

# Il successo della teoria semiclassica dell'interazione radiazione-materia

..ovvero, come ho imparato a non preoccuparmi piú dei fotoni

Ferdinando De Tomasi

June 13, 2023

# Motivazioni

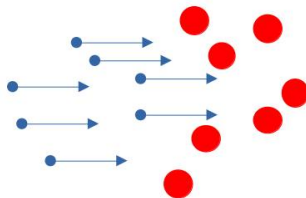
- Esiste una tradizione didattica secondo cui, a livello microscopico, l'interazione tra radiazione e atomi può essere trattata solo in termini di fotoni, intesi come “particelle” con energia  $E = h\nu$ , impulso  $h\nu/c$ , spin 1,  $m=0$ , e ovviamente velocità  $c$
- In pratica, questo significa ipotizzare un'interazione tipo “sfere dure”, con opportune sezioni d'urto.

$$\frac{dN_{eventi}}{dt} = c\sigma_{evento} N_{fotoni} N_{atomi}$$

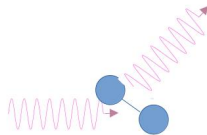
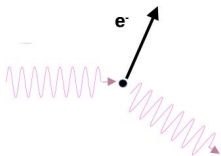
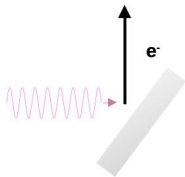
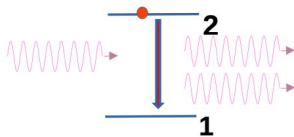
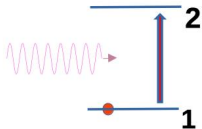
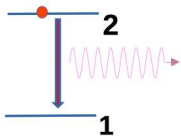
**eventi:** assorbimento, emissione stimolata, diffusione elastica, etc.

**c** : velocità relativa, in questo caso quella della luce

**N:** densità



# Cos'è un fotone (per un non specialista)



# Dualismo ?

- La cosa bizzarra é che, se non si utilizza la QED, per i calcoli si deve utilizzare il campo elettromagnetico classico e la meccanica quantistica per trattare gli atomi
- A basse energie (dai raggi X alle frequenze piú basse), onde EM classiche spiegano la maggior parte dei fenomeni, compresi quelli che hanno dato origine alla visione corpuscolare.
- In questa situazione del dualismo si può probabilmente fare a meno, fermo restando che spesso ragionare in termini di fotoni come quantità determinata di energia e impulso é pratico. In ogni caso, la moderna teoria dei campi supera il dualismo onda corpuscolo.

# Dall'articolo Anti-Photon, Appl Phys, 1995

WE Lamb, premio Nobel 1955, nel 1995 scrive:

- ..there is no such a thing like a photon. Only a comedy of errors and historical accidents led to its popularity among physicists and optical scientists
- .. I suggested that a license be required for use of the word “photon”, and offered to give such a license to properly qualified people” .
- It is high time to give up the use of the word “photon”, and of a bad concept which will shortly be a century old.
- Talking about radiation in terms of particles ... For a friend of Charlie Brown, it might serve as a kind of a security blanket.

# Dall'articolo Anti-Photon, Appl Phys, 1995

W.F. Lamb, premio Nobel 1955, nel 1995 scrive:

only a **comedy of**  
polarity among

r use of the word  
se to properly

ord "photon", and  
entury old.

es ... For a friend of  
a **security blanket**.



- “I modi di un laser non interferiscono! Il fotone interferisce solo con se stesso !” (un prof di Laboratorio a Pisa, 1984)
- “ ah, ma non sai niente !” ( Ennio Arimondo, Pisa, 1986)

- ① La teoria classica ( onde EM e atomi come oscillatori armonici)
- ② La trattazione di Einstein ( radiazione termica e atomi quantizzati)
- ③ La teoria semiclassica (onde EM classiche e atomi secondo la MQ non relativistica)
  - ① Perturbazioni e soluzione esatta per un atomo a 2 livelli
  - ② Effetto delle collisioni e collegamento con la teoria di Einstein
  - ③ Piccolissima discussione sull'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton
  - ④ Amplificazione della luce e LASER
- ④ Conclusioni: quando abbiamo bisogno dei fotoni ?

# Teoria classica: elettrone legato elasticamente

- Atomi: frequenze di emissione e assorbimento definite  $\Rightarrow$  oscillatori armonici
- $x$  coordinata dell'elettrone:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Energia dell'oscillatore:

$$W = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

Potenza emessa:

$$P_{wr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2$$

Potenza emessa mediata:

$$\langle P_{wr} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} W$$

Energia dell'oscillatore in funzione del tempo:

$$W = W_0 e^{-At} \quad A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}$$

$$A \sim 10^8 s^{-1} \text{ per } \lambda = 500 nm$$

$$\tau = 1/A \sim 10 ns$$

- Il tasso di emissione spontanea non può dipendere solo dalla frequenza, deve dipendere anche dall'atomo.
- Sperimentalmente, si osservano nello stesso atomo diverse emissioni a frequenze simili, ma intensità molto diverse.

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} (3f)$$

$f$ : coefficiente empirico chiamato forza di oscillatore.

É una misura di come l'atomo é accoppiato con il campo EM.

# Effetto delle collisioni

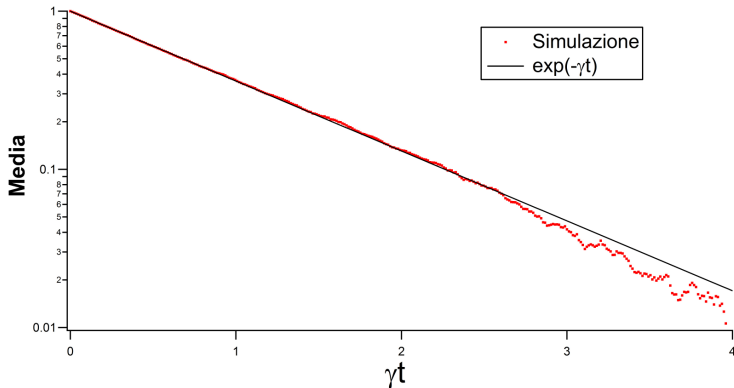
- Lo smorzamento porta a un allargamento spettrale.
- $\delta\nu = A/(4\pi) \sim 50\text{MHz}$ ; é una larghezza chiaramente non misurabile alla fine dell'800.
- Supponiamo di avere delle collisioni tra atomi che avvengono con un tasso  $\gamma_c$  :  $\Delta N_c = \gamma_c \Delta t N_0$
- Supponendo che i dipoli siano inizialmente orientati lungo l'asse  $z$ , con valore  $p$  , la polarizzazione totale in funzione del tempo sará :

$$P_z(t) = \frac{1}{\Delta V} \sum p_z^{(i)}(t) = P \sum \cos(\theta^i(t))$$

con  $\theta^i$  angoli di fase che variano in maniera random a causa delle collisioni. Si può mostrare che la polarizzazione decresce esponenzialmente nel tempo, se non c'è radiazione.

# Decadimento della polarizzazione

- La polarizzazione tende a zero più rapidamente del singolo momento di dipolo.
- Rate totale di smorzamento  $\gamma = (A/2 + \gamma_c)$



# Interazione con un'onda EM

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$\gamma$  rate di smorzamento totale  
della polarizzazione media

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -eE(f)$$

La soluzione stazionaria si trova facilmente. Qui, siamo interessati al lavoro fatto dal campo, cioè all'energia assorbita dall'oscillatore

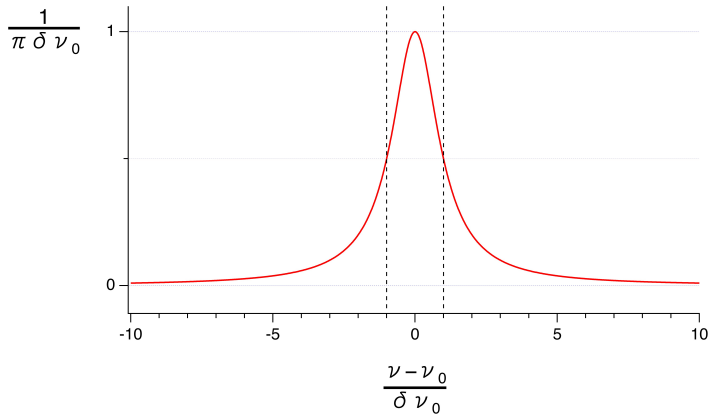
$$\langle FV \rangle = \frac{e^2}{m} E_0^2 \frac{1}{2\gamma} \frac{\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}(f)$$

Approssimando  $|\omega \simeq \omega_0|$ , si può scrivere, in termini della frequenza  $\nu = \omega/2\pi$

$$\langle FV \rangle = \frac{e^2}{8m} E_0^2(f) \frac{\delta\nu_0/\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + \delta\nu_0^2}$$

$$\delta\nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi}$$

Funzione Lorentziana:  $L(\nu) = \frac{\delta\nu_0/\pi}{(\nu-\nu_0)^2+\delta\nu_0^2}$ ;  $\int_{-\infty}^{+\infty} L(\nu)d\nu = 1$



# Il lavoro può essere negativo ?

- Sì, significa che l'oscillatore cede energia al campo.
- Dipende dalla fase. Allo stato stazionario la fase è tale che il lavoro è positivo, ma si possono trovare delle situazioni transienti in cui il lavoro del campo è negativo.
- Il calcolo è elementare, ma noioso. Se  $E = E_0 \cos \omega t + \phi$ ,  $x(0) = x_0 \cos \phi_0$ ,  $\dot{x}(0) = -\omega_0 x_0 \sin \phi_0$ , si ha che, per tempi piccoli  $\langle FV \rangle < 0$  se  $(\phi_0 - \phi) \simeq \frac{\pi}{2}$
- Oppure, devo considerare lo stato stazionario con un fattore ( $f$ ) negativo. Ma cosa significa ?

# Successo e limiti di questa teoria

- La teoria descrive correttamente l'andamento della dispersione e spiega la dispersione anomala attorno alla risonanza
- A basse frequenze, descrive lo scattering Rayleigh, e ad alte frequenze lo scattering Thomson
- Descrive l'assorbimento da parte di un mezzo e (in parte) l'emissione spontanea
- Wien e Plank usano questo modello per la radiazione di corpo nero.
- C'è il limite ovvio che non si può calcolare  $\langle f \rangle$

# Assorbimento di una radiazione a banda larga

- Onda a frequenza  $\nu_0$ . Usando  $\rho_{\nu_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$  si può scrivere:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2(f)}{4m\epsilon_0} \rho_{\nu_0} L(\nu, \nu_0)$$

- Se la radiazione non é monocromatica, ma é descrivibile da una funzione spettrale  $\rho(\nu)$  avremmo

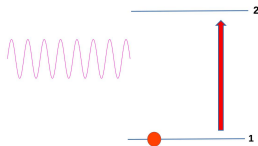
$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2(f)}{4m\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu) L(\nu, \nu_0) d\nu$$

- se la funzione é molto larga sulla scala  $\delta\nu$  :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2(f)}{4m\epsilon_0} \rho(\nu_0) \int_{-\infty}^{+\infty} L(\nu, \nu_0) d\nu = \frac{e^2(f)}{4m\epsilon_0} \rho(\nu_0)$$

- 1900: spiegazione di Plank per lo spettro di corpo nero
- 1905: Lavoro di Einstein sull'effetto fotoelettrico
- 1905: pubblicazione del trattato di Lorentz
- 1913: ipotesi di Bohr  $E_2 - E_1 = h\nu$
- 1917: Lavoro di Einstein sull'interazione atomi-radiazione termica
- 1923: Effetto Compton

# Atomi a 2 livelli (introduzione alla teoria di Einstein)



Supponiamo che l'assorbimento da parte degli oscillatori corrisponda al passaggio di atomi da un livello fondamentale a un livello eccitato:

Energia di un insieme di atomi a 2 livelli

$$E = N_1 E_1 + N_2 E_2 = N_1 E_1 + N_2 (E_1 + h\nu_0) = (N_1 + N_2) E_1 + N_2 h\nu_0$$
$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = h\nu_0 \frac{dN_2}{dt} = -h\nu_0 \frac{dN_1}{dt}$$

Energia guadagnata=lavoro dell'onda

$$\frac{dE}{dt} = N_1 \frac{dW}{dt} = -(h\nu_0) \frac{dN_1}{dt} \rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{h\nu_0} \frac{dW}{dt} =$$
$$-\frac{N_1}{h\nu_0} \frac{e^2(f)}{4m\epsilon_0} \rho_\nu L(\nu, \nu_0)$$

Energia ceduta = lavoro negativo dell'onda

???

## Emissione spontanea

$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 \quad A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} (3f)$$

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{1}{h\nu_0} \frac{\lambda_0^2 A}{8\pi} N_1 c \rho_{\nu_0} L(\nu, \nu_0) = -\frac{c^3}{h\nu_0^3} \frac{A}{8\pi} N_1 \rho_{\nu_0} L(\nu, \nu_0)$$

## Eccitazione a banda larga

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{A}{8\pi h} \frac{c^3}{\nu_0^3} N_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu) L(\nu, \nu_0) d\nu \simeq -\frac{Ac^3}{8\pi h\nu_0^3} N_1 \rho(\nu_0)$$

Quindi se si scrive

$$\frac{dN_1}{dt} = -B\rho(\nu_0)N_1 \Rightarrow B = \frac{Ac^3}{8\pi h\nu_0^3} \Rightarrow$$

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

# I lavori di Einstein del 1905 e del 1917

- 1905 “effetto fotoelettrico”
  - La maggior parte del lavoro é dedicata a proprietà statistiche della radiazione
  - Si applica il concetto che gli scambi di energia con il metallo avvengano per quanti  $h\nu$  con un solo elettrone
- 1917 “atomi in equilibrio termico con la radiazione”
  - Si postulano delle leggi per l'accoppiamento tra radiazione e atomi quantizzati, in analogia con le leggi dell'elettromagnetismo classico.
  - si ricava da questi postulati la legge di Plank.
  - Si studiano gli scambi di impulso tra radiazione e atomi e si mostra che é necessario, per avere l'equilibrio termico, che nel processo di emissione di un quanto di energia  $h\nu$  sia emessa anche una quantità di impulso  $h\nu/c$

# Come spesso viene raccontato il lavoro del 1917

Einstein :

- fa l'ipotesi dei fotoni
- postula una sezione d'urto di assorbimento fotoni- atomo
- postula un'emissione spontanea e suppone che si possano scrivere le popolazioni all'equilibrio termico con una legge di Boltzmann
- scrive le equazioni di rate e si accorge che, se si cerca lo stato stazionario e si usa la legge di Plank per la densità di energia, le equazioni non possono essere soddisfatte.
- di conseguenza inventa un altro processo, che ora chiamiamo di emissione stimolata, per potere scrivere uno stato stazionario compatibile con la legge di Plank

# Le ipotesi della trattazione di Einstein

- ❶ Atomi a 2 livelli (senza collisioni) in equilibrio con la radiazione termica  $\rho$
- ❷ Gli atomi nel livello eccitato decadono in maniera casuale, come in radioattività; si suppone che il processo di decadimento avvenga in un tempo trascurabile, rispetto alla vita media.
- ❸ gli atomi nel livello fondamentale assorbono (come nella teoria classica)
- ❹ gli atomi nel livello eccitato possono anche emettere, secondo una legge analoga a quella dell'assorbimento, proporzionalmente a  $\rho$  e al tempo.
- ❺ si utilizza la legge di Wien e la legge di Rayleigh-Jeans

# Scambi di energia tra radiazione e atomo (citando testualmente Einstein)

"If a Plank resonator is located in a radiation field, the energy of the resonator is changed trough the work done on the resonator by the electromagnetic field of the radiation; **this work can be positive or negative, depending on the phases of the resonator and the oscillating field.**"

" We correspondingly introduce the following quantum-theoretical hypothesys. Under the influence of a radiation density  $\rho$  of frequency  $\nu$ , a molecule can make a transition from state  $Z_n$  to state  $Z_m$  by absorbing radiation energy  $E_m - E_n$ , according to the probability law  **$dW = B_n^m \rho dt.$** "

*We similarly assume that a transition  $Z_m \rightarrow Z_n$ , associated with a liberation of radiation energy  $E_m - E_n$ , is possible under the influence of the radiation field, and that it satisfies the probability law  $dW = B_m^n \rho dt$ .*

*" $B_n^m$  and  $B_m^n$  are constants. We shall give both processes the name "changes of state due to irradiation".*

# Equazioni di rate (equazioni di Einstein)

|                                   |                         |     |                          |
|-----------------------------------|-------------------------|-----|--------------------------|
| Emissione spontanea               | $\frac{dN_2^{sp}}{dt}$  | $=$ | $-AN_2$                  |
| Assorbimento                      | $\frac{dN_2^{abs}}{dt}$ | $=$ | $+B_{12}N_1\rho(\nu_0)$  |
| Emissione stimolata               | $\frac{dN_2^{st}}{dt}$  | $=$ | $-B_{21}N_2\rho(\nu_0)$  |
| Conservazione del numero di atomi | $N$                     | $=$ | $N_1 + N_2$              |
| Equilibrio termico                | $\frac{N_2}{N_1}$       | $=$ | $\exp(-\frac{h\nu}{kT})$ |

## Equazioni di rate:

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2\rho(\nu_0) + B_{12}N_1\rho(\nu_0) - AN_2; \quad \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$$
$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \Rightarrow \rho(\nu_0) = \frac{A}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}}$$

# Relazione tra i coefficienti

stato stazionario:  $\rho(\nu_0) = \frac{A}{B_{12}e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - B_{21}} \Rightarrow B_{12} = B_{21}$

legge di Wien:  $\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$

legge di Rayleigh-Jeans :  $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (h\nu \ll kT)$

$$\rho(\nu_0) = \frac{\frac{A}{B}}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1} \Rightarrow \frac{A}{B} = a\nu_0^3$$

Ad alte temperature  $\rho(\nu_0) = \frac{a\nu_0^3}{\frac{h\nu_0}{kT}} = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} kT \Rightarrow$

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}$$

# Einstein parla di particelle?

- Finora Einstein ipotizza solo dei processi che sono compatibili con l'elettromagnetismo classico. La conservazione dell'energia impone che gli atomi assorbano o emettano l'energia  $E = h\nu$
- Anche nella seconda parte del lavoro che é dedicata allo scambio di impulso tra radiazione e atomi, Einstein parte dal fatto che se  $E = h\nu$ ,  $P = E/c$ . Questo é un risultato classico.
- A causa di questi scambi di impulsi, gli atomi sarebbero frenati dalla radiazione e si fermerebbero.
- Einstein dimostra, con un ragionamento termodinamico-statistico, che per avere la distribuzione di Maxwell Boltzmann occorre che nell'emissione spontanea la radiazione emessa abbia un impulso  $E/c$  con una direzione casuale.

# Emissione spontanea: incompatibile con un modello classico

Densità di impulso di un campo EM  $\vec{g} = \vec{S}/c^2$ ,  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

- L'emissione di dipolo é tale che  $\int \vec{g} = 0$
- Citando Einstein “outgoing radiation in the form of spherical waves does not exist ”
- Questa é la propriet  della luce pi  vicina a quelle di una particella che possiamo trovare nella trattazione di Einstein.

# La teoria semiclassica

- Eq di Schrodinger  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = (H_0 + H_I) |\psi\rangle$
- Hamiltoniana di interazione (approssimazione di dipolo elettrico):  $H_I = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -e\vec{x} \cdot \vec{E}$ ;  $\vec{E} = \vec{e}E_0 \cos(\omega t)$

Se consideriamo due livelli,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ ,  $|\psi(t)\rangle = a_1(t)|1\rangle + a_2(t)|2\rangle$

Sostituendo nell'eq. di Schrodinger e proiettando su  $\langle 1|$  e  $\langle 2|$  :

$$i\hbar \dot{a}_1 = E_1 a_1(t) + V_{11} a_1(t) + V_{12} a_2(t)$$

$$i\hbar \dot{a}_2 = E_2 a_2(t) + V_{21} a_1(t) + V_{22} a_2(t)$$

con  $V_{ij} = \langle i| H_I |j\rangle$ ; poiché di solito  $V_{11} = V_{22} = 0$ , e ponendo  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$ ,  $E_1 = 0$

$$\begin{array}{ll} i\hbar \dot{a}_1 = E_1 a_1(t) + V_{12} a_2(t) & \Rightarrow \quad i\hbar \dot{a}_1 = V_{12} a_2(t) \\ i\hbar \dot{a}_2 = E_2 a_2(t) + V_{21} a_1(t) & i\hbar \dot{a}_2 = \hbar\omega_0 a_2(t) + V_{21} a_1(t) \end{array}$$

# Calcolo al primo ordine

- Ponendo  $a_1 = 1$ , si può facilmente calcolare l'approssimazione al primo ordine per  $a_2$ ;  $\omega \simeq \omega_0 \Rightarrow 1/|\omega + \omega_0| \ll 1/|\omega - \omega_0|$  e si ottiene:

$$|a_2|^2 = \chi^2 \left[ \frac{\sin(1/2\Delta\omega t)}{\Delta\omega} \right]^2 \quad \chi = \frac{eE_0\vec{\epsilon} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar}$$

- $\Delta\omega = \omega - \omega_0$
- $\Delta\omega \neq 0 \Rightarrow |a_2|^2$  ha un andamento oscillatorio;  
 $\Delta\omega = 0 \Rightarrow |a_2|^2 = \left(\frac{\chi t}{2}\right)^2$
- la formula é valida per  $|a_2|^2 \ll 1$ 
  - $\Delta\omega \neq 0$  :  $\chi \ll \Delta\omega$  o per  $t \ll \frac{\chi^2}{\Delta\omega}$
  - $\Delta\omega = 0$  :  $\chi t \ll 1$
- Questa formula viene di solito riportata per tempi grandi come  $|a_2|^2 = \chi^2 \frac{\pi}{2} t \delta(\Delta\omega)$  , creando secondo me abbastanza confusione.

# Radiazione ad ampio spettro

- Se la radiazione non é monocromatica,  $\rho(\omega)d\omega = (1/2)\epsilon_0 E_\omega^2$ ;

●

$$d|a_2|^2 = e^2 \left[ \frac{E_\omega \vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right]^2 \left[ \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} \right]^2 d\omega = e^2 \frac{2c\rho(\omega)}{\epsilon_0} \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} \right]^2 d\omega$$

- $|a_2|^2 = \left( \frac{2e^2}{\epsilon_0} \right) \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 t \int_{-\infty}^{+\infty} d(\omega t) \rho(\omega) \left[ \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \right]^2$   
 $x = \Delta\omega t \Rightarrow |a_2|^2 = \left( 2e^2 \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 t \int dx \rho(\omega_0 + \frac{x}{t}) \left[ \frac{\sin x/2}{x} \right]^2$

- Se la  $\rho(\omega)$  é abbastanza larga:

$$|a_2|^2 = \left( \frac{2e^2}{\epsilon_0} \right) \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 \rho(\omega_0) \left( \int dx \left[ \frac{\sin x/2}{x} \right]^2 \right) t =$$
$$\pi \left( \frac{e^2}{\epsilon_0} \right) \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 \rho(\omega_0) t = \left( \frac{e^2}{2\epsilon_0} \right) \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}_{12}}{\hbar} \right)^2 \rho(\nu_0) t$$

- Risultato in accordo con l'assorbimento per l'oscillatore classico.
- Possiamo invertire il livello di partenza e ottenere lo stesso risultato, quindi sono verificate le ipotesi di Einstein.

# Calcolo di B e A

## Media spaziale per il calcolo di B

$(\vec{\epsilon} \cdot \vec{x}_{12})^2 = x_{12}^2 (\cos \theta)^2$ . Se  $\theta$  é casuale rispetto alla direzione del campo elettrico, si ottiene  $\langle \vec{\epsilon} \cdot \vec{x}_{12}^2 \rangle = \frac{1}{3} x_{12}^2$

Si ottiene quindi  $B = \left(\frac{1}{6\epsilon_0}\right) \left(\frac{ex_{12}}{\hbar}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \mu_{12}^2$

## Calcolo di A

$$A/B = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \Rightarrow A = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{2\pi^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \mu_{12}^2 \Rightarrow A = \frac{16\pi^3 \nu^3}{3c^3 \epsilon_0 \hbar} \mu_{12}^2$$

- Risultato identico a quello dell'elettrodinamica quantistica (Dirac, 1927)
- Attraverso la teoria semiclassica si possono validare le ipotesi di Einstein, calcolare il coefficiente B e quindi ottenere A
- Nessun riferimento ai fotoni finora. Ci aspettiamo solo che nell'emissione spontanea venga emessa un'energia  $h\nu$  associata a un impulso  $h\nu/c$

- Cosa succede nel caso di radiazione monocromatica quando l'approssimazione al primo ordine non é piú valida? Conviene studiare la soluzione esatta.
- L'eq. di Schrodinger é in questo caso formalmente identica a quella di uno spin 1/2 in un campo magnetico. Questo problema é stato studiato estensivamente a partire dagli anni 30 nel dominio delle radiofrequenze e poi ripreso a partire dagli anni 50 nel dominio ottico.

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= -\chi a_2(t) \cos \omega t & \Rightarrow & i\dot{c}_1 = -\frac{1}{2}\chi c_2 \\ i\dot{a}_2 &= \omega_0 a_2(t) - \chi a_1(t) \cos \omega t & i\dot{c}_2 &= -\Delta\omega - \frac{1}{2}\chi c_1 \end{aligned}$$

avendo posto  $c_1 = a_1, c_2 = a_2 e^{i\omega t}$  ed eliminando i termini con  $e^{\pm 2i\omega t}$  (Rotating Wave Approximation).

# Probabilità degli stati in funzione del tempo

$$P = |c|^2 = |a|^2; \Omega^2 = \chi^2 + \Delta\omega^2 \text{ ( frequenza di Rabi )}$$

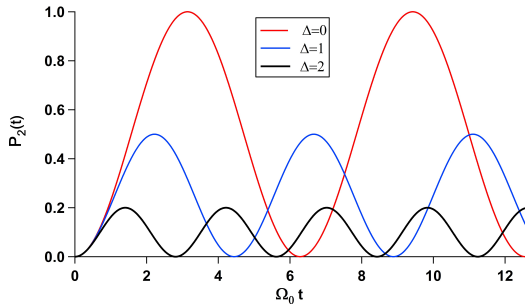
## Ampiezze

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \left( \cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) e^{i\Delta\omega t} \\ c_2(t) &= \left( i \frac{\chi}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) e^{i\Delta\omega t} \end{aligned}$$

## Probabilità

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\chi}{\Omega} \right)^2 \cos \Omega t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\chi}{\Omega} \right)^2 (1 - \cos \Omega t) \end{aligned}$$

# Oscillazioni di Rabi



$$\Delta = \frac{\Delta\omega}{\chi}$$

- Cosa hanno a che fare queste soluzioni con l'idea di un atomo che assorbe o emette un fotone ?
- D'altra parte, per un insieme di atomi, un modello "a urto" con un rate di assorbimento/emissione stimolata che dipende solo dall'intensità della luce e la densità di atomi funziona benissimo in molti casi.
- Ma c'è anche una dipendenza dalla frequenza che occorre determinare.

# Esempio di osservazione (infrarosso)

- Per osservare il fenomeno occorre che il periodo sia inferiore alla vita media del livello. Inoltre il sistema a due livelli deve essere isolato.
- Le prime osservazioni in campo ottico sono state fatte su transizioni infrarosse in fasci molecolari.
- Adam et al, Phys Rev 32 (1985)

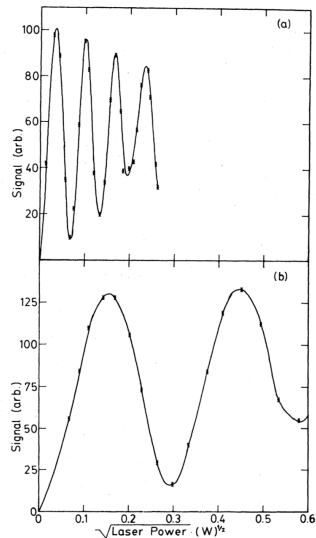


FIG. 4. Observed Rabi oscillations for the  $P(1,0) 0 \leftarrow 0$  transition (a) and the  $R(1,1) 0 \leftarrow 1$  transition (b).

# Descrizione di un insieme di atomi : matrice densità.

- Stato  $|\psi\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle$  ;  
 $\langle x \rangle = (c_1 c_2^* e^{i\omega t}) x_{21} + (c_1^* c_2) e^{-i\omega t} x_{12}$
- Possiamo costruire la matrice  $\rho_{ij} = c_i c_j^*$
- Termini diagonali: probabilità degli stati; termini non diagonali: proporzionali al momento di dipolo
- Equazione di evoluzione:

$$\dot{\rho}_{12} = i\Delta\omega\rho_{12} + i\frac{\chi^*}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

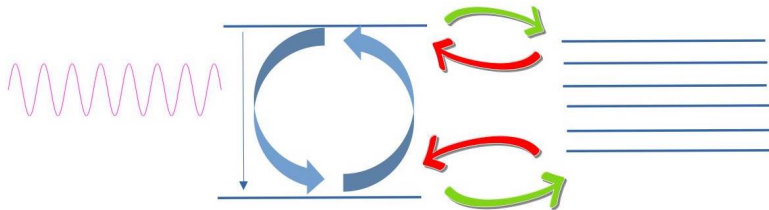
$$\dot{\rho}_{21} = -i\Delta\omega\rho_{21} - i\frac{\chi}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21})$$

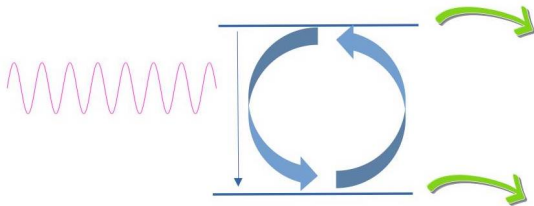
$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21})$$

- singolo atomo: equivalente all'equazione di Schrodinger
- collezione di atomi (con collisioni ed emissione spontanea): si possono ricavare valori medi

# Livelli accoppiati



# Livelli accoppiati



# Matrice densità con rilassamento

- I valori medi delle popolazioni dei livelli tendono a un valore di equilibrio a causa di collisioni anelastiche.
- I valori medi dei termini fuori diagonale tendono a zero a causa di collisioni elastiche, dell'emissione spontanea e delle collisioni anelastiche.
- Le equazioni per la matrice densità (media) vengono modificate:

$$\dot{\rho}_{12} = -(\beta - i\Delta)\rho_{12} + i\frac{\chi^*}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\dot{\rho}_{21} = -(\beta + i\Delta)\rho_{21} - i\frac{\chi}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\Gamma_1\rho_{11} + A_{21}\rho_{22} - \frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21})$$

$$\dot{\rho}_{22} = -\Gamma_2\rho_{22} - A_{21}\rho_{22} + \frac{i}{2}(\chi\rho_{12} - \chi^*\rho_{21})$$

$$\beta = \gamma_c + \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + A_{21})$$

# Stato stazionario

- Le oscillazioni di Rabi sono smorzate  $\Rightarrow$  esiste uno stato stazionario.
- Si può trovare una differenza di popolazione e una polarizzazione (complessa) macroscopica:

$$\Delta N = N_T(\rho_{11} - \rho_{22}) = N_T \Delta\rho \quad P = 2eN_T(x_{12}\rho_{12})$$

Alcune approssimazioni:  $\Gamma_{1,2} = 0 \Rightarrow (\Delta\rho)(E=0) = 1, x_{12} \in (R)$

$$\Delta\rho = \frac{1}{1 + \frac{\chi^2}{\chi_{sat}^2}} \quad \chi_{sat}^2 = \frac{A}{\beta}(\beta^2 + \Delta\omega^2)$$

$$Re(\rho_{12}) = \frac{\chi}{2} \frac{\Delta\omega}{\beta^2 + \Delta\omega^2} \Delta\rho \quad Im(\rho_{12}) = \frac{\chi}{2} \frac{\beta}{\beta^2 + \Delta\omega^2} \Delta\rho$$

# Coefficiente di assorbimento e indice di rifrazione

## Polarizzazione

$$P = \epsilon_0 \alpha E_0 \quad \alpha = \frac{\mu_{12}^2}{\epsilon_0 \hbar} \Delta N \frac{\Delta\omega + i\beta}{\beta^2 + \Delta\omega^2}$$

## Equazione delle onde in presenza di sorgenti

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})E = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Possiamo sostituire l'espressione per l'onda piana e la polarizzazione e ottenere il coefficiente di assorbimento

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu_{12}^2}{\epsilon_0 \hbar c} \frac{\beta}{\beta + \Delta\omega^2} \frac{N}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$$

e l'indice di rifrazione

$$n(\omega) - 1 = -\frac{\mu_{12}^2}{2\epsilon_0 \hbar} \frac{\Delta\omega}{\beta + \Delta\omega^2} \frac{N}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$$

# Approssimazione adiabatica

- Se  $\beta \gg$  degli altri rates, la polarizzazione segue il valore della differenza di popolazione.
- $\rho_{21} = \frac{(i/2)\chi}{\beta + i\Delta\omega} \Delta\rho$
- equazioni per le popolazioni (  $N_1 = \rho_{11}N$ ,  $N_2 = \rho_{22}N$ ):

$$\dot{N}_1 = -\Gamma_1 N_1 + A_{21} N_2 - \frac{\beta}{2} \frac{\chi^2}{\beta^2 + \Delta\omega^2} (N_1 - N_2)$$

$$\dot{N}_2 = -\Gamma_2 N_2 - A_{21} N_2 + \frac{\beta}{2} \frac{\chi^2}{\beta^2 + \Delta\omega^2} (N_1 - N_2)$$

- $\chi^2 \propto \rho = n_F(\hbar\omega) \Rightarrow$  queste hanno la stessa forma che si otterrebbe da un modello a “sfere dure” per i fotoni, con una sezione d'urto data da:  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\mu^2\omega}{\epsilon_0\hbar c} \frac{\beta}{\beta^2 + \Delta\omega^2}$
- Per radiazione a banda larga, integrando sulle frequenze, riotterremo l'equazione di Einstein.

# Prima conclusione

- Nell'interazione tra atomi e luce non monocromatica, i trasferimenti di popolazione possono essere scritti COME SE ci fosse un gas di fotoni descritto dall'intensità spettrale alla frequenza di risonanza dell'atomo e una sezione d'urto atomo-fotone costante.
- L'effetto dell'emissione spontanea é introdotto in maniera empirica.
- Questa descrizione é valida anche per radiazione monocromatica, con una sezione d'urto dipendente dalla differenza di frequenza  $\nu - \nu_0$ , SE il rate di emissione spontanea o di collisioni elastiche é grande rispetto alla frequenza di Rabi.

Questa descrizione é conveniente, ma niente affatto necessaria.

Cosa possiamo dire dei due effetti che storicamente hanno dato origine e confermato l'esistenza del fotone (effetto fotoelettrico e effetto Compton)?

- L'applicazione della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo per transizioni nel continuo ( regola d'oro di Fermi) porta a una soglia per la frequenza, e spiega la maggior parte delle caratteristiche dell'effetto fotoelettrico.
- Nel 1914 Richardson ( premio Nobel 1928) pubblicó un articolo con una trattazione termodinamica dell'effetto fotoelettrico per la quale non si faceva nessuna ipotesi sulla natura della radiazione.
- Alcune delle caratteristiche non sono ovviamente spiegabili da un modello semiclassico perché hanno a che fare con la quantizzazione del campo elettrico.

# Effetto Compton

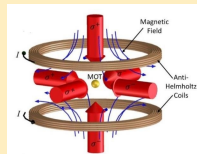
- L'effetto Compton: caso a parte, non riguarda elettroni legati e siamo in una zona di frequenze diverse.
- La trattazione in termini di urto fotone-elettrone permette di ricavare lo shift in frequenza, ma non la sezione d'urto.
- É curioso che l'elettrone sia trattato come una particella classica.
- Esiste una spiegazione dovuta a Schroedinger in cui l'elettrone viene descritto in termini ondulatori e l'effetto interpretato come una riflessione di Bragg nel sistema del centro degli impulsi, da cui si ottiene poi la distribuzione angolare nel sistema del laboratorio.
- Una trattazione completamente classica riproduce la dipendenza angolare dello shift in frequenza, dovuto all'effetto Doppler.

# Forze su un atomo

Un'onda EM esercita una forza su un atomo.  $\Rightarrow$  possibilità di manipolare atomi e oggetti microscopici.  $E = E_0(x) \cos(kz - \omega t)$

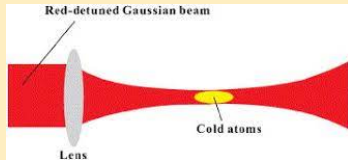
Assorbimento di luce: pressione di radiazione

$$F_p = \epsilon_0 \alpha_2 \frac{E_0^2}{2} k \hat{z}$$

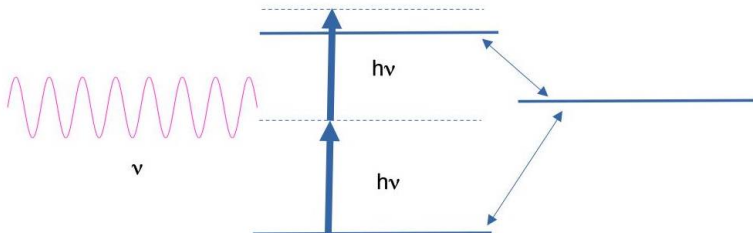


Scattering di luce: forza di gradiente

$$F_d = \epsilon_0 \alpha_1 \left( \frac{1}{4} \right) \vec{\nabla} (E_0^2)$$



# Le transizioni "a due fotoni"

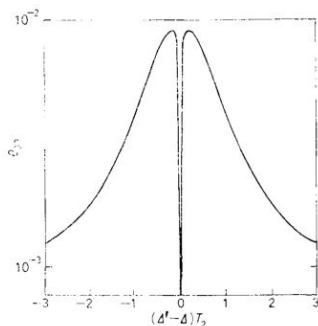
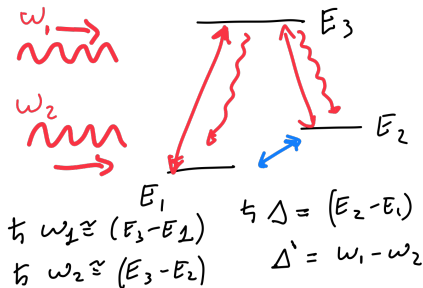


- Tra due livelli della stessa parità la probabilità di transizione in approssimazione di dipolo elettrico al primo ordine perturbativo é nulla.
- Ma al secondo ordine, si ha una probabilità che é massima quando  $\Delta\omega = \omega_0 - 2\omega = 0$  :

$$P(t) = \frac{1}{4} \left| \sum E_0^2 \frac{\mu_{kj}\mu_{ji}}{E_i - E_j + \hbar\omega} \right|^2 \left( \frac{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}{\Delta\omega} \right)^2$$

- Questi processi possono essere molto importanti per misure di altissima precisione delle frequenze di transizioni atomiche
- La quantizzazione del campo EM non compare, quindi anche in questo caso non c'è una vera necessità di parlare di fotoni .

# Un esempio di applicazione della teoria semiclassica: risonanze "nere"



Arimondo, E., Orriols, G. *Lett. Nuovo Cimento* (1976)  
565 citazioni

# Giustificazione del modello a oscillatore

- Ricordiamo  $|\psi\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle$  ;  $\langle x \rangle = a_1 a_2^* x_{21} + a_1^* a_2 x_{12}$
- Usando l'equazione di Schrodinger in campo EM si trova:

$$\langle \ddot{x} \rangle + \omega_0^2 \langle x \rangle = \frac{2e\omega_0}{\hbar} (x_{12})^2 E(t) (|a_1|^2 - |a_2|^2)$$

- L'equazione classica sarebbe:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE(t)}{m} (f)$$

- Diventano uguali se  $|a_1|^2 - |a_2|^2 \simeq 1$  e  $f = \frac{2m\omega_0}{\hbar} (x_{12})^2$

# L'osservazione sperimentale dell'emissione stimolata

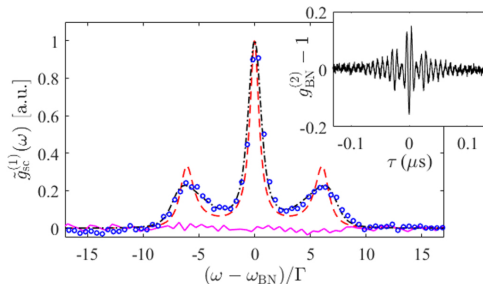
- Se l'atomo é nello stato eccitato,  $|a_1|^2 - |a_2|^2 = -1$  ; tutto avviene come se il fattore  $f$  fosse negativo.
- Questo spiega quindi l'ipotesi di Einstein sull'emissione stimolata.
- La presenza di una percentuale di atomi nello stato eccitato riduce l'assorbimento e la dispersione.
- Storicamente, un modello basato sulla presenza di “oscillatori negativi” ha spiegato la dispersione in gas eccitati da una scarica elettrica. Questo é stata la prima osservazione indiretta dell'emissione stimolata (Ladenburg, 1930).
- Prima del lavoro sui MASER ( 1954), solo Fabrikant in URSS a partire dagli anni 30 ha lavorato sull'osservazione sperimentale dell'emissione stimolata e sull'amplificazione della luce.

# Scattering da dipolo semiclassico ?

- Il termine  $|a_1|^2 - |a_2|^2$  che appare nell'equazione per  $\langle x \rangle$  é noto
- $|a_1|^2 - |a_2|^2 = \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} + (\frac{\chi}{\Omega})^2 \cos \Omega t \Rightarrow$   
 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{ef}{m} E_0 (\frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} + (\frac{\chi}{\Omega})^2 \cos \Omega t) \cos \omega t$
- Ci aspettiamo che  
 $\langle x(t) \rangle \propto (\frac{\Delta\omega}{\Omega})^2 \cos \omega t + \frac{1}{2} (\frac{\chi}{\Omega})^2 (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t)$
- L'esperimento mostra che ci sono sempre tre picchi:  
 $\omega - \Omega, \omega, \omega + \Omega$ , che sono spiegati dalla teoria quantistica.

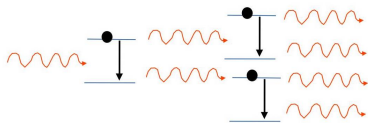
# Scattering da dipolo semiclassico ?

- Il termine  $|a_1|^2 - |a_2|^2$  che appare nell'equazione per  $\langle x \rangle$  é noto
- $|a_1|^2 - |a_2|^2 = \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} + (\frac{\chi}{\Omega})^2 \cos \Omega t \Rightarrow$   
 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{ef}{m} E_0 (\frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} + (\frac{\chi}{\Omega})^2 \cos \Omega t) \cos \omega t$
- Ci aspettiamo che  
 $\langle x(t) \rangle \propto (\frac{\Delta\omega}{\Omega})^2 \cos \omega t + \frac{1}{2} (\frac{\chi}{\Omega})^2 (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t)$
- L'esperimento mostra che ci sono sempre tre picchi:  
 $\omega - \Omega, \omega, \omega + \Omega$ , che sono spiegati dalla teoria quantistica.

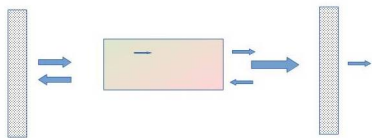


# L'amplificazione di luce e i laser

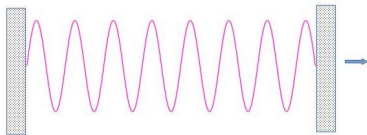
Questo argomento viene di solito spiegato supponendo una moltiplicazione di fotoni per emissione stimolata.



Per avere un oscillatore, all'amplificatore va applicato un feedback, che in questo caso é costituito da due specchi.



Ma per avere interferenza costruttiva, le frequenze devono essere  $\nu_n = nC/2L$ , e se si può selezionarne una vicina a  $(E_2 - E_1)/h$ , possiamo avere un oscillatore.



# Amplificazione da un punto di vista classico

## Equazione delle onde con sorgenti

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})E = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0}$$

## Approssimazione di ampiezza lentamente variabile

$$E = E_0(z, t)e^{i(kz - \omega t)}; \text{ in un dielettrico } \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = i \frac{k}{\epsilon_0} P(z, t)$$

- Polarizzabilità  $P(z) = \epsilon_0(\alpha_1 + i\alpha_2)E_0$
- Stato stazionario:  
$$\frac{\partial E_0}{\partial z} = ik(\alpha_1 + i\alpha_2)E_0 \Rightarrow E_0 = Ae^{ik(\alpha_1 + i\alpha_2)z} = Ae^{-k\alpha_2 z} e^{ik\alpha_1 z}$$
- In una cavità :  
$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = i\omega(\alpha_1 + i\alpha_2)E_0 \Rightarrow E_0 = Ae^{i\omega(\alpha_1 + i\alpha_2)t} = Ae^{-\omega\alpha_2 t} e^{i\omega\alpha_1 t}$$

Niente vieta a priori di avere  $\alpha_2 < 0$ , per cui si può avere un'amplificazione dell'ampiezza del campo

# Stato stazionario di un mezzo a due livelli

- L'ampiezza può essere amplificata se  $\alpha_2 < 0$  ;

$$\alpha_2 = \frac{(\mu_{12}^2)}{\epsilon_0 \hbar} \frac{\beta}{\beta^2 + \Delta\omega^2} (N_1 - N_2)$$

- Quindi, se si riesce a ottenere  $\Delta N = N_2 - N_1 > 0$  si ottiene amplificazione del campo
- Anche per l'amplificazione, non abbiamo bisogno di un modello a corpuscoli

# L'equazione semiclassica di un laser

- Occorre accoppiare l'equazione delle onde ( ampiezza lentamente variabile) all'equazione della matrice densità.
- Per semplicità poniamo  $\Delta\omega = 0$  e supponiamo che per le popolazioni conti solo  $w = \rho_{22} - \rho_{11}$  . Deve esistere un modo per fornire energia al sistema in modo che  $w > 0$
- Le variabili accoppiate sono solo  $v = i(\rho_{21} - \rho_{12})$ ,  $w$ , e l'ampiezza del campo  $E_0$

$$\dot{v} = -\beta v + \frac{\mu}{\hbar} E_0 w$$

$$\dot{w} = -\Gamma(w - w_0) - \frac{1}{2\hbar} E_0 \mu v$$

$$\dot{E}_0 = -\frac{1}{2} b E_0 + \frac{\omega \mu}{2\epsilon_0} (N v)$$

Il campo é accoppiato con la parte immaginaria della polarizzazione, e si introduce un termine che tiene conto delle perdite della cavità.

# Eliminazione adiabatica della polarizzazione

Anche in questo caso, se  $\beta \gg$  tutti gli altri rates, possiamo porre  $v = \frac{\mu E_0 w}{\hbar \beta}$  e ottenere

$$\dot{E}_0 = -\frac{1}{2}bE_0 + \frac{\omega\mu^2}{2\epsilon_0\hbar\beta}(Nw)E_0$$

$$\dot{w} = -\Gamma(w - w_0) - \frac{\mu^2}{2\hbar^2\beta}E_0^2w$$

$$2E_0\dot{E}_0 = -bE_0^2 + \frac{\omega\mu^2}{\epsilon_0\hbar\beta}(Nw)E_0^2 \rightarrow (\dot{E}_0^2) = -bE_0^2 + \frac{\omega\mu^2}{\epsilon_0\hbar\beta}(Nw)E_0^2$$

- Si ottiene quindi un'equazione per l'intensità, o la densità di energia, o la densità di fotoni  $N_f = \frac{\rho}{\hbar\omega}$
- Volendo, si può interpretarla in termini di urti tra fotoni e atomi ( $Nw = N_2 - N_1 = \Delta N$ ):

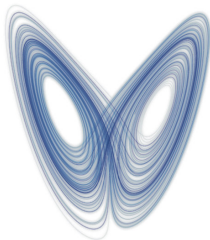
$$\dot{N}_f = -bN_f + c\sigma N_f \Delta N \quad \sigma = \frac{\mu^2\omega}{\epsilon_0\hbar\beta c}$$

$$\dot{\Delta N} = -\Gamma(\Delta N - \Delta N_0) - c\sigma N_f \Delta N$$

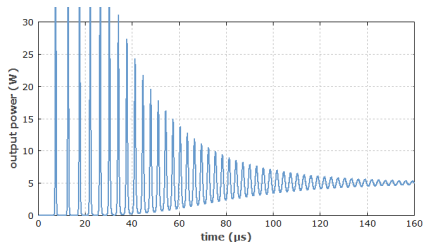
# Comportamento dinamico.

Le descrizioni in termini del campo o della densità di energia non sono equivalenti:

- 1 campo, inversione, polarizzazione: 3 variabili con accoppiamento non lineare
- 2 intensità, inversione: 2 variabili con accoppiamento non lineare.



caso 1), sono possibili evoluzione caotiche. Le equazioni sono le stesse del sistema di Lorenz

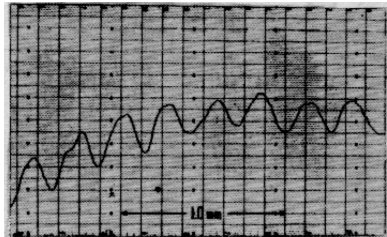


caso 2), possibili soluzione periodiche (in pratica, la soluzione stazionaria é stabile).

Necessità di una teoria quantistica completa per spiegare:

- la larghezza di riga, che al netto di cause tecniche sarebbe 0 ;
- spiegare il comportamento vicino alla soglia di emissione
- spiegare le proprietà statistiche.

# Il fotone interferisce solo con se stesso-I



- Due laser indipendenti possono interferire tra loro ( primo esperimento 1963)
- Però l'interferenza si osserva anche quando le intensità sono così basse che la probabilità di avere più di un fotone nell'apparato sperimentale è trascurabile.
- Quindi in questo caso il fotone non è certamente una particella che va da un laser al rivelatore.

# Il fotone interferisce solo con se stesso-II

Un laser può emettere molte frequenze

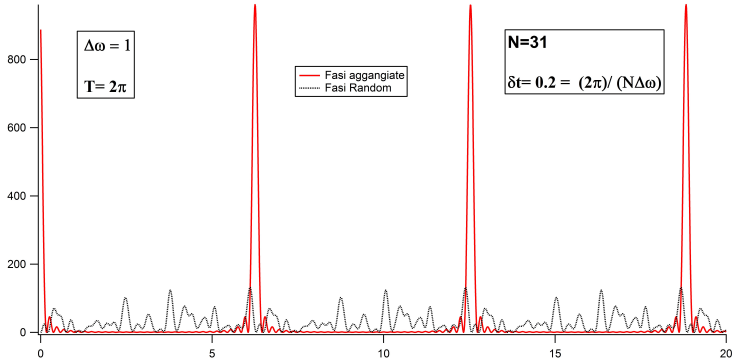
$\nu_n = n \frac{c}{2L}$ ; si può fare in modo che le fasi delle onde delle diverse frequenze siano legate tra loro.

Campo totale per fasi uguali

$$\nu_0 = M \frac{c}{2L}; k_0 = \frac{2\pi\nu_0}{c}$$
$$E(z, t) = E_0 \sum_{n=-N}^N \cos \frac{(M+n)\pi(z-ct)}{L} = E_0 [\cos k_0(z-ct)] \frac{\sin \frac{\pi N(z-ct)}{2L}}{\sin \frac{\pi(z-ct)}{2L}}$$

Intensità

$$I \propto \langle E^2 \rangle \quad I \propto \left[ \frac{\sin \pi N(z-ct)/2L}{\sin \pi(z-ct)/2L} \right]^2$$



Quindi i modi interferiscono tra loro. La descrizione in termini di fotoni richiede di pensare a stati del campo corrispondenti a molte frequenze diverse.

- La teoria semiclassica permette di spiegare praticamente tutto quando il numero di fotoni (in senso quantistico) é alto,tenendo conto, quando necessario, dell'emissione spontanea in maniera corretta.
- Il concetto di fotone come corpuscolo non é probabilmente necessario, anche se forse é utile.
- Per parlare di fotoni consiglio comunque di prendere la patente.