repulsivo dell'interazione tra due nucleoni fornisce il nuovo ingrediente fisico che permette di ottenere i valori massimi delle masse delle stelle di neutroni simili a quelli osservati.

Il calcolo dell'EOS di materia neutronica è uno dei problemi aperti della fisica nucleare. Non ci sono dirette evidenze empiriche di questo stato della materia. E' quindi necessario estrapolare dai nuclei queste informazioni.

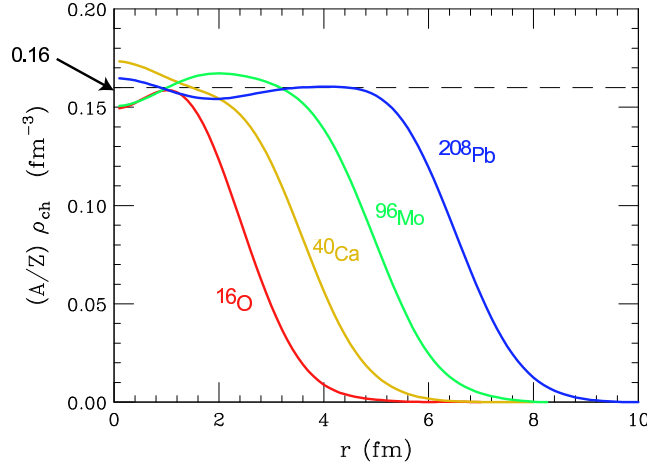


Figura 8.7: Distribuzioni di carica, riscalate, di alcuni nuclei.

Ci sono dei fatti empirici che aiutano questa estrapolazione. Un prima osservazione è che le distribuzioni di carica dei nuclei medio-pesanti, opportunamente riscalate, forniscono un valore molto simile della densità al centro del sistema (vedi Fig. 8.7). Questo valore può essere ottenuto ipotizzando la distribuzione di carica del nucleo come quella di una sfera uniformemente carica

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} .$$

Utilizzando la relazione empirica

$$R = r_0 A^{1/3} ,$$

per $r_0 = 1.1 \pm 0.1$ si ottiene un valore di $\rho = 0.16 \pm 0.01$ nucleoni per fm^3 . Questo è il valore segnato dalla linea orizzontale tratteggiata nella figura 8.7.

Una seconda osservazione riguarda la formula semi-empirica della massa (8.21). Considerando l'energia di legame per nucleone, si ha:

$$\frac{B(A, Z)}{A} = \left[a_V + a_s A^{-1/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{-4/3}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \delta \right] . \quad (8.26)$$

Speggnendo il contributo del termine coulombiano, trascurando il termine di appaiamento δ , per materia nucleare simmetrica ($A = 2Z$), sopravvive solo il termine di volume a_V , il cui valore è -16.5 ± 0.5 MeV.

Da queste informazioni empiriche risulta che il punto di saturazione della materia nucleare simmetrica, cioè il punto in cui l'energia di legame per nucleone in funzione della densità del

sistema raggiunge il suo minimo, è caratterizzato dai valori:

$$n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3} , \quad \epsilon_0 = -16.5 \pm 0.5 \text{ MeV} . \quad (8.27)$$

Sviluppando in serie di Taylor $\epsilon \equiv E/A$, attorno al punto di saturazione, abbiamo:

$$\epsilon(n) \sim \epsilon_0 + \frac{1}{2}(n - n_0)^2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial n^2} \right)_{n=n_0} = \frac{1}{2} \frac{K_0}{9} \frac{(n - n_0)^2}{n_0^2} . \quad (8.28)$$

Nell'espressione precedente abbiamo considerato che la derivata prima è nulla nel punto di saturazione, e abbiamo definito il modulo di compressione K_0 come:

$$K_0 = 9n_0^2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial n^2} \right)_{n=n_0} = 9 \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{n=n_0} . \quad (8.29)$$

Il valore empirico del modulo di compressione viene estratto dalla posizione della risonanza gigante di monopolo, 0^+ , nei nuclei pesanti. Oggi sono accettati valori che vanno dai 200 ai 250 MeV.

Un'altra informazione empirica è fissata dall'energia di simmetria. Definiamo il parametro di asimmetria come

$$\eta = \frac{N - Z}{A} , \quad (8.30)$$

abbiamo quindi che

$$\frac{N}{A} = \frac{n_n}{n} = \frac{1}{2}(1 + \eta) ,$$

e

$$\frac{Z}{A} = \frac{n_p}{n} = \frac{1}{2}(1 - \eta) .$$

L'energia per particella di materia nucleare asimmetrica, può essere sviluppata in potenze pari di η

$$\epsilon(n, \eta) = \epsilon(n, 0) + S_2(n)\eta^2 + S_4(n)\eta^4 + S_6(n)\eta^6 \dots . \quad (8.31)$$

Per la simmetria di isospin dell'interazione nucleare, l'interazione tra due neutroni è identica a quella tra due protoni. Questo implica che i termini dispari in η siano nulli. L'energia di simmetria è definita come

$$\epsilon_{\text{sym}}(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = S_2(n) , \quad (8.32)$$

che è uguale al secondo termine dell'equazione (8.31). Se, in questo sviluppo, tutti i termini superiori al secondo fossero nulli per ogni valore della densità, l'energia per particella della materia nucleare asimmetrica, potrebbe essere scritta come

$$\epsilon(n, \eta) = \epsilon(n, 0) + \epsilon_{\text{sym}}(n) \eta^2 , \quad (8.33)$$

e quindi l'energia di simmetria potrebbe essere espressa come la differenza tra l'energia per nucleone di materia neutronica, e quella della materia nucleare simmetrica

$$\epsilon_{\text{sym}}(n) = \epsilon(n, 1) - \epsilon(n, 0) . \quad (8.34)$$

Al momento, il valore empirico dell'energia di simmetria viene estratto dalla posizione della risonanza gigante di dipolo isovettoriale, 1^- , nei nuclei medio-pesanti. Questo valore sembra attestato attorno ai 30 MeV.

Riassumendo, il calcolo dell'EOS della materia neutronica viene effettuato calcolando prima l'EOS di materia nucleare simmetrica, dove la validità del calcolo può essere verificata empiricamente con il confronto con le seguenti quantità:

1. Punto di saturazione: $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ e $\epsilon_0 = -16.5 \pm 0.5 \text{ MeV}$.
2. Modulo di compressione: $K_0 \sim 220 \text{ MeV}$.
3. Energia di simmetria: $\epsilon_{\text{sym}} \sim 30 \text{ MeV}$.

E' inoltre necessario che, sia in materia nucleare simmetrica, sia nella materia neutronica, la velocità del suono non superi quella della luce, in altri termini:

$$\frac{s}{c} = \left(\frac{dP}{d\epsilon} \right)^{1/2} \leq 1 . \quad (8.35)$$

Il calcolo dell'EOS di materia nucleare è un problema richiede l'utilizzazione di raffinate tecniche a molticorpi. Non entreremo nei dettagli di queste tecniche, ma cercheremo di fare una panoramica delle principali problematiche inerenti al loro utilizzo. Prima di affrontare il problema specifico del calcolo dell'EOS della materia nucleare, faremo una breve panoramica delle problematiche riguardanti il punto di partenza di ogni calcolo, l'interazione tra due nucleoni.

8.3.1 L'interazione nucleone-nucleone

I nucleoni sono entità composite. Questo è messo in evidenza dalla presenza di stati eccitati del nucleone e da evidenze di dimensioni finite. Al momento si ritiene che le entità prive di struttura che formano il nucleone siano quark e gluoni. La teoria che si pensa debba descrivere l'interazione, forte, tra queste entità è la cromodinamica quantistica (QCD). In principio, la struttura del nucleone, e l'interazione tra due nucleoni dovrebbero essere descritta in termini di quark e gluoni utilizzando la QCD. Al momento non si riescono a descrivere nemmeno le proprietà del singolo nucleone con la QCD. Una descrizione dell'interazione tra due nucleoni basata sulla QCD non è quindi disponibile.

Il problema viene affrontato in maniera pragmatica, ipotizzando espressioni parametriche dell'interazione tra nucleoni. I parametri vengono fissati in modo da descrivere i dati empirici provenienti da sistemi a due nucleoni.

Ovviamente la teoria indica delle precise proprietà a cui l'espressione parametrica dell'interazione deve soddisfare.

1. L'hamiltoniana che descrive il sistema è hermitiana, dato che gli autovalori corrispondono ad un osservabile, l'energia del sistema. Questo implica che anche l'interazione debba essere hermitiana.
2. L'interazione deve essere invariante per lo scambio di coordinate

$$V(1, 2) = V(2, 1) ,$$

dato che le due particelle sono identiche. Ovviamente questo implica l'invarianza dell'interazione forte per cambio di isospin.

3. Invarianza traslazionale

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = v(\mathbf{r}_{12}) .$$

L'interazione dipende solo dalla distanza relativa tra i due nucleoni.

4. Invarianza galileiana. L'interazione dipende solo dal momento relativo dei due nucleoni.
5. Invarianza per riflessioni spaziali, sotto parità.

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = V(-\mathbf{r}, -\mathbf{p}) .$$

6. Invarianza per inversione temporale

$$V(\mathbf{p}, -\boldsymbol{\sigma}) = V(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})$$

7. Invarianza per rotazioni nello spazio.

8. Invarianza per rotazioni dell'isospin.

Date queste restrizioni sono possibili soltanto alcune combinazioni degli operatori $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$. Le parametrizzazioni dell'interazione possono essere presentate nella forma:

$$\begin{aligned} V(1, 2) = & \\ & V_1(\mathbf{r}_{12}) + V_2(\mathbf{r}_{12}) \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) + V_3(\mathbf{r}_{12}) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \quad \text{termini} \\ & + V_4(\mathbf{r}_{12}) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \quad \text{centrali,} \\ & + V_5(\mathbf{r}_{12}) S_{12}(\mathbf{r}_{12}) + V_6(\mathbf{r}_{12}) S_{12}(\mathbf{r}_{12}) \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \quad \text{tensoriali,} \\ & + V_7(\mathbf{r}_{12}) \mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{S} + V_8(\mathbf{r}_{12}) \mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{S} \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \quad \text{di spin - orbita,} \\ & + \dots \text{altri termini} \quad , \end{aligned} \quad (8.36)$$

dove $\mathbf{L}_{12}$ è il momento angolare relativo della coppia di nucleoni interagenti,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}(1) + \boldsymbol{\sigma}(2)] \quad ,$$

e il termine tensoriale è definito come:

$$S_{12}(\mathbf{r}_{12}) = \frac{3}{r_{12}^2} [\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \mathbf{r}_{12}] [\boldsymbol{\sigma}(2) \cdot \mathbf{r}_{12}] - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \quad . \quad (8.37)$$

Abbiamo presentato nella (8.36) i termini di ordine più basso in spin, isospin, tensore e momento angolare, ma ogni prodotto scalare di questi termini può essere considerato, senza violazione delle prescrizioni sopra elencate. Le parti radiali dell'espressione (8.36) sono parametrizzate e i valori di questi parametri sono fissati per riprodurre le proprietà dei sistemi a due corpi.

C'è un solo stato legato di due nucleoni, il deutone. Dalla conoscenza delle sue proprietà possiamo inferire delle informazioni sulle interazioni nucleari.

- a) Il fatto che non esistano né diprotone né dineutrone indica che l'interazione tra protone e neutrone è più attrattiva di quella tra due nucleoni identici. Questo implica che l'interazione dipende dall'isospin.
- b) Il fatto che il deutone appare solo nella configurazione di momento angolare totale uguale a uno implica che l'interazione nucleone-nucleone dipende dallo spin. Non fosse così, dovremmo trovare configurazioni con spin totale sia uno sia zero, nella proporzione 3:1, come indicano le tradizionali regole di somma dei momenti angolari.
- c) Il fatto che il momento di quadrupolo elettrico del deutone non sia nullo implica che l'interazione non è di tipo centrale, ma che ci sono dei termini tensoriali nello spazio delle configurazioni.

I parametri dell'interazione vengono fissati per riprodurre i circa 4000 dati di diffusione elastica tra protone e protone e neutrone e protone, fino ad energie nel centro di massa di 300 MeV. Questi processi di diffusione vengono descritti come indicato nel paragrafo 3.2.1. In realtà le quantità empiriche che vengono utilizzate per fissare l'interazione sono gli sfasamenti, legati alle sezioni d'urto come indicano le equazioni (3.27) e (3.19).

Le metodologie per definire i comportamenti analitici del potenziale, sono diverse e possono ricadere in tre categorie.

- I) Le funzioni $V_i(r)$ della (8.36) sono puramente fenomenologiche. Nella formulazione più diffusa si utilizzano funzioni di Yukawa per la parte a lungo raggio, cioè per distanze relative fino a 2 fm, e funzioni tipo Saxon-Woods per la parte più a corto raggio.
- II) L'interazione è descritta in termini di scambio di singoli mesoni tra i due nucleoni interagenti. Il termine più a lungo raggio dell'interazione è determinato dallo scambio del pione, il mesone più leggero. Lo scambio di mesoni pseudoscalari, vettoriali, e anche scalari, permette di descrivere l'interazione tra due nucleoni nella sua complessità. La formulazione è relativistica. I parametri liberi sono le costanti di accoppiamento tra mesoni e nucleoni, e, in alcuni casi, anche la massa del mesone scambiato.
- III) L'interazione tra due nucleoni è trattata in una teoria effettiva ispirata alla QCD, detta teoria di perturbazione chirale. La teoria rispetta alcune proprietà generali di simmetria della QCD e viene utilizzata per descrivere fenomeni alle energie dell'ordine del MeV, in cui la QCD non è perturbativa. I gradi di libertà sono solo nucleoni e pioni che vengono scambiati in vario numero. Questo genera i vari termini dell'interazione. Anche in questo caso i parametri sono le costanti di accoppiamento.

Indipendentemente da come l'interazione tra due nucleoni venga parametrizzata, i moderni potenziali riescono a riprodurre i circa 4000 dati disponibili [Sto93, Sto94] con un valore del χ^2 dell'ordine dell'unità per dato. Tipici comportamenti dell'interazione nucleone-nucleone sono presentati nella figura 8.8 dove si mostrano le funzioni $V_i(r_{12})$ ottenute con tre diverse parametrizzazioni dell'interazione. Queste parametrizzazioni sono ottenute con potenziali fenomenologici e sono chiamate Urbana V14 (UV14) [Lag81] e Argonne V18 (AV18) [Wir95]. I due numeri indicano il numero di termini operatoriali nell'equazione (8.36). L'interazione Argonne V8' (AV8') [Pud97] è una riduzione della AV18 ai primi otto termini. Non si tratta di una pura eliminazione degli ultimi 10 termini, ma c'è un riaggiustamento dei parametri considerati per riprodurre i dati sperimentali.

Le caratteristiche delle parameterizzazioni mostrate nella figura sono comuni a tutte le moderne interazioni nucleone-nucleone. La caratteristica più rilevante è la presenza del core fortemente repulsivo a piccole distanze nel termine scalare, V_1 , dell'interazione. Nel riquadro riguardante V_1 , l'asse delle y nella figura è limitato a valori inferiori a 300 MeV, quindi non si vede che per valori di r_{12} tendenti a zero, i vari potenziali assumono valori di 2 o più GeV. La presenza del core repulsivo a piccole distanze vanifica l'utilizzazione delle tradizionali teorie perturbative per la descrizione dei nuclei e della materia nucleonica.

8.3.2 Le forze a tre corpi

L'interazione tra due nucleoni è l'informazione fondamentale per poter costruire l'hamiltoniana che descrive il nucleo. Nell'ambito della meccanica quantistica nonrelativistica l'hamiltoniana, composta dalla somma delle energie cinetiche dei singoli nucleoni e dalle reciproche interazioni, può essere espressa come

$$H = \sum_{i=1,A} -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j=1,A} V(i,j) . \quad (8.38)$$

Il deutone ed i sistemi a due corpi sono utilizzati per fissare i parametri dell'interazione. Quindi il sistema più semplice in cui verificare la validità dell'interazione utilizzata è il trizio ^3H . In questo sistema è attiva la sola interazione forte.

Oggi ci sono diverse tecniche che permettono di risolvere l'equazione di Schrödinger per un sistema a tre corpi senza adottare alcuna approssimazione dell'equazione da risolvere. Le soluzioni

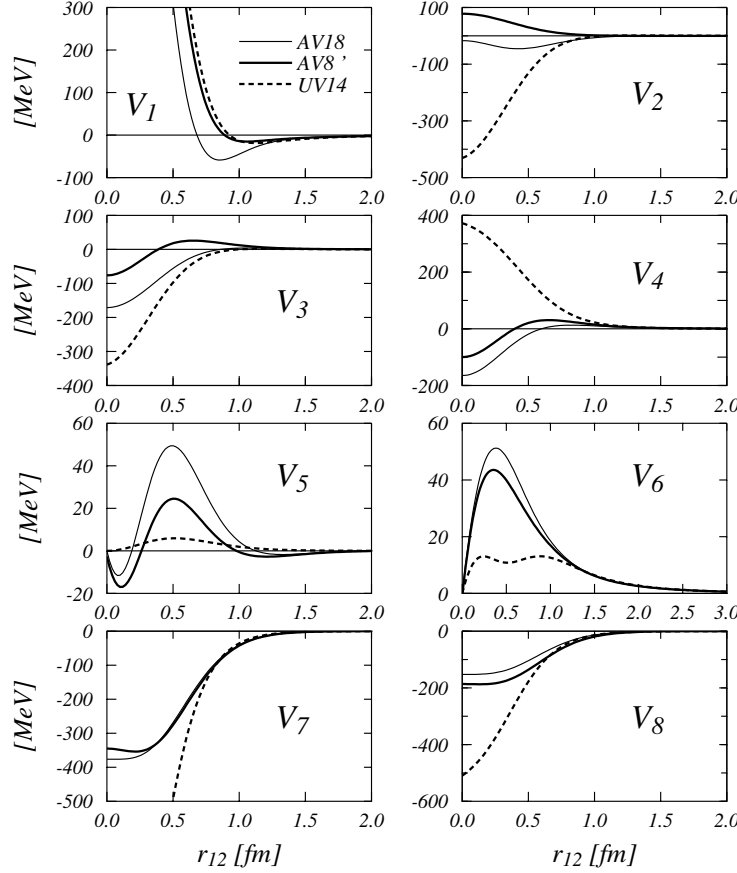


Figura 8.8: Diverse parametrizzazioni dell'interazione nucleone-nucleone per i vari termini dell'equazione (8.36).

sono esatte all'interno dell'incertezza numerica relativa al metodo utilizzato. In questo senso si parla di soluzioni esatte dell'equazione di Schrödinger.

La prima colonna della tabella 8.3, mostra le energie dello stato fondamentale del ^3H ottenute risolvendo l'equazione di Schrödinger con diversi potenziali nucleone-nucleone, capaci di descrivere le proprietà dei sistemi a due corpi con lo stesso livello di accuratezza. Il risultato eclatante è che nessuno di questi potenziali riesce a riprodurre il valore sperimentale dell'energia di legame del trizio che è di 8.481 MeV.

Le varie interazioni utilizzate producono energie di legame che sottostimano il valore dell'energia di legame. Al di là delle differenze tra le diverse interazioni, è chiaro che, dal punto di vista fisico manca un ingrediente che fornisce l'attrazione mancante. E' possibile mettere in dubbio la validità dell'approccio non relativistico al problema. Le difficoltà tecniche che si incontrano nel tentativo di dare una descrizione relativistica dei sistemi a tre corpi sono così rilevanti da rendere i risultati ottenuti molto meno affidabili di quelli dei calcoli non relativistici. Il problema è stato affrontato, e risolto, modificando l'hamiltoniana (8.38) aggiungendovi un termine di interazione a tre corpi.

L'idea che possa esistere una interazione a tre corpi che agisce tra i nucleoni nasce dal fatto che

2 N potential	2N	2N + 3N
CD Bonn	7.953	8.483
Nijm II	7.709	8.477
Nijm I	7.731	8.480
Nijm 93	7.664	8.480
Reid 93	7.648	8.480
AV14	7.683	8.480
AV18	7.576	8.479

Tabella 8.3: Energie di legame, in MeV, del ^3H , calcolate con diverse interazioni nucleone-nucleone a due corpi, prima colonna, e introducendo appropriate interazioni a tre corpi, seconda colonna. Il valore sperimentale è 8.481 MeV.

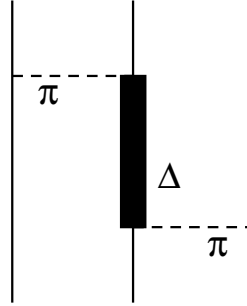


Figura 8.9: Un diagramma di forza a tre corpi.

i nucleoni non sono entità elementari. Questo implica che quando due nucleoni sono in interazione, possono modificare la propria struttura, e in questa situazione interagiscono con altri nucleoni. Un esempio di come possa essere prodotta una interazione a tre corpi, è presentato dalla figura 8.9. Le sottili linee continue indicano i nucleoni. All'inizio si hanno solo nucleoni. Per l'interazione tra due di essi, esemplificata nella figura dallo scambio di un pione, il nucleone al centro della figura si trasforma in una risonanza Δ . Quando si trova nello stato di risonanza, interagisce con un terzo nucleone e quindi ritorna nello stato nucleonico. Il diagramma presenta tre nucleoni all'inizio e tre alla fine, ma non può essere ottenuto reiterando due interazioni nucleone-nucleone. E' un nuovo termine dell'hamiltoniana.

Il termine presentato nella figura 8.9 viene calcolato senza approssimazioni, dato che tutti gli ingredienti necessari per fare questo calcolo sono legati a dati empirici noti. Si tratta delle masse dei nucleoni, dei pioni e della Δ e delle costanti di accoppiamento pione-nucleone, pione- Δ e Δ -nucleone. L'inserimento di questo termine nell'hamiltoniana (8.38) non è sufficiente per ottenere il valore empirico dell'energia dello stato fondamentale del trizio. Per questo motivo si inserisce un termine fenomenologico a tre corpi, i cui parametri sono fissati per riprodurre questo dato empirico.

La nuova hamiltoniana che include questa forza a tre corpi

$$H = \sum_{i=1,A} -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j=1,A} V(i,j) + \sum_{i<j<k=1,A} V(i,j,k) , \quad (8.39)$$

viene utilizzata per descrivere altri nuclei. I risultati che si ottengono risolvendo l'equazione di Schrödinger, senza approssimazioni, sono mostrati nella figura 8.10. Per fare questi calcoli sono state utilizzate tecniche di Green's function Monte Carlo [Pie01].

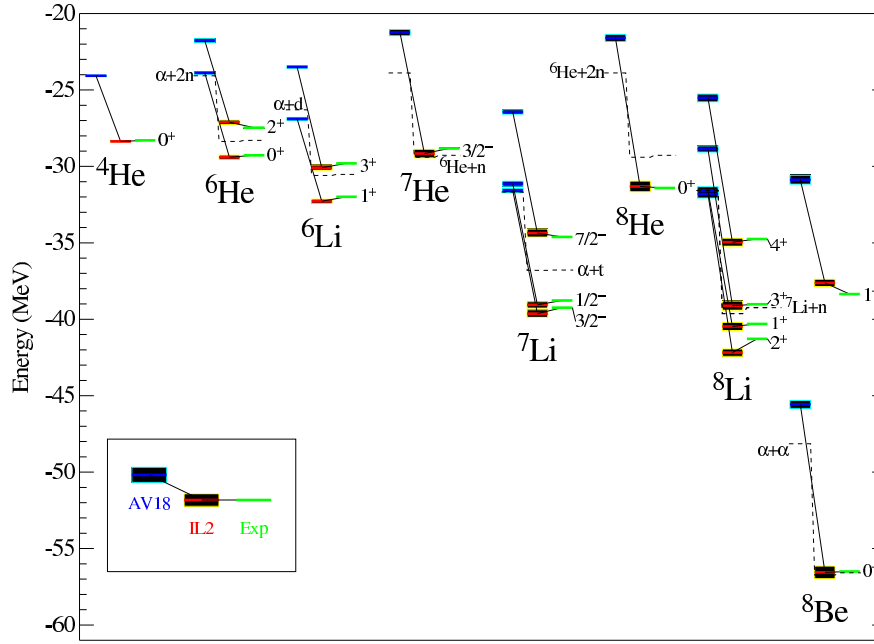


Figura 8.10: Confronto tra energie di vari nuclei leggeri calcolati con tecniche di Green Function MonteCarlo senza (AV18) e con forza a tre corpi (IL2) e valori sperimentali [Pie01].

E' evidente il successo dell'hamiltoniana (8.39), che risulta essere il punto di partenza di ogni calcolo a molticorpi in fisica nucleare, incluso quello dell'EOS della materia neutronica.

8.3.3 Il problema a molticorpi

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per un sistema a molticorpi, ad esempio il nucleo, è un problema tecnicamente molto difficile. Per chiarire in cosa consista il problema, consideriamo che la soluzione dell'equazione di Schrödinger equivale a calcolare l'energia del sistema. Chiariamo le difficoltà nel calcolo di

$$E = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (8.40)$$

dove $|\Psi\rangle$ è autostato dell'hamiltoniana. I prodotti scalari tra i due autostati, indicano l'integrazione su tutte le A coordinate spaziali, e la somma su tutte le possibili configurazioni di spin e di isospin. Per un nucleo composto da Z protoni e $N = A - Z$ neutroni, il numero di configurazioni di spin e isospin è dato dall'espressione

$$N_{conf} = 2^A \frac{A!}{Z!(A-Z)!}. \quad (8.41)$$

Nella tabella 8.4 riportiamo i valori del numero di configurazioni di spin e isospin per alcuni nuclei.

Le energie presentate nella Figura 8.10, sono state ottenute utilizzando l'espressione (8.40) e calcolando gli integrali multidimensionali con tecniche Monte Carlo. I nuclei più pesanti che appaiono nella figura hanno $A=8$. Più recentemente, al prezzo di enormi sforzi computazionali, si è ottenuto lo spettro di eccitazione per nuclei con $A=12$ [Pie05].

Nucleo	Z	N=A-Z	N_{conf}
^3H	1	2	24
^3He	2	1	24
^4He	2	2	96
^6He	2	4	960
^6Li	3	3	1280
^8He	2	6	7168
^{12}C	6	6	3784704
^{16}O	8	8	$8.4 \cdot 10^8$
^{40}Ca	20	20	$1.5 \cdot 10^{23}$
^{48}Ca	20	28	$4.7 \cdot 10^{27}$

Tabella 8.4: Numero di configurazioni di spin e isospin per alcuni nuclei.

Anche ammesso di sviluppare tecniche numeriche che permettono di fare integrali a $3A$ dimensioni in un millesimo di secondo, è evidente dalla tabella 8.4 che per nuclei medio-pesanti il problema non è affrontabile in questo modo. Per un nucleo come il ^{40}Ca il numero di volte che questo integrale deve essere fatto è paragonabile al numero di Avogadro.

Il problema consiste quindi nel risolvere l'equazione di Schrödinger con l'hamiltoniana (8.39) in maniera approssimata. L'approccio immediato è quello di utilizzare la teoria perturbativa basata sulla separazione dell'hamiltoniana in due parti

$$H = H_0 + H_1, \quad (8.42)$$

dove H_0 è la parte dell' hamiltoniana di cui si conoscono le soluzioni, normalmente si tratta di una hamiltoniana di campo medio, e H_1 è la parte dell'hamiltoniana che include l'interazione tra i nucleoni. La tradizionale formulazione della teoria perturbativa permette di esprimere l'energia E del sistema interagente in termini di energia E_0 del sistema non interagente e di elementi di matrice calcolati tra gli autostati $|\Phi_0\rangle$ dell'hamiltoniana non perturbata H_0 [Fet71, Co03]:

$$E - E_0 = \langle \Phi_0 | H_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_0 - H_0} H_1 \right)^n | \Phi_0 \rangle_c. \quad (8.43)$$

La somma dell'equazione precedente tende all'infinito, ma la speranza è che un valore realistico dell'energia possa essere ottenuto utilizzando pochi termini dello sviluppo.

Questo è proprio quello che non avviene nel caso delle interazioni nucleari. Il problema è schematizzato nella figura 8.11. Come abbiamo visto nella sezione 8.3.1 e in Fig. 8.8, la parte scalare dell'interazione nucleone-nucleone ha un core fortemente repulsivo a piccole distanze reciproche. La soluzione esatta dell'equazione di Schrödinger produce funzioni d'onda che descrivono il moto relativo dei due nucleoni, che sono molto piccole nella zona del core fortemente repulsivo. Questo è indicato dalla $\psi(r_{12})$ in Fig. 8.11. Nel limite in cui il potenziale tende all'infinito la $\psi(r_{12})$ è nulla. Il calcolo dell'energia fatto utilizzando l'equazione (8.43) implica il calcolo di elementi di matrice tra stati imperturbati del sistema. In questi stati la funzione d'onda relativa tra due nucleoni non è piccola, a piccole distanze, come viene indicato dalla $\phi(r_{12})$ nella Fig. 8.11. Questo significa che individualmente i vari termini dello sviluppo perturbativo sono molto grandi rispetto al valore dell'energia E . Si sta cercando di ottenere E sommando e sottraendo termini che sono ordini di grandezza più grandi. Siamo quindi lontani dalle condizioni di applicabilità della teoria perturbativa.

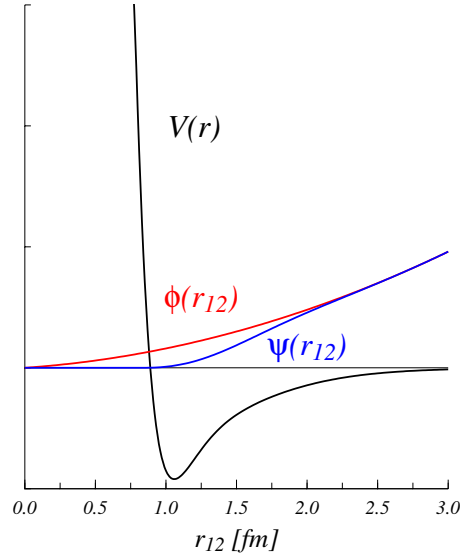


Figura 8.11: Schema dell'interazione nucleone-nucleone e delle funzioni d'onda relative di due nucleoni.

Il problema a multicorpi non perturbativo viene affrontato in varie maniere. In fisica nucleare si sono affermate due teorie che portano a risultati molto simili. La prima teoria, che prende il nome di teoria di Brueckner, modifica l'interazione, in modo da eliminare il core repulsivo. La seconda teoria, detta di base correlata (CBF da Correlated Basis Function) agisce invece sulla funzione d'onda, e utilizza interazioni con core repulsivo insieme con funzioni d'onda relative che si comportano come la $\psi(r_{12})$ della Fig.8.11.

Teoria di Brueckner

L'idea della teoria di Brueckner è quella di sostituire nell'equazione (8.43) al posto di $H_1 = v$, interazione nucleone-nucleone nel vuoto, l'interazione effettiva data dall'equazione:

$$G(W) = v - v \frac{Q}{W} G(W) . \quad (8.44)$$

L'interazione G è definita in modo che agendo sullo stato che descrive il moto di due particelle indipendenti, $|\phi_{ij}\rangle$, produca lo stesso risultato dell'azione dell'interazione nuda v sullo stato di due particelle interagenti $|\psi_{ij}\rangle$:

$$\langle \phi_{ij} | G | \phi_{ij} \rangle = \langle \phi_{ij} | V | \psi_{ij} \rangle . \quad (8.45)$$

Quindi G descrive l'interazione tra due particelle che si muovono liberamente nel mezzo nucleare. Ovviamente è diversa dall'interazione tra due particelle che si muovono liberamente, ma nel vuoto.

La figura 8.3.3 illustra schematicamente il funzionamento dell'equazione (8.44) detta di Bethe-Goldstone. L'interazione G è costruita sommando tutti i diagrammi in cui appare l'interazione v , che agisce tra due particelle che si trovano sopra la superficie di Fermi. La descrizione del sistema imperturbato è quella di campo medio, in cui tutti gli stati al di sotto del livello di Fermi sono occupati (stati buca), e quelli al di sopra sono vuoti (stati particella). Questa è la

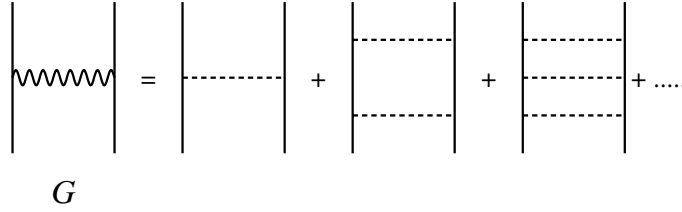


Figura 8.12: Schema dell'equazione di Bethe-Goldstone (8.44).

situazione descritta dagli stati $|\phi\rangle$ con cui si costruiscono gli elementi di matrice (8.45). I diagrammi considerati nella (8.44), sono solo quelli in cui agiscono stati particella. L'interazione tra stati buca è impedita dal principio di esclusione di Pauli. Nella (8.44) questo fatto è preso in considerazione dall'operatore Q che impedisce che gli stati finali delle particelle interagenti si trovino al di sotto della superficie di Fermi. Il termine W è un denominatore di energia che prende in considerazione le energie degli stati intermedi dopo la prima interazione. Ad esempio, gli stati intermedi del secondo e terzo diagramma dopo l'uguale nella figura.

Gli elementi di matrice (8.45) sono calcolati utilizzando l'operatore di matrice G definito nella (8.44). Questi elementi di matrice sono poi inseriti nello sviluppo perturbativo (8.43), per il calcolo di E . I primi calcoli consideravano solo i primi termini dello sviluppo, $n = 0$ in (8.44). Questi calcoli sono chiamati in letteratura di Brueckner-Hartree-Fock. Oggi sono disponibili anche calcoli che considerano tutti i diagrammi di ordine superiore nello sviluppo in linee di buco [Bal99].

Nei calcoli della teoria di Brueckner, la forza a tre corpi non è trattata esattamente, ma si usa un'approssimazione che di fatto la trasforma in una interazione a due corpi dipendente dalla densità del sistema.

Teoria CBF (Correlated Basis Function)

La teoria della base correlata (CBF) utilizza il principio variazionale per risolvere l'equazione di Schrödinger a multicorpi,

$$\delta E[\Psi] = \delta \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = 0 . \quad (8.46)$$

Il minimo del funzionale dell'energia è cercato in un sottospazio di Hilbert formato da funzioni d'onda che possono essere espresse come prodotto della funzione d'onda imperturbata Φ , un determinante di Slater, per una funzione di correlazione a multicorpi.

$$\Psi(1, \dots, A) = F(1, \dots, A) \Phi(1, \dots, A) . \quad (8.47)$$

Nelle attuali applicazioni della teoria CBF ai sistemi nucleari, la funzione di correlazione è descritta come prodotto di termini di correlazione a due corpi. Ognuno di questi termini è dato dalla somma di operatori a due corpi che simulano la complessità dell'interazione nucleare come descritta dall'equazione (8.36):

$$\mathcal{F}(1, \dots, A) = \mathcal{S} \left(\prod_{j>i=1}^A F_{ij} \right) = \mathcal{S} \left(\prod_{j>i=1}^A \sum_{p=1}^6 f_p(r_{ij}) O_{ij}^p \right) . \quad (8.48)$$

dove $\mathcal{S}$ è un operatore che simmetrizza il prodotto, e gli operatori O_{ij}^p sono definiti come:

$$O_{ij}^{p=1,6} = 1, \tau_i \cdot \tau_j, \sigma_i \cdot \sigma_j, (\sigma_i \cdot \sigma_j)(\tau_i \cdot \tau_j), S_{ij}, S_{ij}(\tau_i \cdot \tau_j) . \quad (8.49)$$

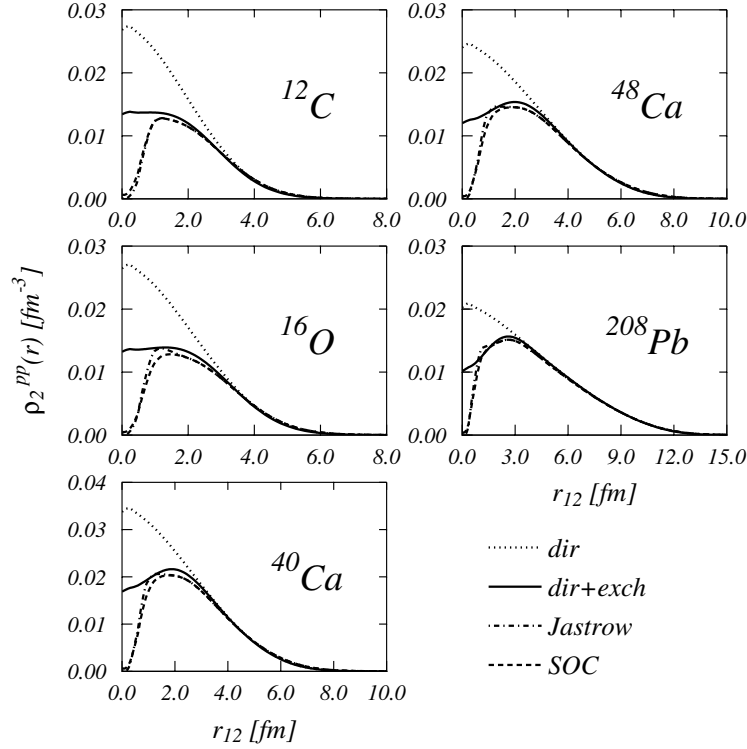


Figura 8.13: Densità due corpi in funzione della distanza relativa tra due nucleoni, calcolate con la teoria CBF [Bis07]. Le curve a punti indicano la probabilità di trovare due nucleoni come prodotto delle singole probabilità. Le curve continue sono ottenute considerando il sistema di nucleoni non interagenti, ma attivando il principio di esclusione di Pauli. Le altre due curve sono ottenute considerando anche l'interazione tra i nucleoni.

La minimizzazione viene fatta variando le funzioni $f_p(r_{ij})$ e, nel caso di sistemi finiti, anche le funzioni d'onda di singola particella, che formano Φ .

Il problema tecnico consiste come al solito nel calcolo dell'integrale multidimensionale dell'equazione (8.46), analogo a quello dell'equazione (8.40). Si possono applicare tecniche Monte-Carlo, quindi il calcolo viene definito Monte-Carlo Variazionale [Pie01], ma i problemi menzionati all'inizio di questo capitolo persistono. E' stata sviluppata una tecnica detta di sviluppo a cluster, basata sull'analisi topologica dei vari cluster di nucleoni prodotti dalla correlazione (8.48). Esistono tecniche che permettono di sommare tutti i diagrammi che hanno specifiche proprietà topologiche. Fortunatamente i diagrammi esclusi contribuiscono per uno o due percento all'energia potenziale del sistema.

L'effetto delle correlazioni (8.48) è chiarito nella figura 8.13 dove si mostra, per vari nuclei doppio magici, la densità a due corpi di due protoni in funzione della loro distanza relativa. Questa quantità è, a meno di una costante moltiplicativa, la probabilità di trovare due protoni ad una certa distanza. Se il moto del singolo nucleone fosse veramente indipendente dalla presenza degli altri nucleoni, la densità a due corpi sarebbe ottenuta moltiplicando le probabilità di trovare ogni nucleone in un certo punto del nucleo. Questo risultato è mostrato dalle curve a punti, che hanno un massimo a distanza nulla. D'altra parte anche in un modello a particelle indipendenti, è necessario considerare la natura fermionica dei nucleoni. L'attivazione del principio di esclusione di Pauli produce le curve continue della figura. Attivando l'interazione

tra i nucleoni si ottengono le curve a tratteggio e linea-punto. In questo caso la probabilità di trovare due nucleoni a piccole distanze è essenzialmente nulla. Questo è prodotto dal core fortemente repulsivo del canale scalare dell'interazione tra due nucleoni, come è mostrato dal fatto che le curve punto-linea in cui solo questo termine viene utilizzato sono molto simili a quelle tratteggiate in cui viene utilizzata l'interazione completa (8.36).

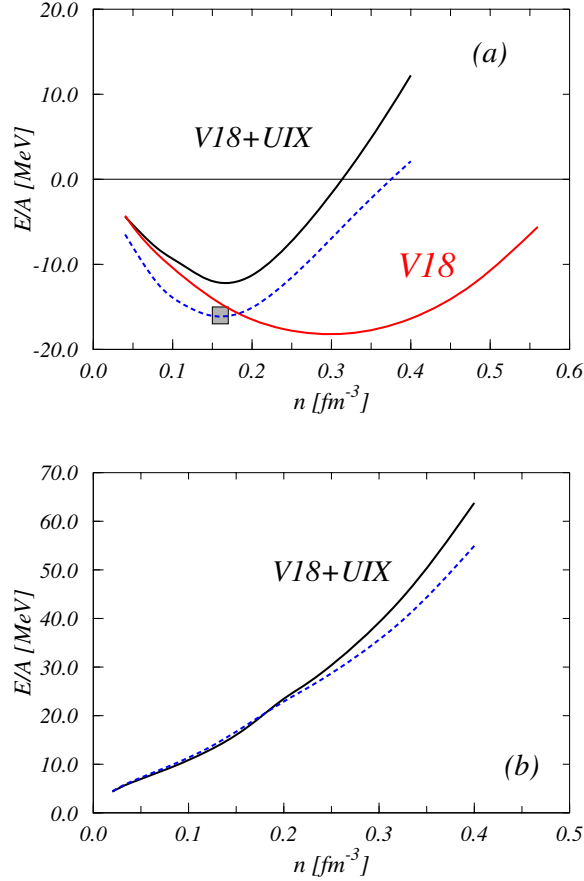


Figura 8.14: EOS calcolate con la teoria CBF, per materia nucleare simmetrica (a) e materia neutronica (b). Nella figura (a) sono mostrati i risultati ottenuti utilizzando solo l'interazione a due corpi (V18) e includendo l'appropriata interazione a tre corpi (V18+UIX). La linea tratteggiata è il risultato di un aggiustamento della curva (V18+UIX), per riprodurre il valore empirico del punto di saturazione della materia nucleare simmetrica [Akm98]. Per materia neutronica mostriamo solo i risultati con (V18+UIX), e quelli ottenuti includendo gli ingredienti che riproducono il punto di saturazione della materia nucleare (linea tratteggiata).

Dopo una discrepanza iniziale tra i risultati dei due approcci microscopici per lo studio della materia nucleare simmetrica, oggi le due teorie producono risultati molto simili. Risultati tipici di questi calcoli sono mostrati nella figura 8.14. Il pannello (a) della figura mostra le EOS per materia nucleare simmetrica, mentre il pannello (b) mostra il risultato per pura materia neutronica.

La curva indicata con $V18$ è stata ottenuta utilizzando solo la parte a due corpi dell'interazione nucleone-nucleone. Nello specifico si tratta dell'interazione denominata Argonne $V18$. L'inserimento dell'interazione a tre corpi appropriata, cioè che permette di riprodurre l'energia di legame del trizio, produce la curva denominata $V18 + UIX$. Il minimo della EOS, non riproduce il valore empirico del punto di saturazione della materia nucleare. Questo è un problema comune a tutti i calcoli microscopici.

Al momento non esiste nessun calcolo dell'EOS della materia nucleare simmetrica che, utilizzando l'interazione nucleone-nucleone microscopica, riesca a riprodurre il valore empirico del punto di saturazione. Questo è un problema aperto della fisica nucleare.

Osservando l'andamento delle EOS nel pannello (a) della figura possiamo notare come le curve ($V18+UIX$) e tratteggiata, siano più ripide della ($V18$), nel senso che, per grandi valori della densità danno valori dell'energia più grandi a parità del valore della densità. Nel gergo della fisica nucleare si fanno confronti tra le diverse EOS utilizzando l'aggettivo *rigido* (*stiff*) per indicare le EOS più ripide e *morbido* (*soft*) per quelle meno ripide.

L'equazione di stato della materia neutronica, da utilizzare nell'equazione di TOV, viene prodotta, aggiungendo all'EOS di materia nucleare simmetrica degli ingredienti, che permettono di riprodurre il valore empirico del punto di saturazione. L'origine fisica di questi ingredienti è molto discussa, comunque questi ingredienti fenomenologici sono poi utilizzati per ottenere l'EOS della materia neutronica.

8.3.4 La materia neutronica β stabile

Le considerazioni precedenti permettono di ottenere l'EOS della materia di neutroni. Accanto alle teorie sopra menzionate, che utilizzano interazioni nucleone-nucleone microscopiche, ci sono equazioni di stato ottenute con teorie effettive. Queste teorie sono normalmente teorie di campo medio, e le interazioni utilizzate sono fissate per riprodurre alcune proprietà dei nuclei, e ovviamente il punto di saturazione della materia nucleare simmetrica.

Il comportamento di ogni EOS della materia neutronica, ottenuta con qualsiasi teoria, è simile a quello mostrato nel pannello (b) della figura 8.14. Mentre l'energia per nucleone in materia nucleare simmetrica è negativa, nel caso della materia di neutroni è positiva. Questo significa che la materia nucleare simmetrica è un sistema legato dell'interazione forte, mentre non lo è la materia di neutroni. **Le stelle di neutroni sono un sistema di adroni che risulta essere legato dall'interazione gravitazionale, non da quella forte.**

Per ottenere la massa limite della stella di neutroni, non è sufficiente inserire l'EOS nell'equazione di TOV (8.23), ma bisogna, in aggiunta, garantire che la materia di neutroni sia stabile per decadimento β .

Consideriamo che i componenti della stella di neutroni siano protoni, neutroni ed elettroni. In questo caso la condizione di β -stabilità si ottiene quando le reazioni deboli

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad \text{e} \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e , \quad (8.50)$$

sono in equilibrio. Questo avviene quando i potenziali chimici di protoni, neutroni ed elettroni sono legati dalla relazione

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad \text{ovvero} \quad \mu_e = \mu_n - \mu_p , \quad (8.51)$$

che è valida ipotizzando che i neutrini e gli antineutrini prodotti dalle (8.50) lasciano la stella di neutroni senza interagire ulteriormente con la materia adronica. Questo implica che i potenziali chimici dei neutrini e degli antineutrini siano nulli.

In questa approssimazione è possibile collegare la frazione di protoni x_p , Eq. (8.17) al potenziale chimico $\hat{\mu}$. Utilizzando la relazione (8.16) che lega il potenziale chimico all'impulso di Fermi, e la (6.7) che lega l'impulso di Fermi alla densità di numero di elettroni, abbiamo una relazione tra potenziale chimico e numero di elettroni

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{\mu_e}{\hbar c} \right)^3 . \quad (8.52)$$

La stella non ha carica elettrica, quindi il numero di elettroni è uguale a quello di protoni. Questo implica che

$$3\pi^2 n_B x_p (\hbar c)^3 - \mu_e^3 = 0 . \quad (8.53)$$

Questa condizione dice che la β -stabilità per una stella di neutroni, non è soltanto legata all'interazione debole, ma anche a quella forte, attraverso la presenza di x_p .

Quando il valore del potenziale chimico degli elettroni supera quello della massa a riposo del muone:

$$\mu_e > m_\mu c^2 = 105.6 \text{ MeV} , \quad (8.54)$$

diventa energeticamente favorevole per l'elettrone trasformarsi in un muone, con il processo debole

$$e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu . \quad (8.55)$$

Dalla relazione (8.16) risulta chiaro che il numero di questi processi aumenta con l'aumentare dell'impulso di Fermi, e quindi della densità del sistema. Consideriamo il fatto che alla densità di saturazione di materia nucleare corrisponde un valore di k_F di circa 1.36 fm. Dato che $\hbar c \sim 197.33$ MeV fm, risulta ovvio che, alla densità di saturazione di materia nucleare, la disequazione (8.54) è soddisfatta. Questo significa che, per questo valore della densità, nella materia neutronica sono presenti muoni.

Con la presenza di muoni possono avvenire processi del tipo

$$p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu \quad \text{e} \quad n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu , \quad (8.56)$$

e nell'ipotesi di materia trasparente al trasporto di ogni specie di neutrini, abbiamo che l'equilibrio chimico rispetto al decadimento β è ottenuto per

$$\mu_\mu + \mu_p = \mu_n = \mu_e + \mu_p \quad \text{oppure} \quad \mu_\mu = \mu_e = \mu_n - \mu_p . \quad (8.57)$$

In analogia con la relazione (8.52) abbiamo che il numero di muoni può essere espresso come

$$n_\mu = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^3 [\mu_\mu^2 - (m_\mu c^2)^2]^{3/2} \Theta(\mu_e - m_\mu c^2) , \quad (8.58)$$

dove abbiamo indicato con Θ la funzione gradino. La richiesta che la stella sia elettricamente neutra implica

$$3\pi^2 (\hbar c)^3 n_B x_p - [\mu_\mu^2 - (m_\mu c^2)^2]^{3/2} \Theta(\mu_e - m_\mu c^2) - \mu_e^3 = 0 . \quad (8.59)$$

Nella figura 8.15 presentiamo una tipica composizione della stella di neutroni, in funzione della densità nucleonica. I risultati presentati sono stati ottenuti con una specifica EOS di materia neutronica [Bal97], ma sono comunque ben rappresentativi dei risultati che si ottengono con altre EOS. Nella figura sono rappresentati x_p e x_n , Eq. (8.17), normalizzati ad un valore fisso del numero barionico n_B . La condizione di carica nulla implica

$$n_e + n_\mu = n_p \quad \text{e quindi} \quad x_e + x_\mu = x_p , \quad (8.60)$$

dove x_e e x_μ sono definiti come:

$$x_e = \frac{n_e}{n_B} \quad \text{e quindi} \quad x_\mu = \frac{n_\mu}{n_B} . \quad (8.61)$$

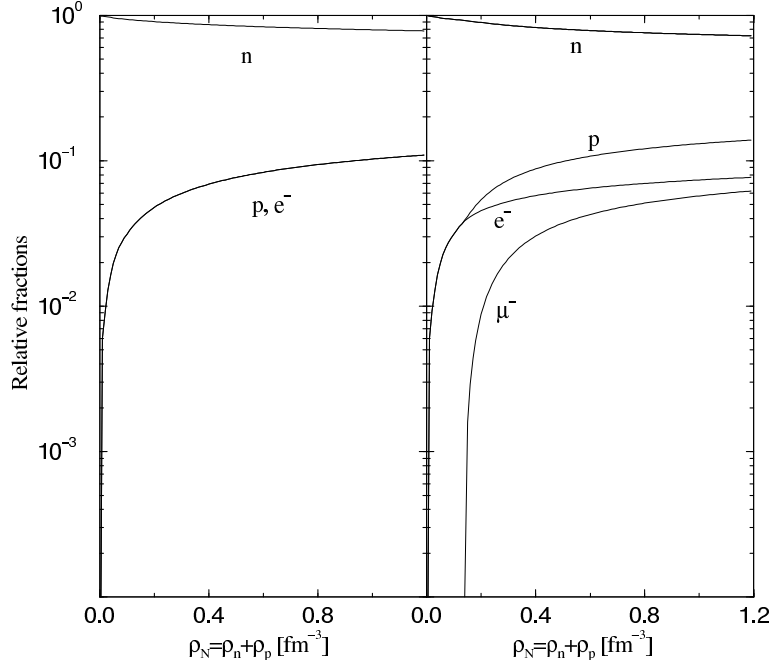


Figura 8.15: Frazioni relative della composizione della stella di neutroni [Par03] in funzione della densità barionica. qui chiamata ρ_N invece che n_B .

8.3.5 Masse delle stelle di neutroni

Il calcolo della massa della stella viene fatto risolvendo le equazioni TOV (8.23) per un valore iniziale della densità centrale e con la conoscenza della relazione tra densità e pressione ottenuta grazie alla conoscenza della EOS. Dall'equazione (2.2) si ottiene poi la massa in funzione della densità centrale. Questo calcolo deve essere implementato dalle condizioni (8.53) e (8.59) per tener conto della stabilità della stella rispetto ai decadimenti β .

Nelle figure 8.16 e 8.17 mostriamo risultati tipici di masse in funzione della densità e del raggio della stella. E' da notare come l'andamento dei risultati della figura 8.16 corrisponda a quello schematizzato nella figura 8.5. La massa cresce all'aumentare del valore della densità e raggiunge un massimo a circa 5 volte il valore della densità di saturazione di materia nucleare. Le condizioni di stabilità per decadimento β producono curve più ripide rispetto a quelle ottenute per pura materia neutronica.

La figura 8.17 mette in relazione masse e raggi della stella, per varie equazioni di stato, tutte calcolate con la teoria CBF ma con diverse interazioni. Le curve continue si riferiscono alla materia β -stabile, mentre quelle a punti alla pura materia neutronica. E' interessante osservare che il valore della massa massima ottenuta con la sola interazione a due corpi (A18) è inferiore a quello ottenuto inserendo l'interazione a tre corpi (A18+UIX). Questo valore della massa massima è più grande anche di quello ottenuto con la EOS che riproduce il punto di saturazione della materia nucleare simmetrica. Il risultato di questa EOS è indicato con (A18+ δ +UIX). Le EOS a cui ci si riferisce sono quelle mostrate nella figura 8.14. Utilizzando il gergo della fisica nucleare, possiamo associare alle EOS più *morbide* le masse minori e a quelle più *rigide* le masse maggiori. E' un comportamento generale il fatto che *EOS rigide danno valori più grandi delle masse massime, raggi più grandi per valori inferiori delle densità centrali, rispetto a EOS più morbide*.

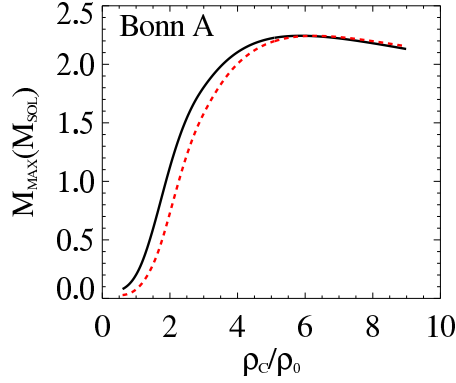


Figura 8.16: Masse gravitazionali delle stelle di neutroni in funzione della densità relativa a ρ_0 , la densità di saturazione della materia nucleare simmetrica. Le curve sono calcolate con una EOS ottenuta con un calcolo di Brueckner utilizzando uno dei potenziali di Bonn. La curva tratteggiata è ottenuta per pura materia neutronica, mentre quella continua per materia neutronica β -stabile.

A18+ δ +UIX	A18+UIX	A18	BBB1	BBB2
2.20	2.38	1.67	1.79	1.92

Tabella 8.5: Valori delle masse massime delle stelle di neutroni espressi in termini della massa solare, per varie EOS.

I valori delle masse massime per le EOS della Fig. 8.17 sono presentati nella tabella 8.5. In aggiunta ci sono risultati ottenuti con calcoli della teoria di Brueckner. Più precisamente il valore BBB1 è stato ottenuto con un potenziale di Argonne V14, e BBB2 con un potenziale di tipo Parigi [Bom99]. Questi sono potenziali a due corpi. Il potenziale di Argonne V14 è molto simile a quello V18. I risultati A18 e BBB1 sono i più simili. Il risultato BBB2 è stato ottenuto con un diverso potenziale a due corpi, ma senza includere la forza a tre corpi. La massa ottenuta è leggermente più grande di quelle date da A18 e BBB1, ma sicuramente inferiore a quelle ottenute quando l'interazione a tre corpi è inserita.

E' da notare che tutte le masse massime ottenute sono più grandi del valor medio di quelle osservate, che è dell'ordine di $1.5 M_\odot$ come mostrato in Fig. 8.6. Si può argomentare a lungo su questo problema. Può darsi che all'interno dell'incertezza sperimentale ci sia compatibilità tra quanto osservato e calcolato. Oppure che, pur esistendo, stelle di neutroni con masse dell'ordine delle due masse solari, non siano ancora state osservate. Dal punto di vista della teoria il limite è quello di aver considerato che la stella sia composta soltanto da protoni, neutroni e leptoni.

8.4 Il core esotico

8.4.1 Core iperonico

Il risultato della sezione precedente indica la necessità di considerare la presenza di barioni pesanti nella composizione della stella di neutroni. Le richieste di base sono la conservazione del numero barionico e della carica elettrica, nulla, della stella. Come abbiamo visto, il potenziale chimico di una specie fermionica, leptone o barione che sia, dipende dall'impulso di Fermi. Se consideriamo un

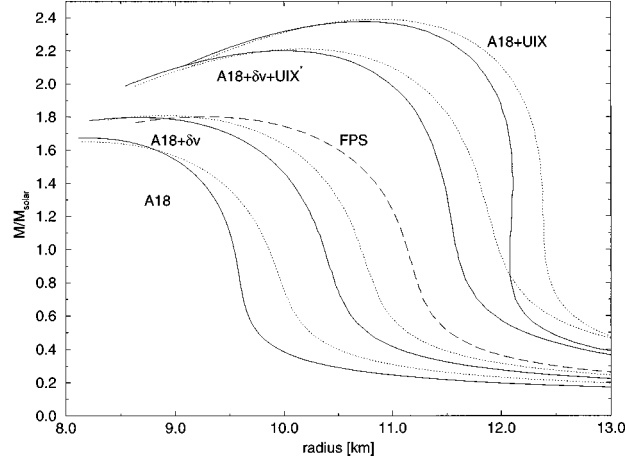
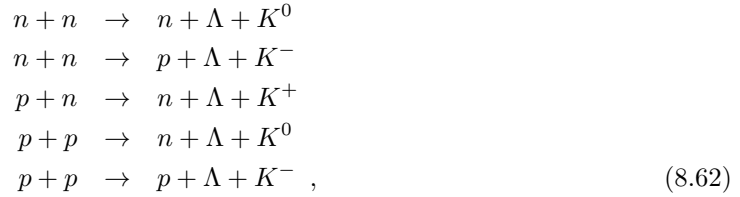


Figura 8.17: Masse gravitazionali delle stelle di neutroni in funzione del raggio. Le indicazioni si riferiscono a vari modelli utilizzati per il calcolo della EOS. Le curve continue si riferiscono alla materia β stabile, quelle a punti alla pura materia di neutroni [Akm98].

modello di Fermi gas non relativistico per i nucleoni, abbiamo che la condizione per la formazione di iperoni Λ , di massa m_Λ attraverso le reazioni



è data da:

$$\frac{\hbar^2 k_{FN}^2}{2m_N} + m_N c^2 \geq m_\Lambda c^2 , \tag{8.63}$$

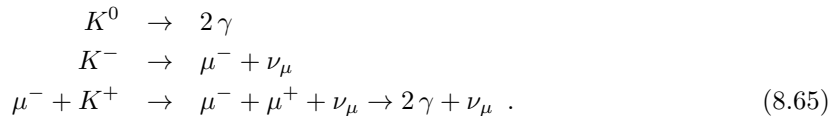
dove il sottoindice N indica il nucleone.

Questo implica che la densità critica per la produzione di Λ è

$$n_{\text{cr}} = \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \frac{[2m_N c^2 (m_\Lambda - m_N) c^2]^{1/2}}{\hbar c} \right\}^3 . \tag{8.64}$$

Dato che $m_\Lambda c^2 = 1115.68 \text{ MeV}$ si ha che $n_{\text{cr}} = 0.837 \text{ fm}^{-3}$, che corrisponde a 5.23 volte la densità di saturazione della materia nucleare simmetrica. In questo calcolo abbiamo usato per m_N la massa media del nucleone.

I kaoni prodotti nelle reazioni (8.62), possono decadere in uno dei seguenti modi:



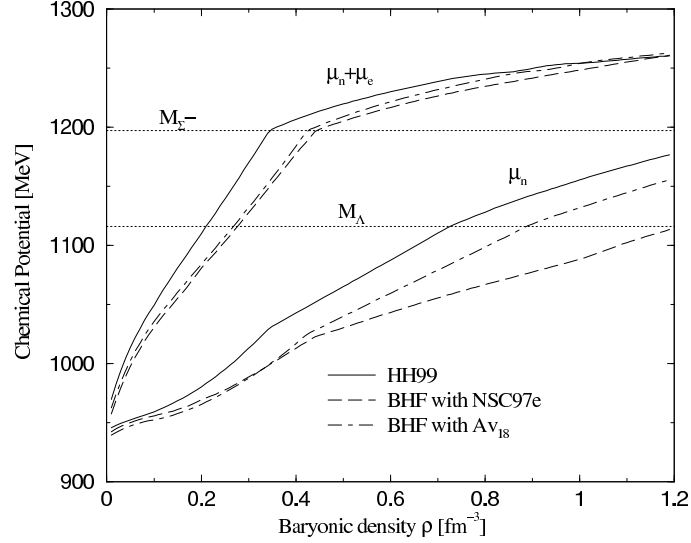


Figura 8.18: Condizioni di equilibrio chimico per l'apparizione degli iperoni Σ^- e Λ per tre diverse interazioni nucleone-nucleone.

Poiché i γ ed i neutrini lasciano la stella, le reazioni (8.65) diventano irreversibili. La presenza di iperoni porta un numero quantico di stranezza della stella diverso da zero. Aumentando la densità appaiono altri iperoni.

In realtà ci si aspetta che gli iperoni Σ^- , nonostante abbiano massa superiore alla Λ , siano presenti a densità addirittura inferiori a n_{cr} . Questo perché nella reazione in cui viene formato l'iperone Σ^-

$$e^- + n \rightarrow \Sigma^- + \nu_e, \quad (8.66)$$

vengono rimossi sia un neutrone ad alta energia, sia un elettrone ad alta energia, mentre nei processi di formazione della Λ viene rimosso soltanto un neutrone energetico.

L'equilibrio per decadimenti deboli impone le seguenti relazioni tra i vari potenziali chimici

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_n - \mu_e = \mu_{\Sigma^-} \\ \mu_n &= \mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_{\Lambda} \\ \mu_n + \mu_e &= \mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} \\ \mu_\mu &= \mu_e, \end{aligned} \quad (8.67)$$

e la conservazione della carica, globalmente nulla, implica che

$$n_p + n_{\Sigma^+} = n_e + n_\mu + n_{\Sigma^-} + n_{\Xi^-}. \quad (8.68)$$

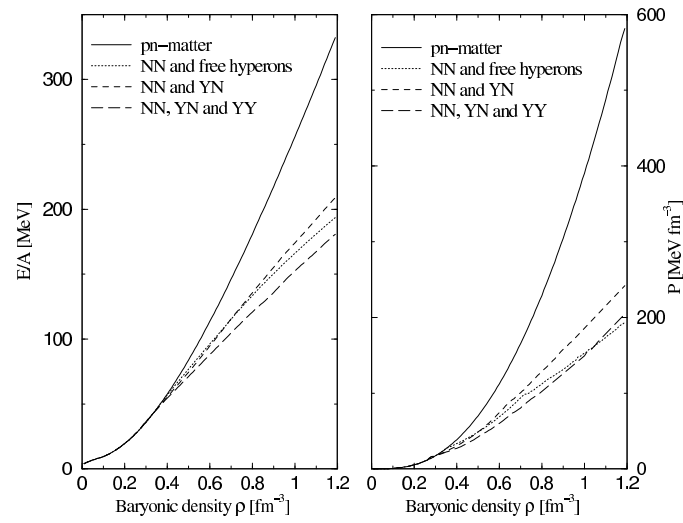


Figura 8.19: Energia per barione (sinistra) e pressione (destra) per una stella di neutroni β stabile. Il calcolo è stato fatto nell'ambito della teoria di Brueckner. Le varie linee indicano i risultati ottenuti quando varie parti dell'interazione tra i barioni sono attive.

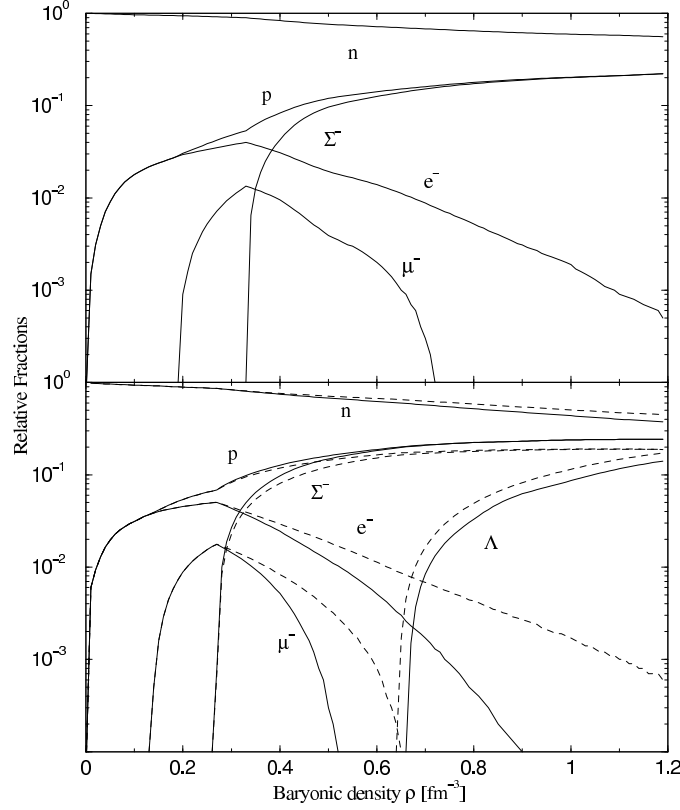


Figura 8.20: Composizione di una stella di neutroni β stabile. I calcoli sono stati sviluppati con la teoria di Brueckner con due approssimazioni differenti dell'autoenergia. Le linee continue indicano i risultati ottenuti quando tutte le interazioni sono attive, mentre le linee tratteggiate sono state ottenute trascurando le interazioni iperone-iperone.

Queste relazioni devono essere considerate nel calcolo dell'equazione di stato. Questo significa che i risultati dipendono dalla teoria utilizzata per il calcolo e dalla parametrizzazione dell'interazione tra i barioni. Mentre l'interazione tra i nucleoni è fissata da numerosi dati empirici da riprodurre, come abbiamo discusso nella sezione 8.3.1, l'interazione iperone-nucleone, e soprattutto iperone-iperone non è ben limitata dalla fenomenologia. Lo studio degli ipernuclei dà informazioni su questo tipo di interazione. Avendo quindi in mente le incertezze teoriche legate all'inserimento degli iperoni nella struttura delle stelle di neutroni, mostriamo alcuni risultati rappresentativi di quanto avviene.

Nella figura 8.18 è mostrato l'andamento dei potenziali chimici in funzione della densità bario-nica. Le diverse curve si riferiscono a diverse interazioni nucleone-nucleone. Al di là delle differenze numeriche è evidente come la soglia di apparizione di iperoni Σ^- in equilibrio β , appare a densità barioniche inferiori rispetto all'apparizione di iperoni Λ .

Nella figura 8.19 mostriamo le EOS ottenute in calcoli di Brueckner con pura materia nucleonica, e accendendo poi l'interazione tra iperoni. L'EOS della materia nucleonica è più rigida rispetto a quella della materia con iperoni interagenti.

La composizione percentuale di una stella di neutroni in equilibrio per interazioni deboli, è mostrata nella figura 8.20. I due pannelli propongono risultati ottenuti con due diverse tecniche di

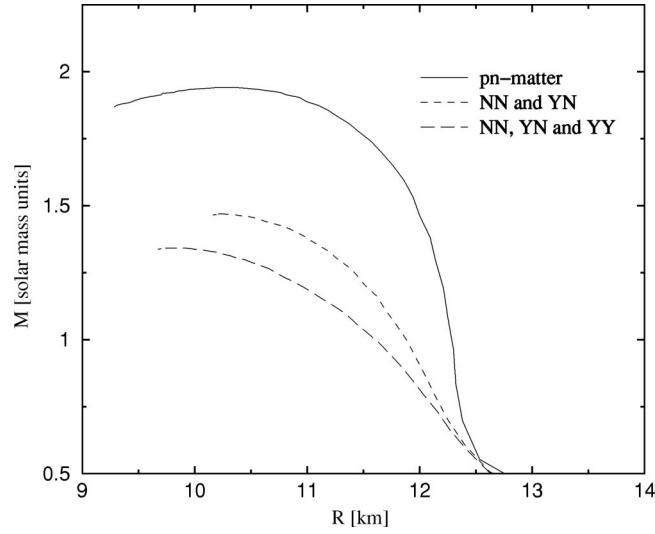


Figura 8.21: Masse totali in funzione del raggio e per varie EOS contenenti interazione tra iperoni.

calcolo all'interno della teoria di Brueckner. Le linee continue sono ottenute quando tutti i barioni interagiscono, mentre quelle tratteggiate sono il risultato che si ottiene spegnendo l'interazione tra iperoni. Anche in questo caso è da notare come sia importante il ruolo dell'interazione iperone-iperone. E' evidente la presenza di iperoni Σ^- a densità inferiori rispetto a quelle in cui appaiono gli iperoni Λ .

Dato che la densità della stella aumenta più ci si avvicina al suo centro, i vari barioni appaiono, in β equilibrio a distanze differenti dal centro. I vari calcoli fatti con diverse interazioni e teorie concordano tutti su questa visione della struttura della stella di neutroni. La crosta ha uno spessore di circa di 1 km e si trova al di là dello strato di materia puramente nucleonica che si trova tra gli 8 e 10 km dal centro. Ad 8 km dal centro la densità è sufficiente per avere iperoni Σ^- in β equilibrio, e questo può essere considerato il raggio del core iperonico, anche se gli iperoni Λ appaiono soltanto a 4 km dal centro della stella.

Il risultato riguardante la massa della stella è presentato nella figura 8.21. Come ci si poteva aspettare, vista la regola generale che collega la rigidità dell'EOS con la massa massima della stella di neutroni, le masse massime ottenute con iperoni interagenti sono inferiori a quelle ottenute con pura materia nucleonica. In questo caso i valori sono addirittura inferiori, ai valori misurati.

8.4.2 Stelle strane

Nonostante le grandi incertezze teoriche che implicano un'incertezza dei risultati attorno al 20%, dal confronto con le masse delle pulsar osservate si deduce che:

1. se si utilizzano EOS puramente nucleoniche le masse previste sono superiori a quelle osservate
2. l'inserimento degli iperoni produce EOS più morbide con masse addirittura inferiori a quelle osservate.

Da questi risultati emerge la necessità di avere pressione ulteriore ad alte densità per poter produrre EOS più rigide. Ovviamente i primi passi da fare vanno nella direzione di migliorare i modelli di

interazione utilizzati per il calcolo delle EOS, soprattutto l'interazione iperone-iperone, che è quella meno conosciuta. Una possibile alternativa è quella di considerare nuova fisica, ad esempio supporre che al centro della stella di neutroni ci sia una zona di materia di quark deconfinati.

Il core delle stelle di neutroni è uno dei luoghi più accreditati dove ci si aspetta che esista una fase della materia in cui i quark siano deconfinati. Nonostante la temperatura sia praticamente nulla, l'alta densità barionica potrebbe permettere l'esistenza di questo stato della materia. Ci si aspetta che il deconfinamento dei quark possa avvenire per densità dell'ordine di 3 - 5 volte la densità di saturazione di materia nucleare.

sapore	u	d	s	c	b	t
massa	5 ± 3	10 ± 5	200 ± 100	1300 ± 300	4300 ± 200	175000 ± 6000
carica	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/3$

Tabella 8.6: Masse dei quark in MeV, e cariche in unità della carica fondamentale.

Consideriamo il core della stella di neutroni come un gas di quark che interagiscono in un regime perturbativo della QCD. Nella tabella 8.6 presentiamo il valore delle masse dei quark in MeV, per i vari sapori. Queste sono da considerare come dei parametri da assegnare ai quark all'interno della teoria QCD. In questo senso potrebbero rappresentare la massa dei quark se non esistesse confinamento.

Data la grande differenza tra la masse di u, d , e s , rispetto alle masse degli altri quark, detti pesanti, nelle stelle di neutroni non ci si aspetta la presenza di questi ultimi. Infatti una situazione di equilibrio β dovrebbe permettere la reazione

$$s \rightarrow c + e^- + \nu_e . \quad (8.69)$$

Questo richiede che il potenziale chimico del quark s debba essere maggiore della massa del charm. Trascurando la massa del quark s possiamo utilizzare la relazione (8.16) che collega il valore del potenziale chimico all'impulso di Fermi. Abbiamo quindi che

$$\mu_s = \hbar c k_{F_s} = \hbar c (3\pi^2 n_s)^{1/3} = \hbar c (3\pi^2 n_B)^{1/3} \geq m_c = 1.3 \text{ GeV} , \quad (8.70)$$

dove abbiamo considerato la densità barionica formata dalla somma in parti uguali delle densità dei tre quark leggeri. La relazione (8.70) implica $n_B \geq 29 \text{ fm}^{-3}$, cioè una densità barionica di circa 180 volte quella di saturazione, molto superiore a quanto ci si aspetta possa essere la densità al centro della stella di neutroni.

Rimane quindi il fatto che un'eventuale core di materia a quark deconfinati sarebbe composto dai tre quark leggeri u, d e s . A questo punto bisogna menzionare l'ipotesi fatta da Bodmer [Bod71] e Witten [Wit84], che la materia composta dai tre quark leggeri in equilibrio per decadimenti β sia il vero stato fondamentale della materia adronica. Chiameremo SQM (Strange Quark Matter) questo stato della materia.

Dal punto di vista osservativo il nucleo con la massima energia di legame per nucleone è il ^{56}Fe . Questo è dove si trova il massimo delle curve presentate nella Fig. 3.1. L'ipotesi di SQM è schematicamente rappresentata nella figura 8.22. Alla densità di saturazione il ^{56}Fe è sicuramente il sistema più stabile, ma ad alte densità risulta più stabile una situazione della materia con stranezza diversa da zero. Evidentemente si pone il problema del perché i nuclei non decadano in gocce di SQM, ovvero perché non avvengano decadimenti del tipo

$$^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}(\text{SQM}) , \quad (8.71)$$

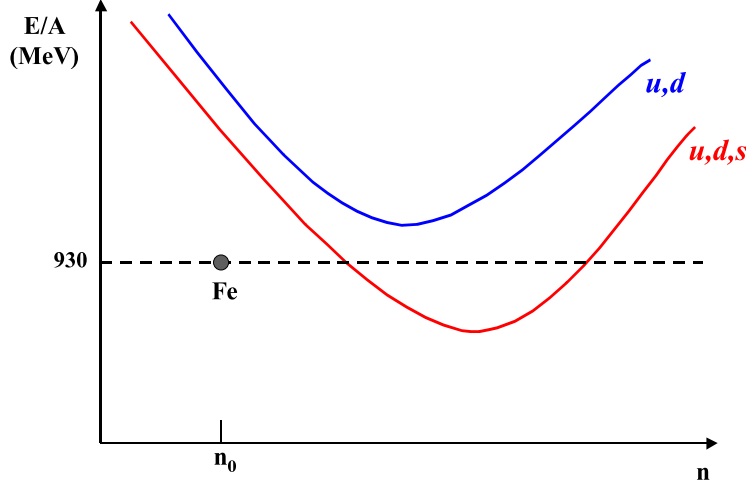


Figura 8.22: Andamento dell'EOS per materia con quark u e d e con quark con stranezza s .

che in termini di quark dovrebbe avvenire attraverso processi del tipo

$$\begin{aligned} u &\rightarrow s + e^+ + \nu_e \\ d + u &\rightarrow s + u \end{aligned} \quad (8.72)$$

Perché possa avvenire il decadimento (8.71) sono necessari 56 decadimenti simultanei del tipo (8.72). La probabilità che avvenga il decadimento (8.71) è proporzionale a $(G_F)^{2A}$ quindi il ^{56}Fe ha una vita media di gran lunga superiore alla vita dell'universo. Ovviamente non è possibile raggiungere lo stato $^{56}(\text{SQM})$ con decadimenti successivi perché la massa del $^{56}\Lambda\text{Fe}$ è maggiore di quella del ^{56}Fe . Quindi secondo l'ipotesi di Bodmer e Witten, i nuclei sono stati metastabili della materia legata da interazione forte, con vita media di gran lunga superiore alla vita dell'universo.

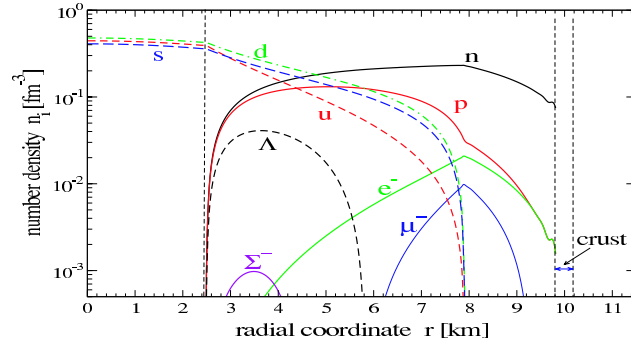
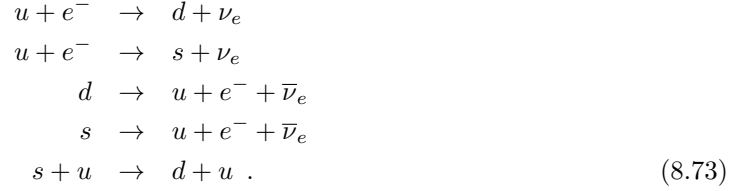


Figura 8.23: Composizione di una stella di neutroni β stabile contenente un core di quark deconfinati.

Quanto abbiamo discusso non si applica ovviamente a situazioni in cui i quark sono deconfinati e quindi la densità è molto alta. In questo caso è necessario calcolare l'EOS. L'approccio fondamentale sarebbe quello di calcolare l'EOS risolvendo la QCD. Ovviamente questo non è al momento possibile, quindi si ricorre a modelli. Un modello molto semplice, ampiamente utilizzato, è l'MIT bag model, che chiameremo MITBM.

Non entriamo nei dettagli del MITBM, ma l'idea è che i quark si muovano confinati all'interno di una regione sferica (la *bag*), e interagiscano molto debolmente, in modo da applicare la QCD perturbativa. La parte non perturbativa della QCD viene presa in considerazione dalla densità di energia, che si suppone costante. Questa densità di energia è normalmente chiamata B , e il suo valore è uno dei parametri liberi della teoria. Le masse dei quark u e d sono considerate nulle e la massa del quark s è un altro parametro libero del modello.

Con questo modello è possibile calcolare l'EOS della SQM in β equilibrio. I decadimenti deboli che devono essere considerati sono



In termini di potenziali chimici le relazioni da considerare sono

$$\mu_d = \mu_s = \mu_u + \mu_e , \tag{8.74}$$

che valgono ipotizzando che i neutrini lascino la stella senza interagire ulteriormente con la materia. La carica globale della stella deve essere nulla, e questo implica che:

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0 . \tag{8.75}$$

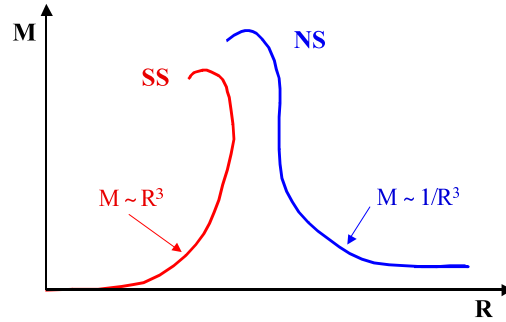


Figura 8.24: Andamento qualitativo della massa in funzione del raggio. La curva etichettata SS, si riferisce alla SQM, mentre la curva etichettata NS ad una EOS con barioni.

Nella figura 8.23 è rappresentata la composizione di una stella di neutroni in cui si ipotizza la presenza di un core di SQM. La struttura per la parte esterna è molto simile a quella descritta in precedenza. Prima c'è la crosta e poi uno strato di circa due km di materia nucleonica. A questo punto si realizza la presenza di gocce di SQM, mentre la presenza degli iperoni è inibita. Gli elettroni altamente energetici che servivano per produrre la Σ^- secondo il processo (8.66), adesso interagiscono direttamente con i quark liberi con le reazioni (8.73). La presenza dei quark liberi aumenta rapidamente a 8 km dal centro della stella. Il numero dei quark è essenzialmente lo stesso per ogni sapore. La presenza degli iperoni è essenzialmente limitata alla Λ , che inizia a circa 6 km

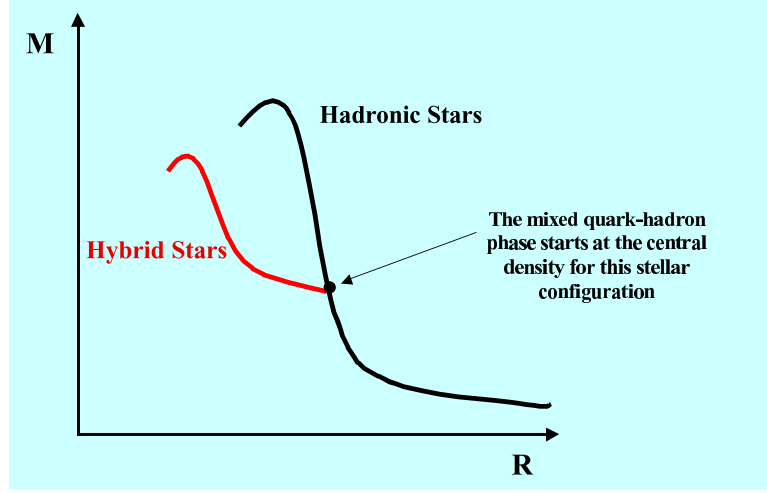


Figura 8.25: Rappresentazione schematica della massa di una stella di neutroni con core di SQM.

dal centro. La presenza di tutti i barioni si spegne a circa 2.5 km dal centro dove rimane un core di pura SQM.

Nella figura 8.24 viene presentato qualitativamente l'andamento della massa della stella contenente SQM in funzione del raggio, e viene confrontato con il tipico risultato che si ottiene nel caso di una stella puramente barionica. Utilizzando l'MITBM la massa della SQM risulta essere inizialmente proporzionale R^3 . Questo è legato al fatto che, sempre nell'ambito del MITBM, la pressione è data da:

$$P = \frac{1}{3}(\rho c^2 - 4B) . \quad (8.76)$$

Questo significa che quando $\rho c^2 < 4B$ la pressione è negativa, o in altre parole, la SQM è legata. La SQM è un sistema legato dalle interazioni forti, contrariamente alla materia neutronica che è legata soltanto per la presenza dell'interazione gravitazionale. Questa differenza produce il diverso andamento delle masse rispetto al raggio della stella.

La figura 8.25 presenta l'andamento della massa della stella di neutroni con core di SQM. A grandi valori del raggio, basse densità, domina la EOS nucleonica. Poi, quando la fase adronica si spegne, a 2.5 km nella figura 8.23, la massa assume i valori che si ottengono per la SQM. La massa massima della stella assume quindi valori inferiori a quella della pura stella nucleonica, ma leggermente superiori a quella della stella contenente iperoni. Utilizzando l'MITBM si ottengono valori della masse massime che vanno da 1.75 a 1.95 masse stellari, dipendendo dai valori dei parametri del modello, B e m_s .

Un'ampia discussione riguardante la possibilità che stelle osservate possano essere candidate stelle strane è in corso [Bom99].

Capitolo 9

Nucleosintesi

La comprensione dell'esistenza degli elementi della tavola periodica è una delle tematiche più studiate dell'astrofisica nucleare. Nei capitoli 4, 5 e 7 abbiamo individuato diverse reazioni nucleari che portano alla formazione di vari elementi della tavola periodica. Questi processi di formazione sono prodotti dalla fusione di due nuclei per formarne uno più pesante. Il processo si arresta attorno al ^{56}Fe che è il nucleo con maggior energie di legame per nucleone. Al di là di questo limite i processi di fusione avvengono soltanto fornendo energia al sistema. Scopo ultimo di questo capitolo è quello di dare una visione globale dell'esistenza dei vari nuclei a noi noti, e soprattutto dare una spiegazione dell'esistenza di nuclei con $A > 56$.

9.1 Nucleosintesi primordiale

Lo spostamento verso il rosso delle linee spettrali delle galassie lontane, proporzionale alla loro distanza, e l'identificazione del fondo cosmico di radiazione elettromagnetica da corpo nero a 2.76 K, sono i pilastri osservativi dell'ipotesi del Big-Bang. In questa teoria, l'universo osservabile nasce da una singolarità di alta densità ed energia che si espande, come il prodotto di un'esplosione.

Nei primissimi istanti di vita l'universo è dominato dalla radiazione e dalla fisica delle particelle elementari. Tutti i tipi di particelle sono generate da collisioni del tipo

$$\gamma + \gamma \longleftrightarrow \text{particella} + \text{antiparticella} . \quad (9.1)$$

Alla temperatura $T \leq 10^{13}$ K, che si suppone sia raggiunta al tempo $t = 10^{-6}$ s, nucleoni e antinucleoni continuano ad annichilarsi, ma la reazione inversa non avviene più perché, in media, i fotoni non hanno più l'energia sufficiente per produrre una coppia nucleone, antinucleone. In questa situazione sono però presenti molti leptoni e neutrini che convertono neutroni e protoni in continuità:

$$p + \bar{\nu}_e \longleftrightarrow n + e^+ \quad (9.2)$$

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^- , \quad (9.3)$$

questo implica che il numero di protoni sia uguale a quello dei neutroni.

Al tempo $t = 10^{-2}$ s la temperatura è scesa al valore di $T \leq 10^{11}$ K, che corrisponde ad energie medie dei fotoni di circa 10 MeV. Gli elettroni sono gli unici leptoni carichi rimasti, mentre sono presenti tutti i tipi di neutrini, in egual numero perché la reazione

$$e^+ + e^- \longleftrightarrow Z^0 \longleftrightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i \quad (9.4)$$

avviene per ogni tipo di neutrino. Il numero di fermioni è governato dalla distribuzione di Fermi-Dirac:

$$n(E) dE = \frac{u(E)}{E} dE = g \frac{4\pi E^2}{(\hbar c)^3} \frac{1}{e^{E/k_B T} + 1} dE , \quad (9.5)$$

dove g è il fattore di degenerazione dello spin e $u(E)$ è la densità di energia. Dato che i neutroni sono leggermente più massivi dei protoni, il loro numero è inferiore per il fattore

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2/k_B T} , \quad (9.6)$$

che per $k_B T = 10$ MeV è circa 0.88.

Al tempo $t = 1$ s la temperatura è $T \leq 10^{10}$ K, corrispondente all'energia dei fotoni di 1 MeV. Le reazioni

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \longleftrightarrow e^- + e^+ \quad (9.7)$$

$$\nu_e + e^\pm \longleftrightarrow \nu_e + e^\pm \quad (9.8)$$

$$\bar{\nu}_e + e^\pm \longleftrightarrow \bar{\nu}_e + e^\pm , \quad (9.9)$$

che intrappolavano i neutrini, diventano poco importanti e quindi avviene il *disaccoppiamento dei neutrini*. Da questo momento i neutrini si espandono liberamente nell'universo, formando un fondo cosmico.

A queste temperature, la reazione

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma , \quad (9.10)$$

è possibile, ma mediamente l'energia dei fotoni è tale che la reazione inversa risulta fortemente inibita. Questo implica un aumento della densità di fotoni.

Il processo di annichilazione dei positroni continua fino a quando rimane un numero residuo di elettroni che compensa il numero di protoni, in modo che la carica totale del sistema sia nulla. Si calcola che il numero di fotoni sia 10^9 volte quello degli elettroni e dei protoni.

A questo punto termina la fase dominata dalle reazioni delle particelle elementari e inizia la fase dominata dalle reazioni nucleari.

La prima reazione nucleare possibile è:

$$n + p \rightarrow d + \gamma . \quad (9.11)$$

Dato che l'energia di legame del deutone è 2.225 MeV, è sufficiente che un fotone con questa energia collida con un deutone per dissociarlo.

Per la presenza di un grande numero di fotoni per nucleone, 10^9 , per avere la stabilità del deutone, sempre mediamente, non è sufficiente che la temperatura media sia inferiore a 2.225 MeV, dato che la distribuzione da corpo nero si estende fino a grandi energie. Per questo motivo anche a temperature inferiori il numero di fotoni può essere sufficientemente grande da mantenere in equilibrio la reazione (9.11). Stimiamo la temperatura a cui si rompe questo equilibrio, approssimando la coda della distribuzione dei fotoni con un'esponenziale:

$$n(E) dE \simeq \frac{8\pi E^2}{(\hbar c)^3} e^{-E/k_B T} dE . \quad (9.12)$$

Il numero di fotoni con energia maggiore all'energia E_0 è dato dall'integrale dell'equazione precedente.

L'integrale può essere fatto per parti considerando che:

$$\int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1) \quad (9.13)$$

$$\int x^n e^{cx} dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} e^{cx} dx , \quad (9.14)$$

con $c \neq 0$.

Si ottiene che il numero di fotoni con energia superiore ad un valore E_0 è:

$$N_\gamma(E > E_\gamma) = \frac{8\pi}{(\hbar c)^3} (k_B T)^3 \left[\left(\frac{E_0}{k_B T} \right)^2 + 2 \left(\frac{E_0}{k_B T} \right) + 2 \right] e^{-E_0/k_B T} . \quad (9.15)$$

La frazione di fotoni è ottenuta dividendo per la densità totale [Kra88]

$$f_\gamma(E > E_\gamma) = 0.42 \left[\left(\frac{E_0}{k_B T} \right)^2 + 2 \left(\frac{E_0}{k_B T} \right) + 2 \right] e^{-E_0/k_B T} . \quad (9.16)$$

Il numero di deutoni disponibile è determinato dal numero di neutroni che sono meno numerosi dei protoni. Il rapporto N_n/N_p (9.6) dipende dalla temperatura fino a quando il numero di elettroni e positroni è sufficientemente alto da mantenere le reazioni (9.2 - 9.3) in equilibrio. Ad una certa temperatura i positroni scompaiono, e il rapporto tra il numero di neutroni e protoni si congela, quando il tasso di reazioni deboli diventa troppo piccolo. Basandosi su quanto è noto delle reazioni deboli, questo avviene alla temperatura di $T \simeq 10^9$ K, che corrisponde a $t = 3$ s e produce $N_n/N_p \simeq 0.2$.

La frazione critica di fotoni di alta energia necessaria per impedire la formazione del deutone è $0.2 \cdot 10^{-9}$, che inserita nell'equazione (9.16) dà una temperatura limite $T = 9 \cdot 10^8$ K, che corrisponde a $t = 250$ s.

Una volta formato il deutone in quantità sufficienti, si innescano altre reazioni nucleari per formare nuclei con $A = 3$,



oppure



e quindi si forma ${}^4\text{He}$:



Le energie di legame di questi nuclei sono maggiori di quella del deutone, quindi la fotodissociazione di questi nuclei non è un fenomeno rilevante.

Dato che non esistono nuclei con $A = 5$, il nucleo di ${}^4\text{He}$ è il risultato principale della nucleosintesi primordiale. Anche il ${}^8\text{Be}$ è instabile, quindi due nuclei di ${}^4\text{He}$ non si possono combinare direttamente. Si forma una piccola porzione di nuclei con $A = 7$



ma la barriera coulombiana è di circa 1 MeV, e l'energia di questi nuclei è ben al di sotto di questo valore (per temperature di $T = 9 \cdot 10^8$ K si ha un'energia cinetica inferiore a 0.01 MeV). Essenzialmente tutti i neutroni terminano come parte dei nuclei di ^4He . Utilizzando il valore $N_n/N_p \simeq 0.2$, dopo una correzione dovuta al decadimento β dei neutroni si ottiene $N_{\text{He}}/N_p \simeq 0.081$. Questo implica che l'abbondanza relativa, in peso, dell'elio primordiale è di circa 0.24, che corrisponde al valore osservato (vedi Fig. 9.1).

In aggiunta all' ^4He c'è una piccola concentrazione di d , ^3He e ^7Li . Il d è coinvolto nelle reazioni nucleari delle stelle, e quindi il valore misurato oggi è probabilmente molto diverso da quello primordiale.

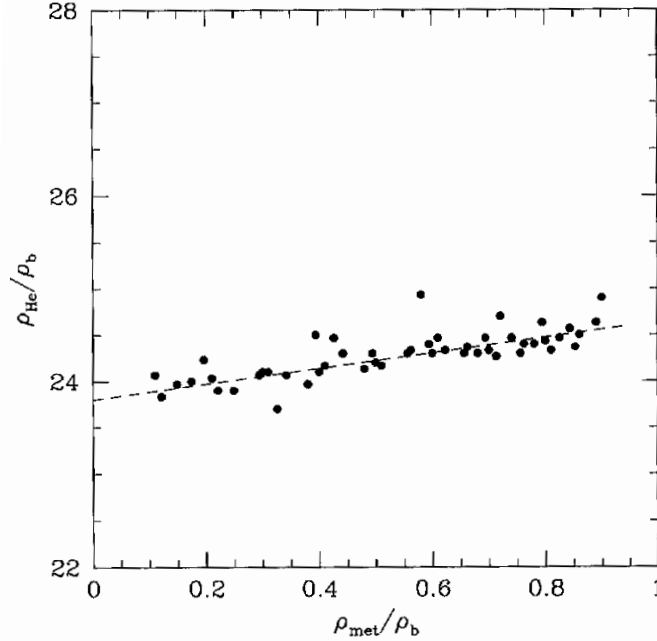


Figura 9.1: Relazione tra l'abbondanza di elio e di nuclei più pesanti dell'elio, detti metalli, nelle popolazioni stellari. Spettri delle galassie nane irregolari e delle galassie blu compatte. Le popolazioni di stelle più antiche sono quelle che hanno abbondanza di elio inferiore. Al tendere a zero dell'abbondanza di metalli (stelle molto antiche) si trova un valore di $\sim 24\%$, che dovrebbe essere antecedente al contributo di elio della nucleosintesi stellare, quindi di origine cosmologica.

La distribuzione dei nuclei in funzione della densità barionica è una previsione del modello del Big-Bang. E' da notare che questo modello prevede una densità barionica molto inferiore rispetto alla densità critica $\Omega = 1$, che si pensa sia comunque quella più probabile per il nostro universo. Questa discordanza è uno degli argomenti su cui si basano le ipotesi di materia oscura non barionica.

9.2 Nucleosintesi da combustione stellare

Il processo dominante per la formazione di elementi con $A \leq 60$ è la fusione di nuclei, soprattutto fusioni indotte da cattura protonica e di α . Il processo di fusione di particelle cariche è stato

descritto in dettaglio nel Cap. 3. Le stelle più giovani si trovano nella sequenza principale, e, come descritto nel Cap. 4, il loro equilibrio idrodinamico è mantenuto dalla combustione dell'idrogeno.

Dalla composizione primordiale, le stelle di prima generazione iniziano come una miscela di gas che comprende il 76% di idrogeno e il 24% di elio (in peso). La combustione dell'idrogeno consiste nella trasformazione di 4 protoni in un nucleo di elio, secondo le catene di reazioni presentate nel Cap. 4. Soltanto nelle stelle di seconda generazione, o ancora più giovani, c'è presenza di carbonio che permette di catalizzare la combustione dell'idrogeno secondo il ciclo *CNO* descritto nella sezione 4.2. E' importante notare che i processi descritti nel Cap. 4, terminano con la produzione di ${}^4\text{He}$ perché non esistono sistemi legati con 5 nucleoni.

Quando il combustibile di idrogeno termina, la stella subisce le trasformazioni descritte nel Cap. 5, e si forma una stella gigante rossa. In questa stella viene bruciato il combustibile di ${}^4\text{He}$. Il processo di fusione avviene grazie alla reazione di formazione del sistema instabile ${}^8\text{Be}$ che cattura immediatamente un'altra particella α in modo da formare un nucleo di ${}^{12}\text{C}$. Abbiamo descritto nel Cap. 5 come il processo possa avvenire grazie alla presenza di una risonanza del ${}^{12}\text{C}$, che permette di fatto la fusione di tre α .

Nella centro della gigante rossa le temperature sono sufficienti per innescare le reazioni



Da notare che il nucleo ${}^{14}\text{N}$ prodotto dal ciclo *CNO* viene bruciato dalla catena di reazioni



L'ultima di queste reazioni funge da importante sorgente di neutroni.

A questo punto se la massa della stella è inferiore alla massa di Chandrasekhar si forma una nana bianca e i processi di nucleosintesi terminano. Nuclei più pesanti del ${}^{12}\text{C}$ si formano, quantomeno in quantità rivelabili, solo in stelle con massa superiore a quella di Chandrasekhar. In queste stelle, come descritto nel Cap. 7, inizia una sequenza di reazioni attivate dall'aumento della temperatura causato dalla contrazione della stella. Queste reazioni di combustione del carbonio sono le (7.1). Dal punto di vista energetico la fase di combustione del carbonio è brevissima e di scarsa rilevanza per l'equilibrio idrodinamico, dato che la maggior parte dell'energia prodotta lascia la stella sotto forma di neutrini.

All'aumentare della contrazione della stella, e quindi della temperatura, dopo l'esaurimento del ${}^{12}\text{C}$ ci si attende la fotodisintegrazione del neon



Quindi a $1.5 \cdot 10^9$ K diventa efficiente la combustione dell'ossigeno



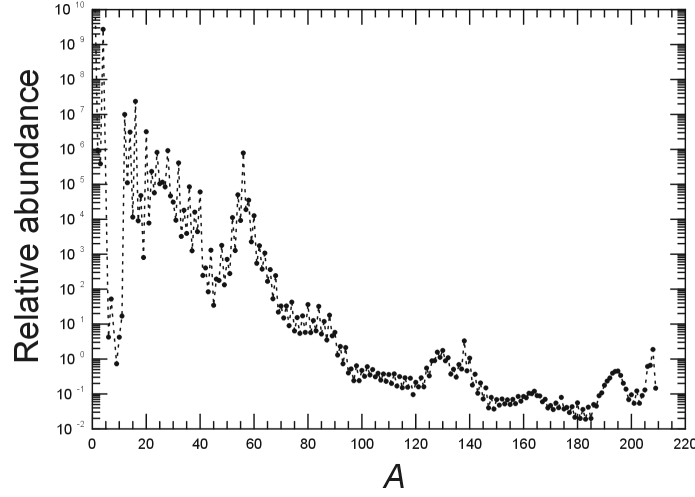


Figura 9.2: Abbondanza dei nuclidi nel sistema solare riferita a quella del ^{28}Si definita come 10^6 . Da notare la scarsa abbondanza dei nuclei leggeri e il picco del Ferro.

Alle temperature di $2 \cdot 10^9$ K le fotoreazioni diventano importanti. I processi di formazione continuano con la sequenza descritta nella sezione 7.1 dalla catena di combustione del silicio (7.4). A questo punto le varie reazioni nucleari di produzione di nuclei e la loro fotodissociazione sono in equilibrio termodinamico. In questa situazione sono preferiti i nuclei più stabili attorno al ^{56}Fe . Una tale teoria di nucleosintesi riesce a spiegare, anche quantitativamente il *picco del ferro*.

9.3 Nucleosintesi da cattura neutronica

La fusione di due nuclei non è energeticamente conveniente se viene coinvolto un nucleo più pesante del ^{56}Fe . Il meccanismo che produce nuclei più pesanti di questo nuclide è la cattura neutronica. Supponiamo che il ^{56}Fe sia il nucleo più numeroso al termine della catena di reazioni di fusione. La successiva cattura neutronica produce le seguenti reazioni:



L'isotopo 59 del ferro non è stabile e ha una vita media di circa 45 giorni. Se il flusso di neutroni è così basso che la probabilità di cattura neutronica in 45 giorni risulta essere molto piccola, il ^{59}Fe decade β in ^{59}Co che essendo stabile può essere bersaglio di una cattura neutronica, innescando una catena di reazioni di cattura sugli isotopi del cobalto. Alternativamente, il flusso di neutroni può essere così intenso che la probabilità di cattura neutronica da parte del ^{59}Fe risulta essere molto alta. La catena di reazioni continua quindi tra gli isotopi del Fe, ^{60}Fe ($t_{1/2} = 3 \cdot 10^5$ anni), ^{61}Fe ($t_{1/2} = 6$ minuti), ^{62}Fe ($t_{1/2} = 68$ s), e oltre. In questo modo è possibile raggiungere un isotopo così ricco di neutroni, da non essere più legato, oppure tale che la sua vita media di decadimento β sia molto più piccola del tempo di cattura neutronica. A questo punto il nucleo cambia la sua carica di un'unità e la cattura neutronica prosegue secondo la nuova catena isotopica.

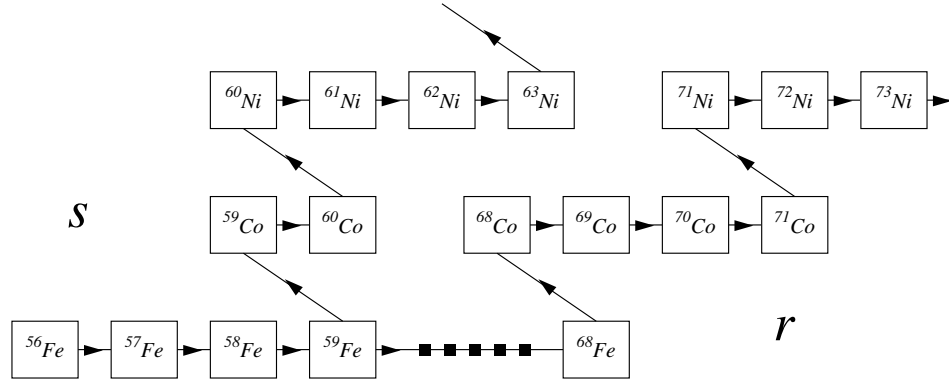


Figura 9.3: Schematizzazione dei processi *s* e *r*. Con i quadri neri indico reazioni di cattura neutronica che producono tutti gli isotopi dal ^{59}Fe al ^{68}Fe .

I due processi descritti sopra sono i maggiori responsabili per la produzione di elementi con $A > 60$. Il primo processo è detto lento (*s* sta per *slow*), perchè il flusso di neutroni è così basso che i tempi di incontro con un neutrone che può essere catturato sono molto più lenti della vita media dei nuclei instabili prodotti. Il secondo processo, con alto flusso di neutroni, è detto rapido (*r* sta per *rapid*).

I processi di formazione di nuclei più pesanti del ferro, sono comunemente indotti dalla cattura neutronica

$$(Z, A - 1) + n \rightarrow (Z, A) + \gamma . \quad (9.41)$$

Questi processi sono determinati dall'intensità del flusso neutronico, dalla sezione d'urto di cattura neutronica (vedi la Fig. 9.4) e dalla costante di decadimento β dell'isotopo prodotto. L'equazione che descrive l'abbondanza N_A di un isotopo in funzione del tempo è:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = N_n(t) \langle v \rangle [\sigma_{A-1}N_{A-1} - \sigma_A N_A] - \lambda_A N_A(t) , \quad (9.42)$$

dove N_n è la densità di neutroni e $\langle v \rangle$ la loro velocità media, σ è la sezione d'urto di cattura neutronica, e λ_A è la costante di decadimento β per il nucleo con A nucleoni.

Il processo di formazione di nuovi nuclei per cattura neutronica è positivo quando il termine tra parentesi quadre è positivo e domina il termine di decadimento. La separazione tra processi *s* e *r* è legata proprio a questa differenza. Per un dato isotopo, le sezioni d'urto σ_{A-1} e σ_A , la costante di decadimento λ_A sono fissate. Il fattore che permette, o inibisce, la formazione del nucleo è il flusso neutronico, scritto nella (9.42) come il prodotto tra densità dei neutroni e la loro velocità media. Bassi flussi neutronici si trovano nelle fasi finali di una stella massiva (presupernova), mentre flussi intensi di neutroni sono prodotti durante la fase esplosiva di una supernova.

9.3.1 Processi lenti (*s*)

Come indicato nella figura 9.3, in un processo lento, il neutrone viene catturato e forma un nucleo che, se instabile, decade prima di catturare un altro neutrone. Per questo motivo, nel caso di nuclei

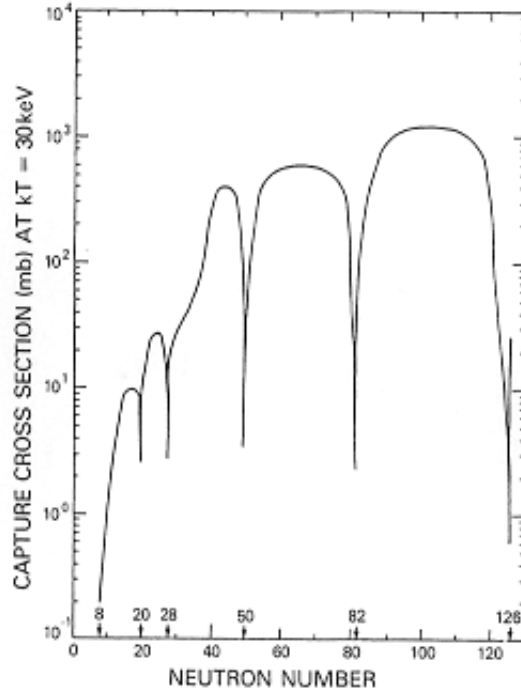


Figura 9.4: Sezione d'urto di cattura neutronica in funzione del numero di neutroni. Da notare i minimi in corrispondenza dei numeri magici.

instabili il termine di decadimento nell'equazione (9.42) è dominante. Al contrario, per nuclei stabili, o con vita media molto più lunga del tempo medio per la cattura di un altro neutrone, l'ultimo termine è trascurabile rispetto agli altri. Ne risulta che i nuclei prodotti da processi s sono molto vicini alla valle di stabilità.

Considerando l'equazione (9.42) si ha che, per nuclei stabili, la condizione di equilibrio viene raggiunta quando

$$\sigma_{A-1}N_{A-1} = \sigma_A N_A . \quad (9.43)$$

Le abbondanze osservate in natura per i nuclei che si possono formare con processi s mostrano l'esistenza di una buona correlazione tra abbondanze e sezioni d'urto per cattura neutronica. Il prodotto $\sigma_A N_A$ è una funzione abbastanza liscia di A , (vedi Fig. 9.5) nonostante l'irregolarità dell'andamento di σ_A , come mostrato nella figura 9.4.

Il processo di formazione s avviene nell'ambito della combustione del Si in stelle massive. La principale sorgente dei neutroni utilizzati nel processo s è la reazione



La validità della nostra descrizione dei processi s viene verificata facendo simulazioni dettagliate dell'abbondanza dei vari nuclei nel sistema solare. I dati di ingresso della simulazione sono l'abbondanza di ^{22}Ne , che quantifica il flusso di neutroni secondo la reazione (9.32), e l'abbondanza di ^{56}Fe che rappresenta il nucleo bersaglio. Queste simulazioni indicano che le quantità di questi due nuclei sono più che sufficienti per produrre tutte le quantità di elementi più pesanti del ferro osservate nel sistema solare [Rol88].

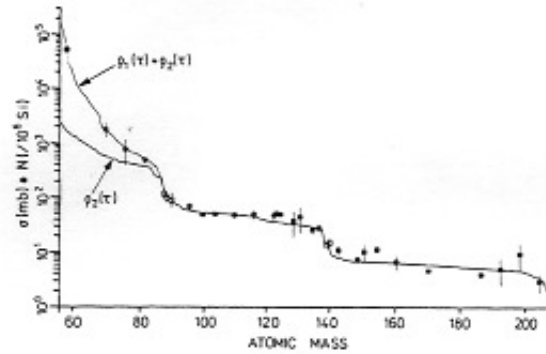


Figura 9.5: Prodotto tra sezione d'urto di assorbimento e abbondanza relativa. Le due curve rappresentano due modelli teorici per la descrizione dei dati.

I neutroni da processi s catturati dal ^{22}Ne permettono di formare quasi tutti i nuclei da $A = 23$ ad $A = 44$. Quelli catturati dal ^{56}Fe permettono di formare nuclei da $A = 63$ ad $A = 209$. La catena si interrompe con il ^{209}Bi perchè il ^{210}Bi decade α . Il decadimento α gestito dalle interazioni forti è estremamente veloce. I suoi tempi sono certamente inferiori a quelli mediamente necessari per incontrare, e assorbire, un neutrone. Data la relazione di equilibrio (9.43), e il piccolo valore di σ_A per i nuclei doppio magici, ci si aspettano picchi di abbondanza in presenza di numeri magici di neutroni, come indicato nella figura 9.6.

9.3.2 Processi rapidi (r)

I processi s sono in grado di spiegare una gran parte delle abbondanze osservate, restano però evidenze di produzione di elementi non collegabili a questi processi, che come abbiamo discusso nella sezione precedente, avvengono nelle fasi di equilibrio idrostatico della stella. Rimangono da spiegare:

1. l'abbondanza di 27 nuclei con $A \geq 70$ non ottenibili con processi s ,
2. l'esistenza di elementi più pesanti del ^{209}Bi , ad esempio l'uranio,
3. l'abbondanza anomala di elementi leggeri, superiore alle stime basate sulla sintesi primordiale.

E' evidente la necessità di ipotizzare l'intervento di processi rapidi, r , che avvengono in fasi di non equilibrio della stella, ad esempio nel collasso ed esplosione di una supernova. Sotto un intenso flusso di neutroni diventa possibile che un nucleo assorba un neutrone prima che possa decadere β . Questo procedimento produce nuclei ricchi di neutroni che poi decadono man mano verso la valle di stabilità.

In fasi di non equilibrio c'è anche la possibilità di cattura protonica, inibita però dalla barriera coulombiana, oppure di fotoemissione di un neutrone. Entrambi questi processi producono nuclei ricchi di protoni. In ogni caso l'abbondanza di questi nuclei è un fattore 100 inferiore a quella dei nuclei prodotti con processi di cattura neutronica [Rol88]. Ovviamente, processi r possono anche formare i nuclei prodotti da processi s .

La procedura per ottenere il numero di nuclei prodotti da processi r , N_r , si basa sull'osservazione che σN_s è una funzione $f(A)$, molto liscia del numero di massa A . Si può stimare il numero di nuclei prodotti da processi r , N_r , facendo la differenza tra le abbondanze totali misurate nel sistema

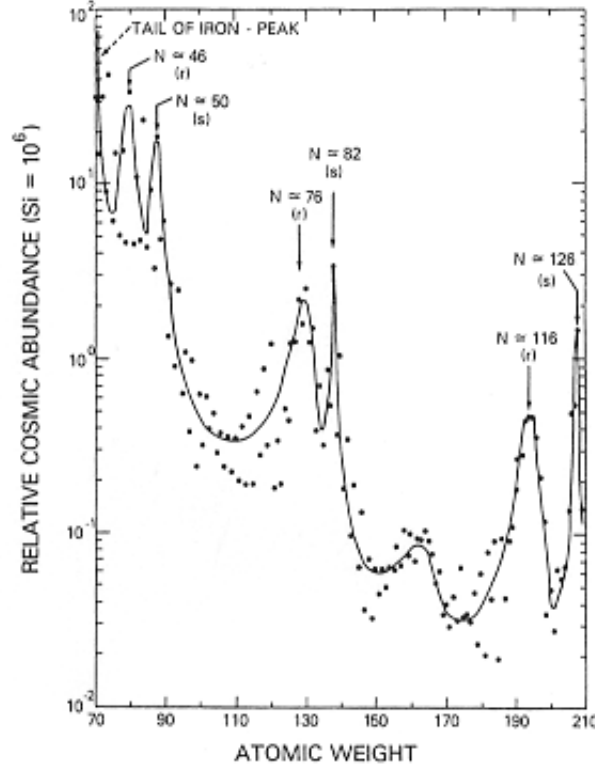


Figura 9.6: Abbondanze relative per nuclei con $A > 60$. Il riferimento è sempre l'abbondanza di $^{28}\text{Si}=10^6$. Da notare l'aumento delle abbondanze in corrispondenza dei numeri magici di neutroni. I picchi prodotti da processi r e s sono indicati.

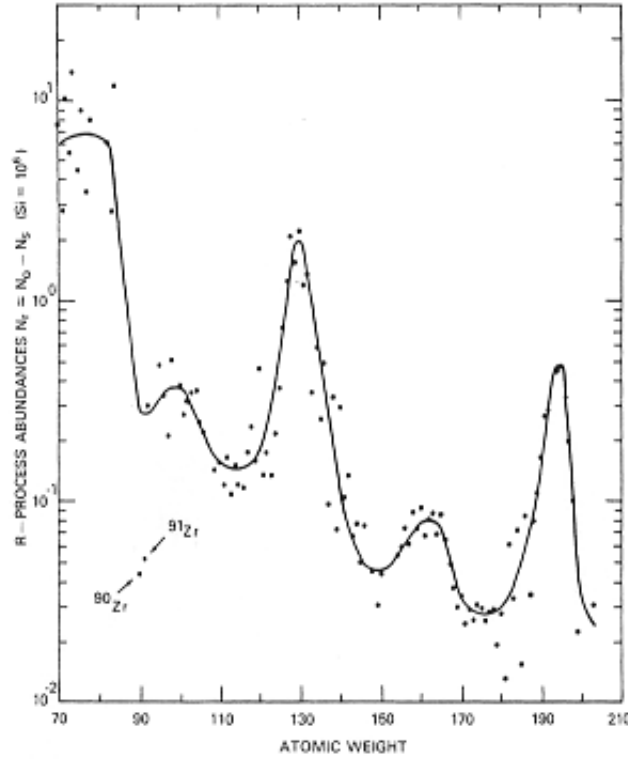
solare $N_{\odot}$ e quelle previste per produzione da processi s , N_s

$$N_r \simeq N_{\odot} - N_s = N_{\odot} - \frac{f(A)}{\sigma(A)} . \quad (9.45)$$

Questo risultato dipende dalle ipotesi fatte sull'andamento di $f(A)$ e dalla conoscenza della sezione d'urto $\sigma(A)$. La figura 9.7 mostra il risultato di questa procedura. E' interessante notare la presenza di massimi attorno ad $A = 80$, $A = 130$ e $A = 195$. La spiegazione della presenza di questi picchi è un vincolo sulle ipotesi del modello di nucleosintesi da processo r .

Come abbiamo detto, il fenomeno che sta alla base del processo r è la cattura neutronica che avviene in tempi molto inferiori a quelli del decadimento β . Partendo da un nucleo (Z, A) l'alto flusso neutronico innesca una serie di reazioni di cattura neutronica che aumenta, di volta in volta, il numero di massa del nucleo bersaglio di una unità. Il processo si arresta dopo i reazioni, quando il tasso di cattura entra in equilibrio con quello di fotodisintegrazione.

L'energia minima richiesta per strappare un neutrone al nucleo, detta energia di estrazione del neutrone Q_n , è una caratteristica specifica di ogni isotopo. Il valore di Q_n è strettamente legato alla dettagliata struttura del nucleo, che coinvolge vari fattori come il numero di protoni, la chiusura di shell, ed altro. A di là delle specifiche differenze legate ad ogni isotopo, in generale, il valore di Q_n diminuisce con l'aumentare della differenza tra numero di protoni e di neutroni. Questo significa

Figura 9.7: Abbondanza relative riguardanti i soli processi r .

che aumentando il numero di neutroni, quindi diminuendo Q_n , i processi di fotoemissione (γ, n) possono avvenire con fotoni di energia sempre più bassa. A parità di temperatura, considerando la distribuzione energetica dei fotoni, il numero di fotoni che può emettere neutroni, è maggiore per nuclei con grande eccesso di neutroni.

L'equazione che descrive la variazione nel tempo del numero di nuclei con un certo numero atomico A è:

$$\begin{aligned} \frac{dN_A(t)}{dt} &= \Phi_n(t) [\langle \sigma_{A-1}(n, \gamma) \rangle N_{A-1} - \langle \sigma_A(n, \gamma) \rangle N_A] \\ &- \Phi_\gamma(t) \langle \sigma_A(\gamma, n) \rangle N_A(t) - \lambda_A N_A(t) , \end{aligned} \quad (9.46)$$

dove ho indicato con $\Phi_{n, \gamma}$ rispettivamente i flussi di neutroni e di gamma, con $\langle \sigma \rangle$ le sezioni d'urto di cattura neutronica e fotodisintegrazione, e con λ , la costante di decadimento debole. Quando cattura e disintegrazione sono in equilibrio, i primi tre termini dell'equazione precedente sommano a zero. La variazione del numero di nuclei $(Z, A + i)$ rimane stabile fino a quando il decadimento β non diventa rilevante

$$(Z, A + i) \rightarrow (Z + 1, A + i) + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (9.47)$$

Il processo appena descritto si ripete con i nuclei di carica $Z + 1$. Il nucleo isobaro $(Z + 1, A + i)$ assorbe neutroni fino a quando l'equilibrio tra cattura e fotoemissione di neutroni non è raggiunto, questa volta per l'isotopo $(Z + 1, A + i + k)$.

Questa sequenza di eventi implica l'esistenza di un *punto di attesa* per ogni valore della carica Z . In questo punto si attende il decadimento β per poter continuare il processo di assorbimento di neutroni. In questa situazione, le abbondanze non sono caratterizzate dal numero di massa, come nel caso del processo s , ma dal numero di carica Z .

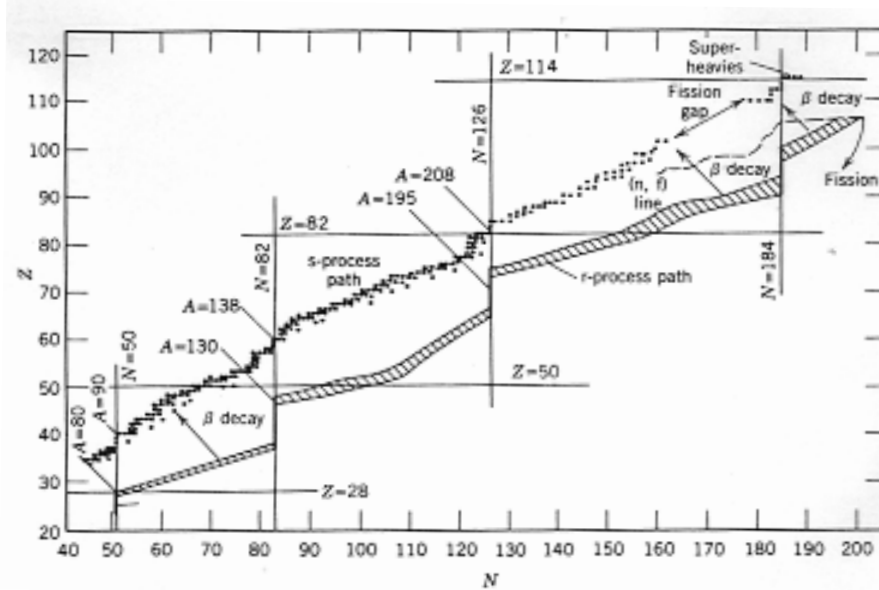


Figura 9.8: Schema di formazione dei vari nuclei con processi s e con processi r . Sono evidenziati i punti di attesa attorno ai valori magici di nucleoni.

I processi r generano nuclei ricchi di neutroni, tipicamente con 10-20 neutroni in eccesso rispetto ai vicini nuclei stabili. Nel processo r , il ruolo dei numeri magici, ovvero della chiusura di shell, è importante. La chiusura di shell implica una particolare stabilità del sistema. Questo significa, tra gli altri effetti, che l'energia di separazione Q_n per un nucleo magico, è di gran lunga maggiore di quella dell'isotopo con un neutrone in più. Inoltre, la vita media di decadimento β di questi nuclei semi-magici, è relativamente più grande di quella dei nuclei vicini. Per questi motivi, i nuclei con shell chiusa di neutroni rappresentano un gruppo speciale di punti di attesa. Dopo il decadimento β , il nucleo (Z, N_m) , dove N_m indica il numero magico di neutroni, è trasformato nel nucleo $(Z + 1, N_m - 1)$ che per cattura neutronica si trasforma immediatamente nell'isotopo $(Z + 1, N_m)$, in cui il numero di neutroni è ancora magico. Ci si aspetta quindi una sequenza di punti di attesa in corrispondenza dello stesso valore magico dei neutroni N_m , in cui il valore di Z aumenta lentamente di un'unità alla volta. Alla fine, dopo numerosi eventi di decadimento β e assorbimento di neutroni, i nuclei prodotti sono sufficientemente vicini alla linea di stabilità che il valore di Q_n diventa abbastanza grande da rompere l'equilibrio con il processo di fotoemissione di neutroni, in modo da superare il limite del punto d'attesa, e produrre nuclei con numero di neutroni maggiore di N_m .

Il grande flusso di neutroni che permette il verificarsi di processi r è presente in momenti di grande instabilità della stessa, e quindi dura per tempi molto più piccoli rispetto a quelli della vita della stella. Per questo motivo si può affermare che ad un certo momento il processo r termina perché il flusso di neutroni non è sufficientemente intenso per poterlo attivare. A questo punto la materia stellare si trova in presenza di un grande numero di nuclei che hanno, in genere, un grande eccesso di neutroni. Questi nuclei ricchi di neutroni, sono soggetti ad una catena di decadimenti

β fino a quando non si forma l'isobaro stabile, ovvero l'isobaro che nella valle di stabilità si trova più prossimo al nucleo progenitore. Il risultato finale è che i nuclei stabili che hanno progenitori con lo stesso N_n hanno un numero inferiore di protoni se prodotti da processo r rispetto a quelli prodotti nel processo s . Ad esempio il nucleo $^{124}_{50}\text{Sn}_{74}$ non ha un numero magico di neutroni ma lo ha il progenitore $^{124}_{42}\text{Mo}_{82}$. Nelle figure 9.6 e 9.7 si vede che i picchi del processo r sono posizionati attorno a $A = 80$, $A = 130$, $A = 195$, ognuno con circa 8-12 unità di massa inferiori ai picchi del processo s . Nel processo r non è banale la relazione tra le proprietà del nucleo progenitore e quella del nucleo stabile finale.

Una simulazione precisa dei processi di formazione r richiede la conoscenza delle proprietà di nuclei particolarmente ricchi di neutroni. Uno grande sforzo sperimentale, basato su acceleratori con fasci di nuclei radioattivi, è stato programato per produrre e investigare nuclei con grande eccesso di neutroni. Al momento stime vengono fatte estrapolando la formula semi-empirica della massa.

Grazie al processo r è possibile superare la barriera del decadimento α del ^{210}Bi che arresta processo s . Per nuclei più pesanti del ^{210}Bi il processo r di cattura neutronica si interrompe quando incontra la soglia fissione indotta dall'assorbimento del neutrone. Il processo r è il solo responsabile dell'esistenza dei nuclei più pesanti del bismuto, in particolare dei nuclei con lunga vita media ^{232}Th , ^{325}U e ^{328}U .

Appendici

Appendice A

Tabelle

Lista delle abbreviazioni		
Abbreviazione	Significato	Note
CNO	Ciclo Carbonio-Azoto-Ossigeno	
CBF	Correlated Basis Function	
EOS	Equazione di Stato (equation of state)	
HR	Hertzprung-Russell	
MSS	Modello Solare Standard	
MITBM	MIT Bag Model	Cap. 8.4.2
PCAC	Partially Conserved Axial Current	
QCD	Quantum Chromo Dynamics	
QED	Quantum Electro Dynamics	
SI	Sistema Internazionale di unità di misura	
SNO	Subdury Neutrino Observatory	Cap. 4.46
SQM	Strange Quark Matter	Cap. 8.4.2
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff	Cap. 8.3.4

Tabella A.1: Lista delle abbreviazioni usate

Lista dei simboli

Simbolo	Significato	Note
d	deutone	nelle reazioni nucleari
N_A	numero di Avogadro	
G_F	costante di Fermi	
G_N	costante di gravitazione universale	
j	energia prodotta in un secondo dall'unità di massa	capitolo 2
k_B	costante di Boltzmann	
L	luminosità	
$L_\odot$	luminosità del sole	
$M_\odot$	massa del sole	
m_e	massa dell'elettrone	
m_n	massa del neutrone	
m_p	massa del protone	
p	protone	nelle reazioni nucleari
P	pressione	
$P_\odot$	pressione del sole	
R	raggio della stella	capitolo 2
$R_\odot$	raggio del sole	
S	fattore astrofisico	3.50
T	temperatura assoluta	in Kelvin
$T_\odot$	temperatura del sole	
α	particella α , nucleo di ^4He	nelle reazioni nucleari
χ	coefficiente di assorbimento per unità di massa	capitolo 2
γ	fotone	nelle reazioni nucleari
$\bar{\rho}_\odot$	densità media del sole	
ν_e	neutrino elettronico	
ν_μ	neutrino muonico	
ν_τ	neutrino τ	
σ_B	costante di Stefan-Boltzmann	

Tabella A.2: Lista dei simboli utilizzati

Costanti fondamentali		
quantità	simbolo	valore
velocità della luce nel vuoto	c	$0.299792 \cdot 10^9 \text{ m / s}$
Costante gravitazionale	G_N	$6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2 = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2$
Costante di Boltzmann	k_B	$1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J / K} = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV / K}$
Costante di Plank	$\hbar = h/2\pi$	$6.6260755 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$
	$\hbar c$	193.327 MeV fm
Costante di Fermi	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.66 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
carica unitaria	e^2	1.44 MeV fm
massa del protone	m_p	$1.672621 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938.27 \text{ MeV / c}^2$
massa del neutrone	m_n	$= 939.56 \text{ MeV / c}^2$
massa dell'elettrone	m_e	$9.10938188 \cdot 10^{-31} = 0.511 \text{ MeV / c}^2$
anno	y	$= 3.1 \cdot 10^7 \text{ s}$
secondo	s	$= 0.32 \cdot 10^{-7} \text{ y}$

Tabella A.3: Valori di alcune costanti fisiche.

Parametri solari	
$R_\odot$	$= 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$
$M_\odot$	$= 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
$L_\odot$	$= 3.86 \cdot 10^{26} \text{ J/s}$
	$= 2.41 \cdot 10^{39} \text{ MeV/s}$
	$= 9.22 \cdot 10^{25} \text{ cal/s}$
$\bar{\rho}_\odot$	$= 1.41 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
$T_\odot(\text{centro})$	$= 1.56 \cdot 10^7 \text{ K}$
$T_\odot(\text{superficie})$	$= 5.78 \cdot 10^3 \text{ K}$
$P_\odot(\text{centro})$	$= 2.5 \cdot 10^6 \text{ atm}$
$P_\odot(\text{superficie})$	$= 0$

Tabella A.4: Valori di alcuni paramteri solari. I valori di $T_\odot$ e $P_\odot$ sono derivati da modelli del sole, mentre gli altri sono dati osservati.

Bibliografia

- [Ahm02] Q.R. Ahmad et al., Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301.
- [Akm98] A. Akmal and V. R. Pandharipande and D. G. Ravenhall, Phys. Rev. C, **58** (1988) 1804.
- [Arn77] W.D. Arnett, Astrophys. J. **218** (1977) 815.
- [Baa34] W. Baade e F. Zwicky, Phys. Rev. **46** (1934) 76.
- [Bah01] J. Bahcall, M. H. Pinsonneault, S. Basu, Ap. J. , **555** (2001) 990.
- [Bha88] R.K. Bhaduri *Models of the nucleon*, Addison Wesley, Menlo Park (1988).
- [Bal97] S. Balberg e A. Gal, 435. Nucl. Phys. A **625** (1997)
- [Bal99] M. Baldo, in *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*, M. Baldo Ed., World Scientific, Singapore, (1999).
- [Ben00] G. Bendiscioli, *Fenomeni radioattivi e dintorni*, La goliardica pavese, Pavia (2000).
- [Ber82] C. Bernardini e C. Guaraldo, *Fisica del nucleo*, Editori Riuniti, Roma (1982).
- [Ber13] C. Bertulani, *Nuclei in the Cosmos*, World Scientific, Singapore (2013)
- [Bet79] H. Bethe, G.E. Brown, J. Applegate e J.M. Lattimer Nucl. Phys. A **324** (1979) 487.
- [Bet85] H. Bethe e G.E. Brown, Le Scienze **203** (1985) 70.
- [Bis07] C. Bisconti, F. Arias de Saavedra e G. Co', Phys. Rev. C **75** (2007) 034604.
- [Bjo64] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
- [Bla62] J.M. Blatt e V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1962).
- [Bod71] A.R. Bodmer, Phys. Rev. D **4** (1971) 160.
- [Bom99] I. Bombaci, in *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*, M. Baldo Ed., World Scientific, Singapore, (1999).
- [Bro82] G.E. Brown, H. Bethe e G. Baym, Nucl. Phys. A **375** (1982) 481.
- [Co03] G. Co', *Introduzione alla teoria formale dei molticorpi*, Università di Lecce, Lecce (2003), non pubblicato.
- [Cos03] M. L. Costantini, Tesi di Laurea, Università dell'Aquila, (2003), non pubblicato.

- [Dav89] R. Davis, A. K. Mann e L. Wolfenstein, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **39** (1989) 467.
- [Eis76] J. Eisenberg e W. Greiner, *Nuclear Theory*, Vol.3, *Microscopic theory of the nucleus*, North-Holland, Amsterdam (1976).
- [Fet71] A.L. Fetter e J.D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill, S. Francisco, (1971).
- [Gro90] K. Grotz e H.V. Klapdor, *The weak interaction in nuclear, particle and astrophysics*, Adam Hilger, Bristol, (1990).
- [Hew68] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F. Scott, R.A. Collins, *Nature* **217**, (1968) 709.
- [Jac04] C.B. Jackson, *et al.* ArXiv:astro-ph/0409348.
- [Koo86] S. Koonin, *Computational Physics*, Addison-Wesley, Redwood City (1986).
- [Kra88] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley, New York (1988).
- [Lag81] I. Lagaris e V.R. Pandharipande, *Nucl. Phys.* **A359** (1981) 331
- [Lor93] C.P. Lorenz, D.G. Ravenhall e C.J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 379.
- [Mes61] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, Amsterdam (1961).
- [Mor87] G. Morpurgo, *Introduzione alla fisica delle particelle*, Zanichelli, Bologna (1987).
- [Opp39] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff *Phys. Rev.* **55** (1939) 364.
- [Par03] I. Parenti, Tesi di Laurea, Università di Pisa, (2003), non pubblicato.
- [PD96] Particle and data group, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1.
- [Pie01] S.C. Pieper e R.B. Wiringa, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sc.*, **51** (2001) 53.
- [Pie05] S.C. Pieper, *Nucl. Phys.* **A751** (2005) 516.
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche *Particelle e nuclei: un'introduzione ai concetti fisici*, Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Pud97] B.S. Pudliner, V.R. Pandharipande, J. Carlson, S. C. Pieper e R.B. Wiringa, *Phys. Rev. C* **56** (1997) 1720.
- [Rav83] D.G. Ravenhall, C.J. Pethick e J.R. Wilson *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 2066.
- [Rol88] C.E. Rolfs e W.S. Rodney, *Cauldrons in the cosmos*, University of Chicago press, Chicago (1988).
- [Sch58] M. Schwarzschild, *Structure and evolution of the stars*, Princeton University Press, Princeton (1958).
- [Seg81] E. Segrè, *Nuclei e particelle*, Zanichelli, Bologna (1981).
- [Sto93] V.G.J. Stoks, R.A.M. Klomp, M.C.M. Rentmeester e J. de Swart, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 792.

- [Sha83] S.L. Shapiro e S. A. Teukolsky *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*, John Wiley and Sons, New York (1983).
- [Sto94] V.G.J. Stoks, R.A.M. Klomp, C.P.F. Terheggen e J. de Swart, Phys. Rev. C **49** (1994) 2950.
- [Str06] F. Strafella, *Lezioni di Astrofisica Generale*, Università di Lecce, Lecce (2006), non pubblicato.
- [Tol34] Tolman, Proc. Nat. Acc. Sci. USA **20** (1934) 3.
- [Uns83] A. Unsöld e B. Baschek *The new cosmos*, Springer Verlag, New York (1983).
- [Vie06] M. Vietri *Astrofisica delle alte energie*, Bollati Boringhieri, Torino (2006).
- [Wei72] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, John Wiley and Sons, New York (1972).
- [Wir95] R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51** (1995) 38.
- [Wit84] E. Witten, Phys. Rev. D **30** (1984) 272.
- [Wos86] S.E Woosley e T.A. Weaver, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **24** (1986) 205.