

Leibniz - Newton

L'invenzione del Calcolo Differenziale e Integrale
e alcuni sviluppi

Antonio Leaci

Lecce, 19 giugno 2023



Leibniz

VS



Newton

Il Calcolo Differenziale e Integrale

- ▶ Ai tempi di Newton e Leibniz non esisteva il concetto di funzione come lo intendiamo noi.
- ▶ Il sorgere del concetto matematico di funzione è dovuto al metodo, creato da P. de Fermat (1636) e da R. Descartes (1637) per risolvere con l'algebra i problemi della geometria; e il vocabolo funzione, nel suo significato matematico, comparve per la prima volta in uno scritto di G. W. Leibniz, del 1692.
- ▶ Alcuni anni dopo, nel 1718, Johann Bernoulli (che già aveva usato, nel 1698, la voce funzione in un senso più vicino a quello che ha attualmente di quanto non avesse fatto Leibniz) definì come *funzione di una grandezza variabile* una quantità composta, in un modo qualsiasi, con questa grandezza e con delle costanti.

Il Calcolo Differenziale e Integrale

- ▶ Successivamente, nel 1748, Eulero precisò questa definizione dicendo che una funzione di una quantità variabile è un'*espressione analitica* composta in qualsiasi modo con tale quantità variabile e con quantità costanti. Per Eulero, il concetto di funzione da una parte veniva identificato con quello di espressione analitica, e dall'altra si riattaccava a quello di curva, in diretta connessione coi metodi della geometria analitica, insegnati da Fermat e Descartes.
- ▶ Siffatti metodi, traducendo le proprietà geometriche o cinematiche, caratteristiche di una determinata curva piana, in una relazione analitica fra le coordinate x e y del punto generico della linea, ponevano una dipendenza fra tali coordinate, in modo, che, fissato un valore dell'ascissa x , ne risultavano determinati uno o più valori dell'ordinata y ; e in tal senso, la y veniva a essere una funzione della x .

Il Calcolo Differenziale e Integrale

- ▶ Perciò, una linea composta, p. es. di due segmenti rettilinei, non appartenenti a una stessa retta, non poteva dare origine a una funzione, perché le coordinate d'un punto generico del primo segmento soddisfano a una certa equazione, mentre quelle di un punto del secondo segmento soddisfano a un'altra equazione, diversa dalla precedente.
- ▶ «Questo modo di concepire le funzioni portò a serî imbarazzi nella discussione del problema delle corde vibranti, risoluto per la prima volta da J. d'Alembert, nel 1747. Una nuova soluzione di tale problema, ottenuta da Daniel Bernoulli nel 1753, mediante una serie trigonometrica, e alcune osservazioni fatte in proposito da Eulero, misero in luce la necessità di generalizzare la nozione di funzione.»
- ▶ Peraltro, a questa generalizzazione si giunse soltanto dopo che, sul finire del 1807, J. Fourier osò affermare che ogni curva piana arbitrariamente tracciata, e incontrata in un solo punto al più da ogni parallela all'asse delle y , è rappresentabile, in un intervallo finito, con una serie trigonometrica.

Il Calcolo Differenziale e Integrale

- ▶ **Con qualche opportuna restrizione**, la conclusione di Fourier fu rigorosamente provata, nel 1829, da J. P. G. Lejeune Dirichlet (1805–1859), il quale, precisamente in simili studi, formulò la definizione generale di funzione (univoca) che è oggi universalmente accettata.
- ▶ Secondo tale definizione, *una quantità y si dice funzione, e più precisamente funzione univoca, di una o più altre quantità $x, z, \dots, t$, variabili in un certo campo C , se, ad ogni sistema $x, z, \dots, t$, di C , corrisponde, secondo una data legge, un valore e uno solo di y . Se poi a ogni sistema $x, z, \dots, t$ di C corrispondono più valori della y , questa è una *funzione plurivoca* delle quantità $x, z, \dots, t$.*
- ▶ Dirichlet introdusse la funzione, che porta oggi il suo nome, che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali. Tale funzione non è integrabile secondo Riemann.

Il Calcolo Differenziale e Integrale

- ▶ Nella definizione di **Dirichlet**, è inteso che tanto la funzione y quanto la variabili indipendenti $x, z, \dots, t$, siano tutte dei numeri; ma quella definizione si presta a essere interpretata in un senso assai più generale, se non ci si limita alle sole variabili numeriche.
- ▶ Per esempio, l'area racchiusa da una curva piana (o il volume racchiuso da una superficie) è un numero che resta ben determinato quando sia fissata la curva (o la superficie); e, secondo un significato più largo della definizione di Dirichlet, deve dirsi perciò che tale numero è una funzione della curva (o della superficie).
- ▶ Queste funzioni più generali furono considerate e studiate per la prima volta da V. Volterra (1884). Infine (seguendo Volterra, Pincherle, Fréchet, Moore e altri) possiamo anche intendere che la funzione y sia un ente di natura qualsiasi che dipende da altri enti $x, z, \dots, t$, pure di natura qualsiasi.
- ▶ Lo studio delle funzioni più generali, cui abbiamo or ora accennato, vien fatto nell'**Analisi Funzionale**, fondato da V. Volterra e da S. Pincherle sulla fine del secolo scorso, e nel **Calcolo delle Variazioni**.
- ▶ **Da L.Tonelli, S.Pincherle, Treccani online**

Le Equazioni Differenziali Fondamentali

- L'equazione (sistema) di Newton

$$F = m a = m r''$$

- L'equazione delle onde

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

- L'equazione del calore

$$u_t = k u_{xx}$$

- L'equazione di Poisson (del potenziale)

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

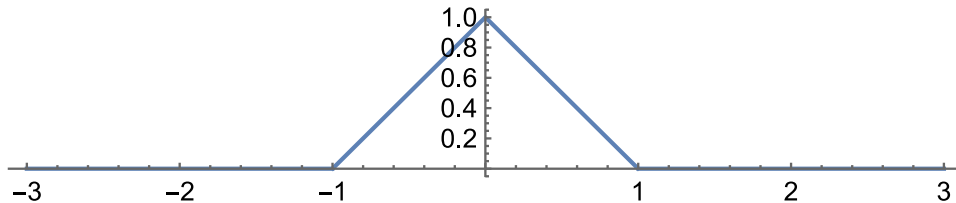
- Condizioni iniziali o al bordo.

L'Equazione delle onde

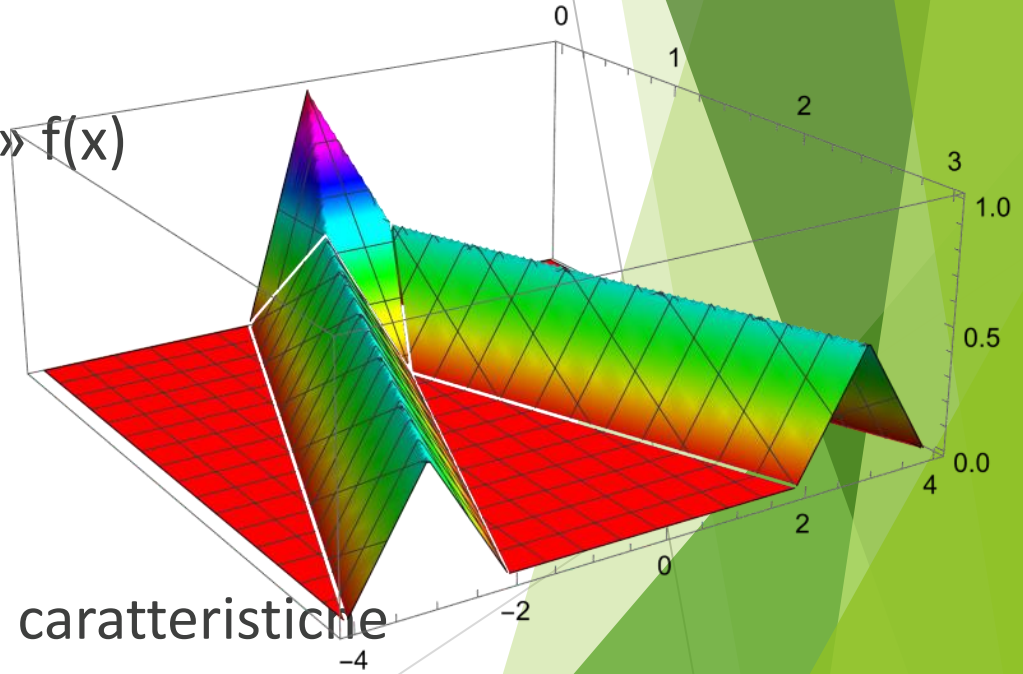
- La soluzione di d'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds$$

- La configurazione iniziale della corda «pizzicata» $f(x)$



- La soluzione non è differenziabile lungo le linee caratteristiche
 $x + vt = c, x - vt = c.$



L'Equazione del calore

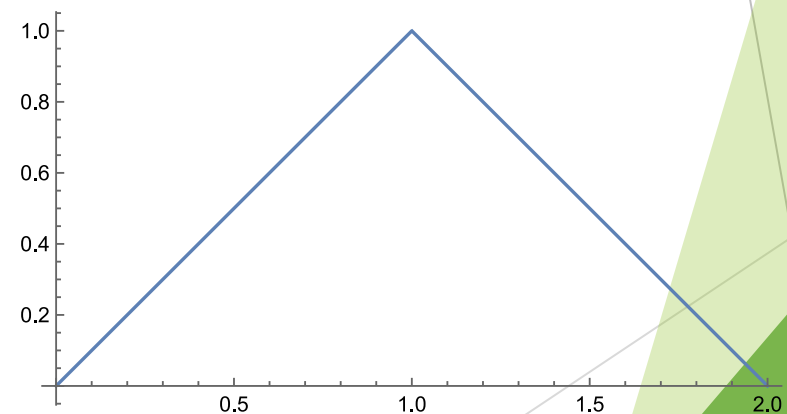
- La soluzione di Fourier per una barra di lunghezza L e temperatura iniziale

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin k\omega x$$

è data da:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-(k\omega)^2 t} \sin k\omega x$$

- Temperatura iniziale
- L'equazione del calore è regolarizzante
- Proprio questi studi hanno portato all'integrale di Lebesgue e alle derivate deboli.



Come lavorare con queste funzioni ?

Facciamo ricorso al Calcolo Integrale, alla formula di **integrazione per parti!**

Se f e g sono di classe C^1 allora

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Se f è *continua+qualcosa (assolutamente continua)* e g è di classe C^1 allora esiste *h sommabile secondo Lebesgue* tale che

$$\int_a^b h(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

La funzione **h** è la derivata debole di **f**

Se consideriamo $g(1)=g(-1)=0$, possiamo scrivere

$$Df(x) = h$$

Come lavorare con queste funzioni ?

Se $f(x) = x_+ = \text{ReLU}(x)$ (**Rectified Linear Units**) allora $f'(x) = H(x)$

E se voglio derivare $H(x)$? Consideriamo ancora $g(1)=g(-1)=0$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \textcolor{red}{DH}(x)g(x)dx &= H(1)g(1) - H(-1)g(-1) - \int_{-1}^1 H(x)g'(x)dx = \\ &= - \int_0^1 g'(x)dx = g(0) - g(1) = g(0) \end{aligned}$$

Quindi DH non è una funzione ma risulta

$$DH(x) = \delta \quad \text{delta di Dirac}$$

nel senso della Teoria delle distribuzioni di L.Schwarz (1915-2002), Medaglia Fields nel 1950.