

Entropia: caratterizzazione antropica del divenire

Luca Girlanda

Università del Salento & INFN Lecce

Disclaimer

```
girlanda@girlanda-XPS-15-7590: ~  
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/translator/translator-bibliography-dictionary-English.dict)  
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/translator/translator-environment-dictionary-English.dict)  
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/translator/translator-months-dictionary-English.dict)  
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/translator/translator-numbers-dictionary-English.dict)  
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/translator/translator-theorem-dictionary-English.dict) (./girlanda.nav)  
Overfull \hbox (16.0pt too wide) in paragraph at lines 69--69  
[ ]  
[1{/var/lib/texmf/fonts/map/pdftex/updmap/pdftex.map}] <./dip_fisica_header_-eps-converted-to.pdf> <./5_LECCE_LOGO_ORIZZONTALE.jpg>] (./girlanda.aux) )  
(see the transcript file for additional information)</usr/share/texlive/texmf-dist/fonts/type1/public/amsfonts/cm/cmss10.pfb></usr/share/texlive/texmf-dist/fonts/type1/public/amsfonts/cm/cmss12.pfb></usr/share/texlive/texmf-dist/fonts/type1/public/amsfonts/cm/cmss8.pfb>  
Output written on girlanda.pdf (1 page, 182737 bytes).  
Transcript written on girlanda.log.  
girlanda@girlanda-XPS-15-7590:~/teaching/entropia$ cd  
girlanda@girlanda-XPS-15-7590:~$ grep 'entropy' **/*.tex || echo "no match"  
no match  
girlanda@girlanda-XPS-15-7590:~$
```

ἐν τροπή

έν τροπή



$$S(B) - S(A) = \int_{\text{rev}} \frac{\delta Q}{T}$$

έν τροπή

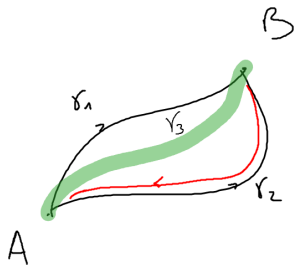


“If one looks for a name that would characterize S , then—in analogy to the way one says that the quantity U is the *heat- and work-content* of the body—one could say that the quantity S is the *transformation content* [*Verwandlungsinhalt* in the original German] of the body. I consider it better, however, to extract the names for such scientifically important quantities from the classical languages, so that they can be applied without change in all modern languages; therefore, I propose to name the quantity S the *entropy* [*Entropie* in German] after the Greek word η τροπή, the transformation. I have intentionally constructed the word *entropy* [*Entropie*] to be as similar as possible to the word *energy* [*Energie* in German] because the two quantities, which are to be known by these words, are so nearly related in their physical significance that a certain similarity in the naming seems appropriate.”

$$S(B) - S(A) = \int_{\text{rev}} \frac{\delta Q}{T}$$

Seconda Legge

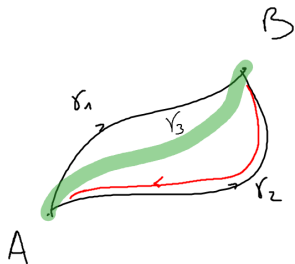
$$I = \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$



- T è la temperatura dei “bagni termici”

Seconda Legge

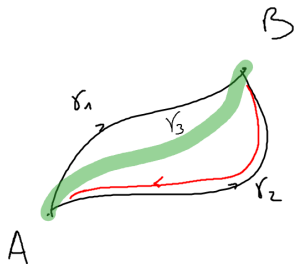
$$I = \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$



- ▶ T è la temperatura dei “bagni termici”
- ▶ includiamo nel sistema un gas perfetto in contatto con gli stessi bagni termici con $(\delta Q)_g = -\delta Q \implies I + I_g = 0$

Seconda Legge

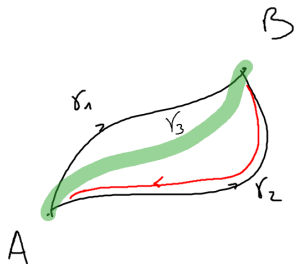
$$I = \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$



- ▶ T è la temperatura dei “bagni termici”
- ▶ includiamo nel sistema un gas perfetto in contatto con gli stessi bagni termici con $(\delta Q)_g = -\delta Q \implies I + I_g = 0$
- ▶ per il gas perfetto, dalla prima legge, $I_g = nR \log V_f/V_i$

Seconda Legge

$$I = \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$



- ▶ T è la temperatura dei “bagni termici”
- ▶ includiamo nel sistema un gas perfetto in contatto con gli stessi bagni termici con $(\delta Q)_g = -\delta Q \implies I + I_g = 0$
- ▶ per il gas perfetto, dalla prima legge, $I_g = nR \log V_f/V_i$
- ▶ se per assurdo $I > 0$ (quindi $I_g < 0$) potremmo riportare il gas nello stato iniziale facendolo espandere a spese della sola sorgente a $T = T_i = T_f$

Entropia come funzione di stato

$$S(B) = S(A) + \int_{A, \text{rev}}^B \frac{\delta Q}{T}$$

- ▶ sembra tutto molto oggettivo e univoco (a meno di una costante additiva)
- ▶ vi è però una soggettività *nascosta*
- ▶ nascosta nella definizione di *stato*

Entropia microscopica

$$S = k \cdot \log W$$

- ▶ microstati (“complezioni”):
specificare lo stato $\epsilon_i = 1, 2, \dots, \Lambda$ per
ogni particella i
- ▶ distribuzione: specificare il numero di
particelle w_λ nello stato λ
- ▶ “permutabilità” $\mathcal{W}$: numero di
complezioni di una data distribuzione
 $\sim$ **probabilità** della distribuzione



Meccanica statistica

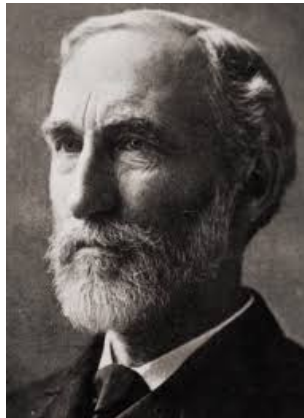
Let us imagine a great number of independent systems, identical in nature, but differing in phase, that is, in their condition with respect to configuration and velocity. The forces are supposed to be determined for every system by the same law, being functions of the coördinates of the system $q_1, \dots q_n$, either alone or with the coördinates a_1, a_2 , etc. of certain external bodies. It is not necessary that they should be derivable from a force-function. The external coördinates a_1, a_2 , etc. may vary with the time, but at any given time have fixed values. In this they differ from the internal coördinates $q_1, \dots q_n$, which at the same time have different values in the different systems considered.

Let us especially consider the number of systems which at a given

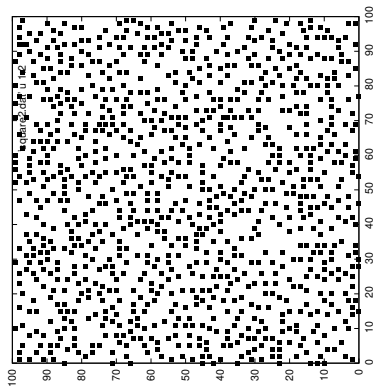
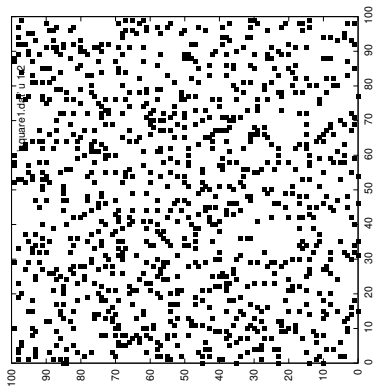
STATISTICAL MECHANICS

4

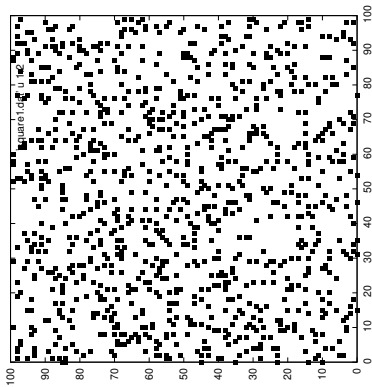
il metodo di Gibbs, *replica trick*
d'antan!



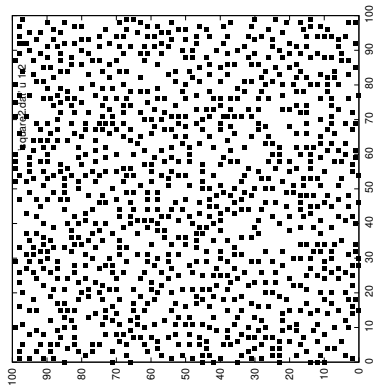
Ma cos'è il *disordine*?



Ma cos'è il *disordine*?



$$S = \log \mathcal{W} \sim 3245$$



$$S = \log \mathcal{W} \sim 358$$

Entropia e informazione



- ▶ Shannon fonda la teoria dell'informazione
- ▶ disordine quantificato come *informazione mancante*
- ▶ ad un evento con probabilità p_n è associata la *sorpresa* $-\log p_n$

Entropia e informazione



- ▶ Shannon fonda la teoria dell'informazione
- ▶ disordine quantificato come *informazione mancante*
- ▶ ad un evento con probabilità p_n è associata la *sorpresa* $-\log p_n$ additiva per eventi indipendenti
- ▶ entropia come *sorpresa media* di una distribuzione

Entropia e informazione



- ▶ Shannon fonda la teoria dell'informazione
- ▶ disordine quantificato come *informazione mancante*
- ▶ ad un evento con probabilità p_n è associata la *sorpresa* $-\log p_n$ additiva per eventi indipendenti
- ▶ entropia come *sorpresa media* di una distribuzione
→ quanto si impara da un evento

Entropia e informazione



- ▶ Shannon fonda la teoria dell'informazione
- ▶ disordine quantificato come *informazione mancante*
- ▶ ad un evento con probabilità p_n è associata la *sorpresa* $-\log p_n$ additiva per eventi indipendenti
- ▶ entropia come *sorpresa media* di una distribuzione
 - quanto si impara da un evento
 - quanto si ignorava prima

Ordine e sorpresa sono soggettivi



anche i numeri random possono esserlo solo in apparenza

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

per poter predire

$$\langle h \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

per poter predire

$$\langle h \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

senza alcun pregiudizio...

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

per poter predire

$$\langle h \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

senza alcun pregiudizio...

- ▶ principio di ragion sufficiente?

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

per poter predire

$$\langle h \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

senza alcun pregiudizio...

► principio di ragion sufficiente? $\rightarrow p_i = 1/n?$

Inferenza statistica

ricostruire la distribuzione di una variabile random $x = x_1, \dots, x_n$ conoscendo solo

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i f(x_i)$$

per poter predire

$$\langle h \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

senza alcun pregiudizio...

- ▶ principio di ragion sufficiente? $\rightarrow p_i = 1/n$?
- ▶ sarebbe un pregiudizio!

vi è *un solo modo*: massimizzare l'entropia di Shannon

$$S = - \sum_i p_i \log p_i$$

compatibilmente con il vincolo

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

analoghe strutture matematiche ma interpretazioni inconciliabili

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

analoghe strutture matematiche ma interpretazioni inconciliabili

- ▶ il problema dell'inferenza statistica è formulato in termini *soggettivi*

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

analoghe strutture matematiche ma interpretazioni inconciliabili

- ▶ il problema dell'inferenza statistica è formulato in termini *soggettivi*
- ▶ Dovremmo rifuggire dalla soggettività?
Come l'*osservatore* ha un ruolo attivo, così anche il *conoscente* (o *ignorante*)

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

analoghe strutture matematiche ma interpretazioni inconciliabili

- ▶ il problema dell'inferenza statistica è formulato in termini *soggettivi*
- ▶ Dovremmo rifuggire dalla soggettività?
Come l'*osservatore* ha un ruolo attivo, così anche il *conoscente* (o *ignorante*)
- ▶ massimizzare l'entropia vuol dire minimizzare il pregiudizio (o *bias*)

Cosa sono le probabilità?

- ▶ frequenze *sperimentali* di eventi incerti
- ▶ gradi *soggettivi* di confidenza su eventi incerti
gradi di conoscenza da *aggiornare* continuamente (teorema di Bayes)

analoghe strutture matematiche ma interpretazioni inconciliabili

- ▶ il problema dell'inferenza statistica è formulato in termini *soggettivi*
- ▶ Dovremmo rifuggire dalla soggettività?
Come l'*osservatore* ha un ruolo attivo, così anche il *conoscente* (o *ignorante*)
- ▶ massimizzare l'entropia vuol dire minimizzare il pregiudizio (o *bias*)
per ottenere una stima *obiettiva*!
(“neutra”, “spassionata”)

Stima di massima entropia

$$\min_{p_1, \dots, p_n; \lambda, \mu} \left[- \sum_i p_i \log p_i - \lambda \left(\sum_i p_i f(x_i) - \langle f \rangle \right) - \mu \left(\sum_i p_i - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} [\dots] = 0 \implies \log p_j = -1 - \lambda f(x_j) - \mu$$

$$p_j = \frac{e^{-\lambda f(x_j)}}{\sum_i e^{-\lambda f(x_i)}} \equiv \frac{e^{-\lambda f(x_j)}}{Z(\lambda)}$$

con λ determinato da

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_i f(x_i) e^{-\lambda f(x_i)}}{\sum_i e^{-\lambda f(x_i)}} = - \frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} = - \frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda}$$

λ e f si chiamano *coniugate*

Trasformata di Legendre

il moltiplicatore λ dipende da f tramite

$$-\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda} = f$$

ma è più facile pensare f come dipendente da λ , $f(\lambda)$

Trasformata di Legendre

il moltiplicatore λ dipende da f tramite

$$-\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda} = f$$

ma è più facile pensare f come dipendente da λ , $f(\lambda)$
Esiste una funzione $S(f)$ per cui

$$\frac{\partial S}{\partial f} = \lambda$$

precisamente

$$S(f) = \log Z[\lambda(f)] + f\lambda(f)$$

si chiama la *trasformata di Legendre* di $\log Z(\lambda)$ ed è proprio l'Entropia

$$\log \sum_i e^{-\lambda f(x_i)} + \sum_i p_i f(x_i) \lambda = \log \sum_i e^{-\lambda f(x_i)} - \sum_i p_i \log [p_i Z(\lambda)] = - \sum_i p_i \log p_i$$

Con 2 dati $\langle f \rangle$ e $\langle g \rangle$

$$\min_{p_i, \lambda_i, \mu} \left[-\sum_i p_i \log p_i - \lambda_1 \left(\sum_i p_i f(x_i) - \langle f \rangle \right) - \lambda_2 \left(\sum_i p_i g(x_i) - \langle g \rangle \right) - \mu \left(\sum_i p_i - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} [\dots] = 0 \implies \log p_j = -1 - \lambda_1 f(x_j) - \lambda_2 g(x_j) - \mu$$

$$p_j = \frac{e^{-\lambda_1 f(x_j) - \lambda_2 g(x_j)}}{\sum_i e^{-\lambda_1 f(x_i) - \lambda_2 g(x_i)}} \equiv \frac{e^{-\lambda_1 f(x_j) - \lambda_2 g(x_j)}}{Z(\lambda_1, \lambda_2)}$$

con λ_1 e λ_2 determinati da

$$\langle f \rangle = -\frac{\partial \log Z(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}, \quad \langle g \rangle = -\frac{\partial \log Z(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}$$

λ_1 coniugata con f , λ_2 con g

Applicazione alla meccanica statistica

se di un sistema macroscopico conosciamo l'energia media U la distribuzione di probabilità dei microstati inferita è

$$p_i = \frac{e^{-\lambda E_i}}{\sum_i e^{-\lambda E_i}}$$

Consideriamo due sistemi termodinamici diversi A e B con probabilità $p_i^{(A)}$ e $p_j^{(B)}$ di trovarsi nel microstato i e j

Applicazione alla meccanica statistica

se di un sistema macroscopico conosciamo l'energia media U la distribuzione di probabilità dei microstati inferita è

$$p_i = \frac{e^{-\lambda E_i}}{\sum_i e^{-\lambda E_i}}$$

Consideriamo due sistemi termodinamici diversi A e B con probabilità $p_i^{(A)}$ e $p_j^{(B)}$ di trovarsi nel microstato i e j e il sistema composto $A + B$ caratterizzato dai livelli (trascuriamo le *correlazioni*)

$$E_{(i,j)}^{(A+B)} = E_i^{(A)} + E_j^{(B)}$$

Applicazione alla meccanica statistica

se di un sistema macroscopico conosciamo l'energia media U la distribuzione di probabilità dei microstati inferita è

$$p_i = \frac{e^{-\lambda E_i}}{\sum_i e^{-\lambda E_i}}$$

Consideriamo due sistemi termodinamici diversi A e B con probabilità $p_i^{(A)}$ e $p_j^{(B)}$ di trovarsi nel microstato i e j e il sistema composto $A + B$ caratterizzato dai livelli (trascuriamo le *correlazioni*)

$$E_{(i,j)}^{(A+B)} = E_i^{(A)} + E_j^{(B)} \implies p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda(E_i^{(A)} + E_j^{(B)})}}{\sum_{i,j} e^{-\lambda(E_i^{(A)} + E_j^{(B)})}}$$

Temperatura

$$p_i^{(A)} = \sum_j p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda E_i^{(A)}}}{\sum_i e^{-\lambda E_i^{(A)}}}$$

Temperatura

$$p_i^{(A)} = \sum_j p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda E_i^{(A)}}}{\sum_i e^{-\lambda E_i^{(A)}}} \Rightarrow \lambda^{(A)} = \lambda^{(A+B)} = \lambda^{(C)}$$

cioè se un sistema $A + B$ è posto in un bagno termico il sottosistema A si comporta come se fosse messo da solo in un bagno termico

Temperatura

$$p_i^{(A)} = \sum_j p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda E_i^{(A)}}}{\sum_i e^{-\lambda E_i^{(A)}}} \Rightarrow \lambda^{(A)} = \lambda^{(A+B)} = \lambda^{(C)}$$

cioè se un sistema $A + B$ è posto in un bagno termico il sottosistema A si comporta come se fosse messo da solo in un bagno termico

- ▶ ma per avere λ uguali dobbiamo scegliere opportunamente i bagni termici

Temperatura

$$p_i^{(A)} = \sum_j p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda E_i^{(A)}}}{\sum_i e^{-\lambda E_i^{(A)}}} \Rightarrow \lambda^{(A)} = \lambda^{(A+B)} = \lambda^{(C)}$$

cioè se un sistema $A + B$ è posto in un bagno termico il sottosistema A si comporta come se fosse messo da solo in un bagno termico

- ▶ ma per avere λ uguali dobbiamo scegliere opportunamente i bagni termici
- ▶ solo in tale circostanza non avvengono scambi energetici tra i sottosistemi in media

Temperatura

$$p_i^{(A)} = \sum_j p_{(i,j)}^{(A+B)} = \frac{e^{-\lambda E_i^{(A)}}}{\sum_i e^{-\lambda E_i^{(A)}}} \Rightarrow \lambda^{(A)} = \lambda^{(A+B)} = \lambda^{(C)}$$

cioè se un sistema $A + B$ è posto in un bagno termico il sottosistema A si comporta come se fosse messo da solo in un bagno termico

- ▶ ma per avere λ uguali dobbiamo scegliere opportunamente i bagni termici
- ▶ solo in tale circostanza non avvengono scambi energetici tra i sottosistemi in media
- ▶ λ deve quindi essere una funzione universale della temperatura T !

λ fattore integrante del calore

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{-\lambda E_i}$$

λ fattore integrante del calore

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{-\lambda E_i} \implies U = -\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda}$$

λ fattore integrante del calore

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{-\lambda E_i} \implies U = -\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda}$$

$$d \log Z(\lambda) = \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda + \sum_i \frac{\partial \log Z}{\partial E_i} dE_i$$

λ fattore integrante del calore

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{-\lambda E_i} \implies U = -\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda}$$

$$\begin{aligned} d \log Z(\lambda) &= \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda + \sum_i \frac{\partial \log Z}{\partial E_i} dE_i \\ &= -U d\lambda - \mu \sum_i p_i dE_i \end{aligned}$$

$$d(\log Z + U\lambda) = \lambda(dU - \underbrace{\sum_i p_i dE_i}_{\text{lavoro medio}})$$

λ fattore integrante del calore

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{-\lambda E_i} \implies U = -\frac{\partial \log Z(\lambda)}{\partial \lambda}$$

$$\begin{aligned} d \log Z(\lambda) &= \frac{\partial \log Z}{\partial \lambda} d\lambda + \sum_i \frac{\partial \log Z}{\partial E_i} dE_i \\ &= -U d\lambda - \mu \sum_i p_i dE_i \end{aligned}$$

$$d(\log Z + U\lambda) = \lambda \left(dU - \underbrace{\sum_i p_i dE_i}_{\text{lavoro medio}} \right)$$

dalla prima legge $\implies$

$$\lambda \propto \frac{1}{T}$$

Entropia soggettiva?

Entropia soggettiva?

- L'entropia non è tanto una proprietà del sistema, ma una quantità che *determina lo stato*

Entropia soggettiva?

- ▶ L'entropia non è tanto una proprietà del sistema, ma una quantità che *determina lo stato*
- ▶ Una quantità che *presiede* al sistema tramite un principio variazionale, come la Lagrangiana nella meccanica

Entropia soggettiva?

- ▶ L'entropia non è tanto una proprietà del sistema, ma una quantità che *determina lo stato*
- ▶ Una quantità che *presiede* al sistema tramite un principio variazionale, come la Lagrangiana nella meccanica
- ▶ Ad essere soggettivo è lo *stato termodinamico*, definito attraverso parametri macroscopici

Entropia soggettiva?

- ▶ L'entropia non è tanto una proprietà del sistema, ma una quantità che *determina lo stato*
- ▶ Una quantità che *presiede* al sistema tramite un principio variazionale, come la Lagrangiana nella meccanica
- ▶ Ad essere soggettivo è lo *stato termodinamico*, definito attraverso parametri macroscopici
- ▶ i parametri macroscopici sono come *parametri di controllo*, le nostre leve per imporre cambiamenti

Il caso quantistico

- In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*

Il caso quantistico

- ▶ In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*
- ▶ La distribuzione dei microstati è rimpiazzata dall'*operatore densità*

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$$

- ▶ che fornisce il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ tramite

$$\langle A \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{A} \right)$$

Il caso quantistico

- ▶ In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*
- ▶ La distribuzione dei microstati è rimpiazzata dall'*operatore densità*

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$$

- ▶ che fornisce il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ tramite

$$\langle A \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{A} \right)$$

probabilità *epistemiche* oltre a quelle *ontologiche*

Il caso quantistico

- ▶ In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*
- ▶ La distribuzione dei microstati è rimpiazzata dall'*operatore densità*

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$$

- ▶ che fornisce il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ tramite

$$\langle A \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{A} \right)$$

probabilità *epistemiche* oltre a quelle *ontologiche*

- ▶ ogni sistema quantistico deve essere *operativamente* pensato come una specie di “ensemble”

Il caso quantistico

- ▶ In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*
- ▶ La distribuzione dei microstati è rimpiazzata dall'*operatore densità*

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$$

- ▶ che fornisce il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ tramite

$$\langle A \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A})$$

probabilità *epistemiche* oltre a quelle *ontologiche*

- ▶ ogni sistema quantistico deve essere *operativamente* pensato come una specie di “ensemble”
- ▶ Entropia di von Neumann

$$S = -\text{Tr} (\hat{\rho} \log \hat{\rho})$$

Il caso quantistico

- ▶ In MQ non è detto che i microstati siano *mutualmente esclusivi*
- ▶ La distribuzione dei microstati è rimpiazzata dall'*operatore densità*

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}|$$

- ▶ che fornisce il valor medio di un'osservabile $\hat{A}$ tramite

$$\langle A \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A})$$

probabilità *epistemiche* oltre a quelle *ontologiche*

- ▶ ogni sistema quantistico deve essere *operativamente* pensato come una specie di “ensemble”
- ▶ Entropia di von Neumann

$$S = -\text{Tr} (\hat{\rho} \log \hat{\rho})$$

- ▶ L'entropia come ignoranza sullo stato microscopico di un sistema è conservata, perché l'evoluzione di $\hat{\rho}$ è *unitaria*

Evoluzione temporale

- Dalla conoscenza di parametri macroscopici (medie statistiche) al tempo t_0 , $\mathcal{A}_i(t_0)$ si inferisce $\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}$ massimizzando l'entropia

Evoluzione temporale

- Dalla conoscenza di parametri macroscopici (medie statistiche) al tempo t_0 , $\mathcal{A}_i(t_0)$ si inferisce $\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}$ massimizzando l'entropia si tratta dell'entropia dello stato di equilibrio termodinamico

Evoluzione temporale

- ▶ Dalla conoscenza di parametri macroscopici (medie statistiche) al tempo t_0 , $\mathcal{A}_i(t_0)$ si inferisce $\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}$ massimizzando l'entropia si tratta dell'entropia dello stato di equilibrio termodinamico
- ▶ ad un tempo successivo t

$$\mathcal{A}_i(t_0) \rightarrow \mathcal{A}_i(t) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \hat{\mathcal{A}}_i(t) \right)$$

Evoluzione temporale

- ▶ Dalla conoscenza di parametri macroscopici (medie statistiche) al tempo t_0 , $\mathcal{A}_i(t_0)$ si inferisce $\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}$ massimizzando l'entropia si tratta dell'entropia dello stato di equilibrio termodinamico
- ▶ ad un tempo successivo t

$$\mathcal{A}_i(t_0) \rightarrow \mathcal{A}_i(t) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \hat{A}_i(t) \right)$$

- ▶ l'entropia di von Neumann resta uguale

$$S \left[\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \right] = S(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)})$$

Evoluzione temporale

- ▶ Dalla conoscenza di parametri macroscopici (medie statistiche) al tempo t_0 , $\mathcal{A}_i(t_0)$ si inferisce $\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}$ massimizzando l'entropia si tratta dell'entropia dello stato di equilibrio termodinamico
- ▶ ad un tempo successivo t

$$\mathcal{A}_i(t_0) \rightarrow \mathcal{A}_i(t) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \hat{A}_i(t) \right)$$

- ▶ l'entropia di von Neumann resta uguale

$$S \left[\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \right] = S(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)})$$

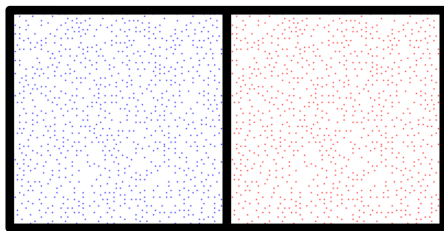
ma non si tratta dell'entropia dello stato di equilibrio al tempo t

$$S \left[\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t_0)}(t) \right] \leq S(\hat{\rho}^{\mathcal{A}(t)})$$

- ▶ flusso di informazione da parametri *rilevanti* a parametri *irrilevanti*

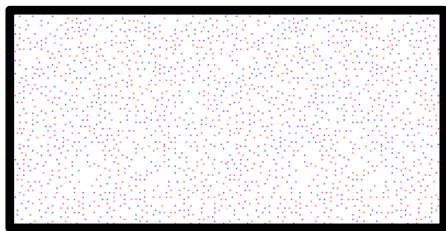
Soggettività e indistinguibilità

- Entropia di mescolamento e paradosso di Gibbs



Soggettività e indistinguibilità

- Entropia di mescolamento e paradosso di Gibbs

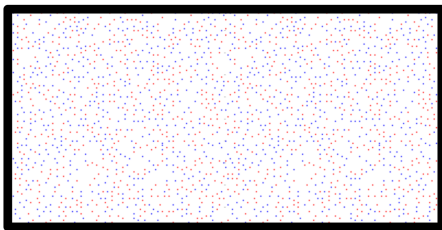


$$\Delta S = 2Nk \log 2$$

- una quantità indipendente dal *grado di diversità*
(ma $\Delta S = 0$ se sono indistinguibili)

Soggettività e indistinguibilità

- Entropia di mescolamento e paradosso di Gibbs

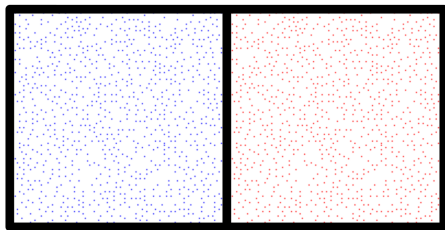


$$\Delta S = 2Nk \log 2$$

- una quantità indipendente dal *grado di diversità*
(ma $\Delta S = 0$ se sono indistinguibili)

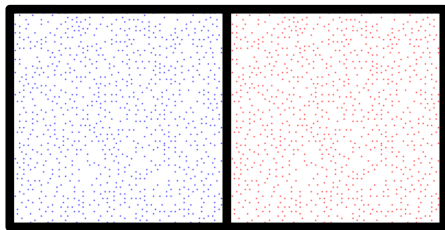
“Again, when such gases have been mixed, there is no more impossibility of the separation of the two kinds of molecules in virtue of their ordinary motions in the gaseous mass without any especial external influence, than there is of the separation of a homogeneous gas into the same two parts into which it has once been divided, after these have once been mixed.”

Impossibilità



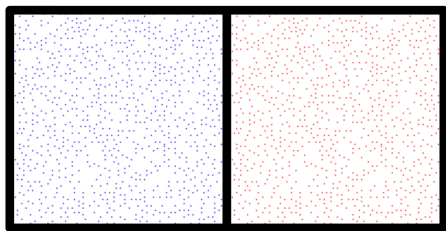
- ▶ dal mescolamento dei gas possiamo trarre lavoro utile, prelevando calore da una sola sorgente

Impossibilità



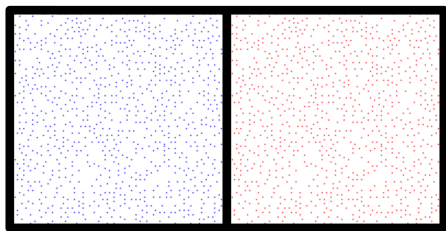
- ▶ dal mescolamento dei gas possiamo trarre lavoro utile, prelevando calore da una sola sorgente
- ▶ impossibile per gas indistinguibili

Impossibilità



- ▶ dal mescolamento dei gas possiamo trarre lavoro utile, prelevando calore da una sola sorgente
- ▶ impossibile per gas indistinguibili
- ▶ ma se riuscissimo *operativamente* a distinguerli?
- ▶ con un pistone mobile di Whifnio, raro elemento superkalico
(© Conte-Mascetti E. T. Jaynes 1996)

Impossibilità



- ▶ dal mescolamento dei gas possiamo trarre lavoro utile, prelevando calore da una sola sorgente
- ▶ impossibile per gas indistinguibili
- ▶ ma se riuscissimo *operativamente* a distinguerli?
- ▶ con un pistone mobile di Whifnio, raro elemento superkalico ((©Conte-Mascetti E. T. Jaynes 1996))
- ▶ potremmo violare la seconda legge!

Continuità $\Rightarrow$ salti quantici



“Quando la differenza di due casi può essere diminuita in datis, o in ciò che è posto, al di sotto di ogni grandezza assegnata, bisogna che tale differenza si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata anche in quae-sitis, o in ciò che risulta”

Continuità $\Rightarrow$ salti quantici



“Quando la differenza di due casi può essere diminuita in datis, o in ciò che è posto, al di sotto di ogni grandezza assegnata, bisogna che tale differenza si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata anche in quæsitis, o in ciò che risulta”

- equipartizione dell'energia e congelamento dei gradi di libertà

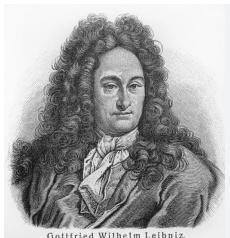
Continuità $\Rightarrow$ salti quantici



"Quando la differenza di due casi può essere diminuita in datis, o in ciò che è posto, al di sotto di ogni grandezza assegnata, bisogna che tale differenza si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata anche in quæsitis, o in ciò che risulta"

- ▶ equipartizione dell'energia e congelamento dei gradi di libertà
- ▶ catastrofe ultravioletta nel corpo nero

Continuità $\Rightarrow$ salti quantici



"Quando la differenza di due casi può essere diminuita in datis, o in ciò che è posto, al di sotto di ogni grandezza assegnata, bisogna che tale differenza si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata anche in quæsitis, o in ciò che risulta"

- ▶ equipartizione dell'energia e congelamento dei gradi di libertà
- ▶ catastrofe ultravioletta nel corpo nero
- ▶ è stato il punto di partenza della meccanica quantistica
- ▶ *Natura facit saltus*

Continuità della distinguibilità

l'entropia di mescolamento deve essere una funzione continua del *grado di diversità dei due gas* $\ell(A, B)$ (Landé)

$$\Delta S = f(\ell) 2Nk \log 2$$

- definire ℓ consente di catalogare set di stati *mutualmente esclusivi*

$$\ell(A_i, A_{i'}) = \delta_{ii'}, \quad \ell(B_j, B_{j'}) = \delta_{jj'}, \dots$$

ma due stati devono poter essere anche solo *parzialmente diversi*

Continuità della distinguibilità

l'entropia di mescolamento deve essere una funzione continua del *grado di diversità dei due gas* $\ell(A, B)$ (Landé)

$$\Delta S = f(\ell) 2Nk \log 2$$

- definire ℓ consente di catalogare set di stati *mutualmente esclusivi*

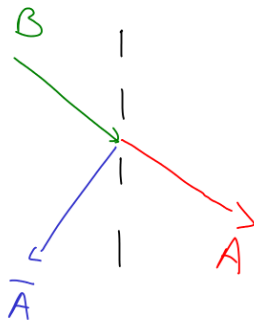
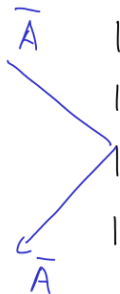
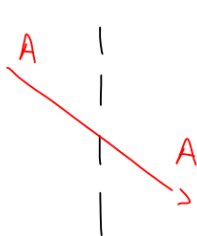
$$\ell(A_i, A_{i'}) = \delta_{ii'}, \quad \ell(B_j, B_{j'}) = \delta_{jj'}, \dots$$

ma due stati devono poter essere anche solo *parzialmente diversi*

- ℓ operativamente definito da *filtri* (membrane semipermeabili) che possono anche separare solo parzialmente

Filtri separatori

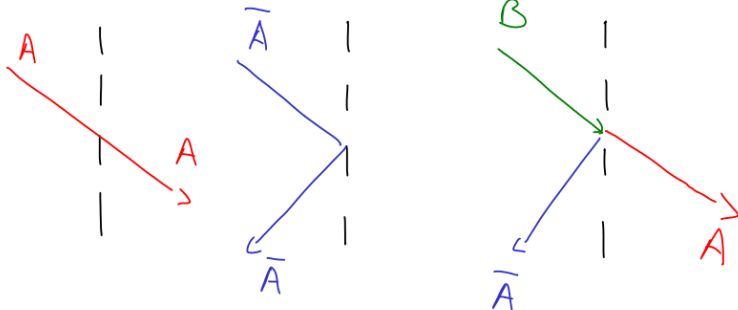
Filtro A



- solo una frazione dello stato B “parzialmente distinguibile” da A passa dal filtro $\implies \ell(A, B)$

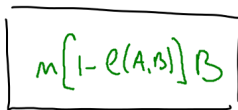
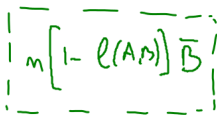
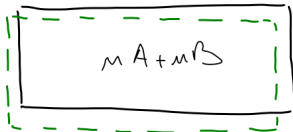
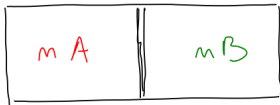
Filtri separatori

Filtro A



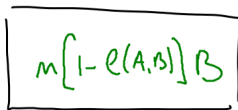
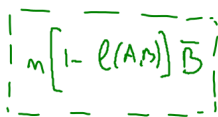
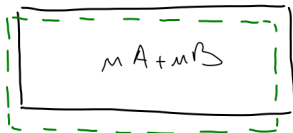
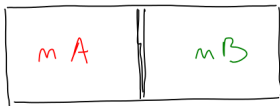
- ▶ solo una frazione dello stato B “parzialmente distinguibile” da A passa dal filtro $\implies \ell(A, B)$
- ▶ possiamo pensare la frazione che passa come *saltata* nello stato A o $\bar{A}$ per effetto di uno *strumento di misura*

$$\ell(A, B) = \ell(B, A)$$



da considerazioni puramente termodinamiche usando un filtro “A” o “B”

$$\ell(A, B) = \ell(B, A)$$



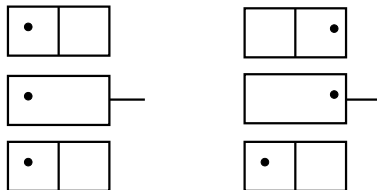
da considerazioni puramente termodinamiche usando un filtro “A” o “B”
 si arriva ad un'entropia di mescolamento funzione *continua* di $\ell \in [0, 1]$

Soggettività e relazionalità



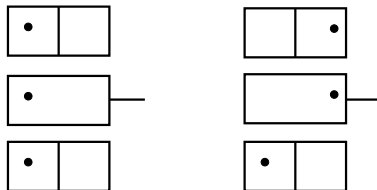
"There is no quantum world... it is wrong to think that the task of physics is to find out how Nature is. Physics concerns what we can say about Nature."

Il quanto di informazione



► l'informazione è *fisica*

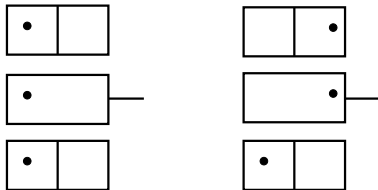
Il quanto di informazione



- l'informazione è *fisica*
- la cancellazione di un bit comporta un aumento di entropia

$$\Delta S = k \log 2$$

Il quanto di informazione



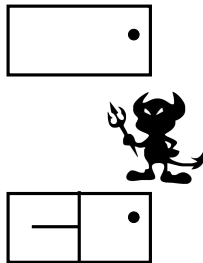
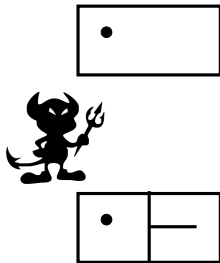
- ▶ l'informazione è *fisica*
- ▶ la cancellazione di un bit comporta un aumento di entropia

$$\Delta S = k \log 2$$

- ▶ e un corrispondente riscaldamento dell'ambiente (“energia degradata”)

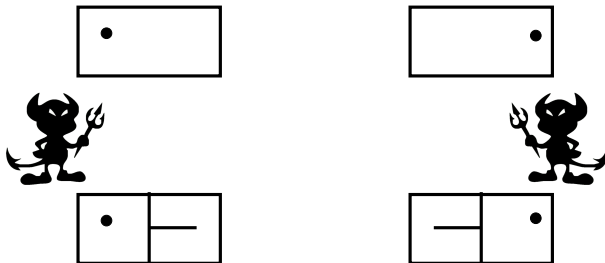
Esorcizzare i diavoletti

- corrispondentemente, si può *ricavare lavoro* dall'informazione



Esorcizzare i diavoletti

- corrispondentemente, si può *ricavare lavoro* dall'informazione



- il motore di Szilard non fa un ciclo se il diavoleto non resetta la sua memoria