

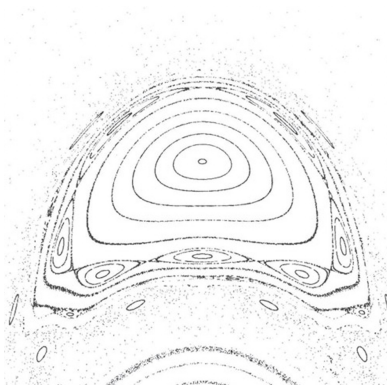
Integrabilità e Caos

L. Martina

Università del Salento, Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"
Sezione INFN, Lecce, Italy



Concetti Fondamentali di Fisica
28 Nov. 2022

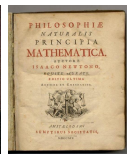


Outline

- 1 Un po' di Storia
- 2 Sistemi Hamiltoniani
- 3 Perturbazioni di sistemi Integrabili
- 4 Catene Metastabili e Integrabili
- 5 Rappresentazione di Lax
- 6 Sistemi Integrabili Continui
- 7 Bibliografia Minimale

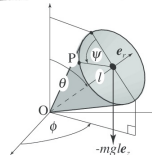
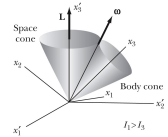
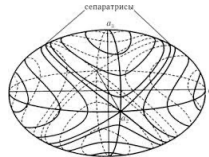
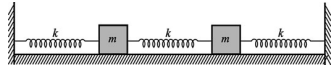
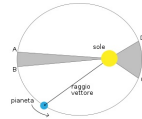
Un po' di Storia

- Formulare in forma matematica le leggi della Fisica
- I *Principia* di Newton
- Trovare soluzioni esatte (analitiche) per i problemi meccanici
- Formulazione variazionale della Meccanica
- Comprendere la struttura geometrica sottostante i problemi meccanici
- Esistenza di funzioni generatrici dei moti (Es.: Hamiltoniana)



Alcuni Problemi Risolti

- Il problema di Keplero
- Gli Oscillatori Armonici
- La trottola di Eulero
- La trottola di Lagrange



L'ipotesi di Laplace

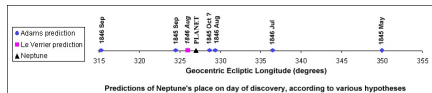
Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro proprio come il passato sarebbe evidente davanti ai suoi occhi

(Essai philosophique sur les probabilités, P. S. Laplace (1814))

La Probabilità per sopperire all'ignoranza (tecnica) nella misura degli stati dinamici e nella risoluzione delle equazioni del moto

Successi ...

- Scoperta di Nettuno (Le Verrier-Adam-Galle)
- Opere Ingegneristiche



... e Limiti

La Meccanica Classica oggi è considerata una disciplina fisico-matematica (non completamente assiomaticizzata): i suoi postulati, pur ispirandosi al mondo fisico, sono considerati come dati. Unici sviluppi prevedibili sono le scoperte di nuovi teoremi interessanti per le sue applicazioni.

I dubbi di Poincaré

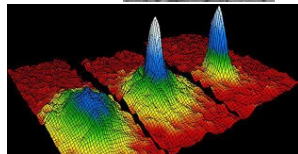
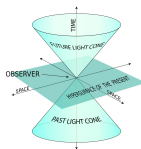
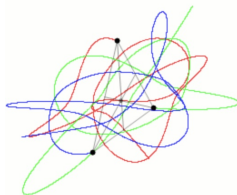
...Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.

Se una tale conoscenza ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più ... Ma non è sempre così : può infatti accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime in quelle successive. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nelle seconde. La previsione diviene impossibile...

(Science et méthode, H. Poincaré (1908))

L'avvento della Fisica Moderna

- Meccanica Classica
 - Equazioni del Moto
(Pochi Gradi di Libertá)
 - Meccanica Statistica
(Molti gradi di Libertá)
- Meccanica Relativistica
(fenomeni alla di c)
- Meccanica Quantistica
(fenomeni alla scale di $\hbar$,
Probabilità epistemica)
- Relatività Generale e
Gravitazione
(Covarianza generale e scala
delle grandi masse)



Evoluzione Hamiltoniana I

Spazio delle Fasi $\Gamma \simeq \mathbb{R}^N \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$

Funzioni su Γ : $\mathcal{F}_\infty(\Gamma) \ni H(\mathbf{x}) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ (e.g. : coordinate, hamiltoniana, costanti del moto, ...

Struttura di Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}_\infty(\Gamma) \times \mathcal{F}_\infty(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}_\infty(\Gamma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{antisimmetrica} \\ \textit{lineare} \\ \textit{Jacobi id.} \\ \textit{Leibnitz} \end{array} \right.$$

Campo vettoriale hamiltoniano $X_H^i(\mathbf{x}) = \{H(\mathbf{x}), x_i\} \quad i = 1, \dots, N$

Equazioni del Moto $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$

Evoluzione Hamiltoniana II

Esempio: Il rotatore rigido con punto fisso nel sistema solidale al corpo

Struttura di Poisson: $\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} x_k$ (Mom. angolare) $\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, x_j\} = 0$

Hamiltoniana $H = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{I_1} + \frac{x_2^2}{I_2} + \frac{x_3^2}{I_3} \right)$ (solo contributi cinetici)

Equazioni del moto $\begin{cases} \dot{x}_1 = \{H, x_1\} = (I_3^{-1} - I_2^{-1}) x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = \{H, x_2\} = (I_1^{-1} - I_3^{-1}) x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = \{H, x_3\} = (I_2^{-1} - I_1^{-1}) x_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{J}_1 = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{J} \\ \mathbf{J} = I \boldsymbol{\omega} \\ I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3) \end{cases}$

Costanti del Moto $\dot{H} = \{H, H\} = 0$ ($H = E$), $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \ell^2 \Rightarrow$

Quadratura $\dot{x}_1 = \sqrt{\alpha + \beta x_1^2 + \gamma x_1^4} \Rightarrow x_1 = f(t)$ (f. ellittica, c. Poincaré)

Integrabilità

Evoluzione Hamiltoniana III

Struttura Simplettica su Γ :

$$\{x_i, x_j\} = \omega_{i,j} \text{ non degenera } \omega^{i,j} \omega_{j,k} = \delta_k^i \implies N = 2n$$

2-forma non degenera chiusa (area infinitesima in Γ)

$$\omega = \frac{1}{2} \omega^{i,j} dx_i \wedge dx_j, \quad d\omega = 0 \text{ (Jacobi id.)}$$

Se esatta $\omega = d\theta \implies$ **coordinate canoniche** :

$$\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \omega = dq^i \wedge dp_i = d(-p_i dq^i)$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \implies$$

$$\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} = (\nabla_{\mathbf{x}} f)^T \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{x}} g = \partial_{q^i} f \partial_{p_i} g - \partial_{p_i} f \partial_{q^i} g$$

$$\text{Equazioni di Hamilton} \begin{cases} \dot{q}^i = \{q^i, H(\mathbf{x})\} = X_H^q(\mathbf{x}) = \partial_{p_i} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_i = \{p_i, H(\mathbf{x})\} = X_H^p(\mathbf{x}) = -\partial_{q^i} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})$$

Evoluzione Hamiltoniana IV

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (X_H^q(\mathbf{x}), X_H^p(\mathbf{x})) = 0$$

Canonical Transformation $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma \quad (Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n) = \varphi(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$

$$dq^i \wedge dp_i = dQ^i \wedge dP_i \Leftrightarrow \{Q^i, P_j\} = \delta_j^i, \{Q^i, Q^j\} = 0 = \{P_i, P_j\}$$

Variabili Angolo-Azione

Es. Caso 1 g.d.l. $H(q, p) = E$ ammette moti periodici $\implies p = p(q, E)$

Definiamo l'Azione

$$I = \oint p \, dq \quad (q, p) \leftrightarrow (\phi, I), \quad \{\phi, I\} = 1$$

$$H = H(I) \quad \begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\phi} = \frac{dH}{dI} = \omega(I) \end{cases} \rightarrow I(t) = I_0, \quad \phi(t) = \omega(I) t + \phi_0$$

Evoluzione Hamiltoniana V

Per n g.d.l. $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, I_1, I_2, \dots, I_n)$, $H = H(I_1, \dots, I_n)$

$$\begin{cases} \dot{I}_i = 0 \\ \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, \dots, I_n) \end{cases} \implies \begin{cases} I_i(t) = I_{i0} \\ \phi_i(t) = \omega_i(I_{10}, \dots, I_{n0}) t + \phi_{i0} \end{cases}$$

Integrabilità $\Leftrightarrow$ Esistono coordinate Angolo-Azione tali che tutte le traiettorie siano periodiche o quasi-periodiche $\Gamma \simeq T^n \times \mathbb{R}^n$

Funzioni Generatrici di Trasformazioni canoniche

$$S(\mathbf{l}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{l}, \mathbf{q}), \quad \phi = \nabla_{\mathbf{l}} S(\mathbf{l}, \mathbf{q})$$

Equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{l}, \mathbf{q}), \mathbf{q}) = E$$

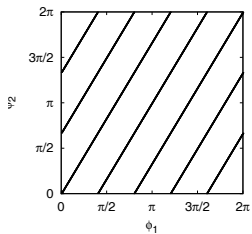
Evoluzione Hamiltoniana VI

Teorema di Liouville: Un sistema è integrabile per quadrature se è Liouville-integrabile, cioè se esistono n integrali del moto $f_1, \dots, f_n$ indipendenti e che siano in involuzione: $\{f_i, f_j\} = 0$

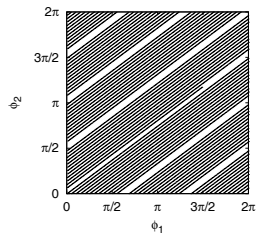
Evoluzione Hamiltoniana VII



(a)



(b)





CREDIT: NIELS BOHR ARCHIVE, PHOTOGRAPH BY ERIK OUSTAFSON, COURTESY AP (MILUD SEGRÉ VISUAL ARCHIVES, MARGRETHE BOHR COLLECTION)

Physicists Wolfgang Pauli, left, and Niels Bohr demonstrating a "tippe top" toy in 1954. Tippe tops flip upside down to spin on their handle and are part of the "Secret Science of Toys" festival at the Fleet Science Center on Jan. 21.

Non esistenza di integrali del moto I

Hamiltoniane Quasi-Integrabili

$H(\mathbf{l}, \phi) = H_0(\mathbf{l}) + \epsilon H_1(\mathbf{l}, \phi)$ ϵ sufficientemente piccolo, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$

Esistono integrali del moto oltre all'energia?

Sia $\{H_0(\mathbf{l}), F_0(\mathbf{l})\} = 0$

Cerchiamo

$$F(\mathbf{l}) = F_0(\mathbf{l}) + \epsilon F_1(\mathbf{l}, \phi) + \epsilon^2 F_2(\mathbf{l}, \phi) + \dots$$

$$F_i(\mathbf{l}, \phi) = \sum_{\mathbf{m}} f_{i, \mathbf{m}}(\mathbf{l}) \exp[\mathbf{m} \cdot \phi], \quad \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$$

$$\{H_0, F_1\} = -\{H_1, F_0\}$$

$$H_1(\mathbf{l}, \phi) = \sum_{\mathbf{m}} h_{1, \mathbf{m}}(\mathbf{l}) \exp[\mathbf{m} \cdot \phi],$$

Se $F_0 = I_j$

$$F_1 = \sum_{\mathbf{m}} \frac{m_j h_{1, \mathbf{m}}(\mathbf{l})}{\mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{l}} H_0(\mathbf{l})}$$

Non esistenza di integrali del moto II

Problema dei *piccoli denominatori*

$$\mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{I}) \approx 0 \rightarrow$$

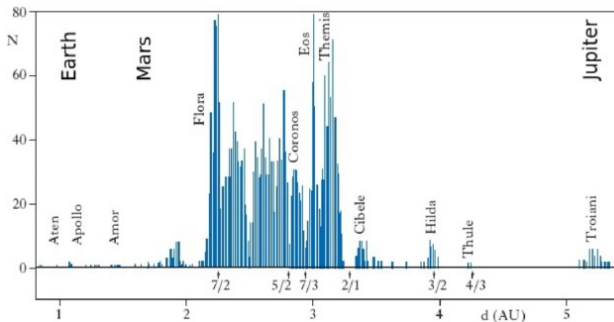
NON convergenza della serie per F_1 !!!

1) Condizione di risonanza

$$\mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{I}) = 0$$

Relazioni razionali tra le frequenze formano un insieme denso di tori distrutti $\Leftrightarrow$ Non esistenza di integrali del moto oltre l'Energia !!!

Non esistenza di integrali del moto III



Non esistendo (localmente) integrali del moto le traiettorie potrebbero "vagare" nello spazio delle fasi, generando **Caos deterministico hamiltoniano**.

Ma è sempre così ?

KAM I

Teorema di Kolmogorov - Arnol'd - Moser: Sia $H(I, \phi)$ sviluppabile in serie di un parametro $\epsilon \neq 0$ sufficientemente piccolo, tale che $\det \left(\frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j} \right) = \det \left(\frac{\partial \omega_i(I)}{\partial I_j} \right) \neq 0$, i tori invarianti permangono in una regione della superficie $H = E$, la cui misura di Lebesgue tende a 1 per $\epsilon \rightarrow 0$.

1) KAM implica che, anche in assenza di integrali del moto analitici globali, la misura dei tori non risonanti, che sono solo leggermente deformati, tende a 1 per $\epsilon \rightarrow 0$.

2) Le traiettorie del sistema hamiltoniano perturbato possono essere "vicine" a quelle dell'integrabile H_0 .

Assumiamo che H_1 sia analitica, con coefficienti $|h_{1, m}| < C e^{-m}$, $m = \sum_i |m_i|$.

Esistono infiniti denominatori

$$\forall \mathbf{m} : |\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_0(I)| > A(\boldsymbol{\omega}_0) m^{-\tau}, \quad A \gg \sqrt{\epsilon}, \tau > n - 1$$

$F_1, F_2, \dots$ esistono in regioni di misura non nulla $\Rightarrow$ Esistono Integrali del moto

La Mappa Standard di Chirikov I

$$I(n+1) = I(n) + \epsilon \sin \phi(n),$$

$$\phi(n+1) = \phi(n) + I(n+1) \mod 2\pi$$

Descrive il moto del rotatore "scalciato", ϵ è l'intensità dei "calci" e misura la nonlinearità del sistema

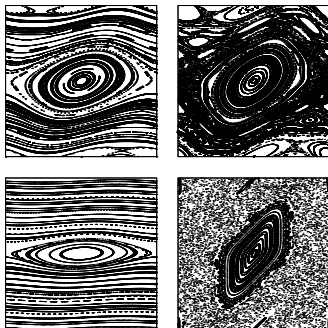
Winding $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n) - \phi(0)}{n}$ definisce la natura dei tori

Conservazione dell'area

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial I(n+1)}{\partial I(n)} & \frac{\partial I(n+1)}{\partial \phi(n)} \\ \frac{\partial \phi(n+1)}{\partial I(n)} & \frac{\partial \phi(n+1)}{\partial \phi(n)} \end{vmatrix} = 1 \quad (1)$$

Limite integrabile $\epsilon = 0$ soluzione $\phi(n) = \phi(0) + n I(0) \mod 2\pi$

La Mappa Standard di Chirikov II



Ritratto di fase della mappa standard per $\epsilon = 0.1, 0.5, 0.9716, 2.0$. (girando in senso orario dal pannello in basso a sinistra). La spessa curva nera nel pannello in alto a destra è un'orbita quasiperiodica con numero di avvolgimento molto vicino $\phi_{aureo} - 1$

Il sistema di Henon-Heiles I

Nel contesto della meccanica celeste, H-H (1964) erano interessati a capire se un potenziale asimmetrico, che modella in buona approssimazione una stella in una galassia, possiede un terzo integrale del moto, oltre a energia e momento angolare.

$$2g.d.l. \quad H = \frac{1}{2} (P^2 + p^2) + \frac{1}{2} \left(Q^2 + q^2 + 2Q^2 q - \frac{2}{3} q^3 \right)$$

Nota $H = H_0 + \epsilon H_1$ con

$$H_0 = \frac{1}{2} (P^2 + p^2) + \frac{1}{2} (Q^2 + q^2) \quad (2 \text{ oscillatori armonici indipendenti})$$

$$\epsilon H_1 = Q^2 q - \frac{1}{3} q^3$$

L'energia E gioca il ruolo di parametro di sviluppo

Rappresentazione nella Mappa di Poincaré nel piano q, p : le condizioni iniziali per le orbite possono essere scelte selezionando $q(0)$, $p(0)$ e $Q(0) = 0$, allora $P(0)$ è fissato dalla scelta di E .

Il sistema di Henon-Heiles II

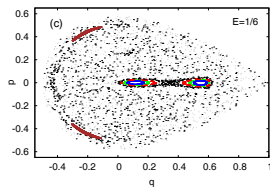
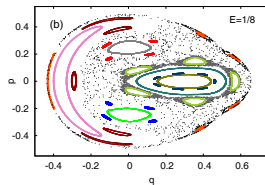
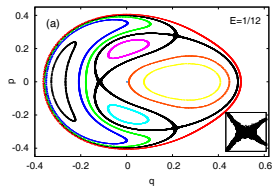
Se esiste un secondo integrale isolante, la mappa di Poincaré sarebbe costituita da una successione di punti organizzati in curve regolari, mentre la sua assenza porterebbe al riempimento dell'area delimitata definita da $p^2/2 + \frac{1}{2} (q^2 - \frac{2}{3} q^3) \leq E$

a) Punti di equilibrio, moti regolari attorno ad esse, Separatrici eterocliniche, con vicine aree irregolari

b) Esistono ancora orbite chiuse, Compaiono orbite con comportamento "randomico" (i punti neri appartengono ad un solo moto), piccoli anelli circondano le orbite centrali chiuse, come suggerisce il colore, sono formati dalla stessa traiettoria. Lo spazio delle fasi disponibile è partizionato in regioni con orbite regolari separate da porzioni finite, densamente riempite da traiettorie senza apparente regolarità .

c) La maggior parte dello spazio delle fasi disponibile è riempito da una singola traiettoria. Piccole isole regolari sopravvivono.

Il sistema di Henon-Heiles III



La diffusione di Arnol'd

$N = 2$ I tori KAM sono bidimensionali e quindi possono separare regioni della superficie tridimensionale di energia costante.

Regioni caotiche disgiunte, separate da superfici invarianti possono coesistere.

$N > 2$ I tori KAM hanno dimensione N mentre l'ipersuperficie $H = E$ ha dimensione $2N - 1$.

Il complemento dell'insieme di tori invarianti (Arnol'd web) è connesso permettendo, in linea di principio, il vagare di orbite caotiche.

In studi numerici si è trovato che $\langle |I(t) - I(0)|^2 \rangle = \langle \Delta I(t)^2 \rangle \approx 2D t$,
ma anche subdiffusione con $\langle \Delta I(t)^2 \rangle \approx t^\nu$ (memoria a lungo termine)

Teorema di Nekoroshev

Data un'Hamiltoniana $H = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \phi)$, con H_0 sotto le stesse ipotesi di KAM e convessa, allora esistono le costanti positive A, B, C, α, β tali che per ogni dato iniziale e per tempi limitati dalla relazione

$$t < B \exp \left[C \epsilon^{-\beta} \right]$$

risulta

$$|I_i(t) - I_i(0)| < A \epsilon^\alpha$$

1) Il teorema vale globalmente sullo spazio delle fasi.

Es. $H = \omega \cdot \mathbf{I} + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \phi)$ con H_1 analitica e limitata, le frequenze ω soddisfano la relazione diofantea $|\mathbf{m} \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|\mathbf{m}|^n}$ con $|\mathbf{m}| > 0$ e $\gamma > 0$. Allora per tempi $|t| \leq B \exp \left[C \epsilon^{-1/n} \right]$ risulta $|I_i(t) - I_i(0)| < A \epsilon^{1/n}$ per $i = 1, \dots, n$.

Questo tipo di risultati è applicabile allo studio degli asteroidi attorno ai punti di equilibrio L_4, L_5 con stabilità per tempi lunghi, ma non infinita.

2) ergodicità e integrabilità non sono proprietà generiche dei sistemi hamiltoniani.

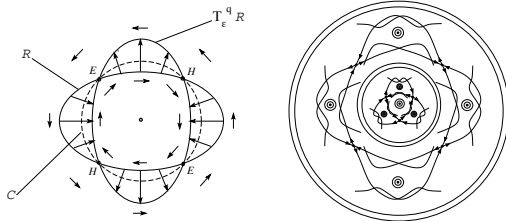
Teorema di Poincaré - Birkhoff I

Il Teorema di Poincaré - Birkhoff afferma che

- una generica perturbazione distrugge un toro risonante C con numero di avvolgimento p/q interi coprimi, dando origine a $2kq$ punti fissi, metà dei quali sono iperbolici e l'altra metà ellittici in sequenza alternata.
- Attorno a ciascun punto fisso ellittico, possiamo ritrovare tori risonanti che subiscono l'azione dello stesso teorema quando perturbati
- A seguito della perturbazione si forma una struttura di punti fissi autosimilare a tutte le scale

Queste sono le isole regolari che abbiamo descritto per l'Hamiltoniana di Henon-Heiles

Teorema di Poincaré - Birkhoff II



Sinistra) Sia un cerchio (toro) risonante C del sistema imperturbata ed R una curva che si modifica in direzione radiale sotto l'azione della perturbazione generando R_{pert} . Le curve si intersecano in C , generando una sequenza alternata di punti fissi ellittici (E) e iperbolici (H). Seguendo le direzioni del campo vettoriale si ottiene l'identificazione dei punti. Destra) Strutture autosimilare di punti ellittici ed iperbolici sviluppatasi al crescere dell'intensità della perturbazione

Il modello Fermi-Pasta-Ulam I

(1954) FPU avrebbe voluto dimostrare numericamente l'ipotesi ergodica dei vari modi di oscillazione attraverso interazioni non lineari

$$H(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + \sum_{j=1}^{N+1} V(x_{j+1} - x_j)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{2}x^3 + \frac{\beta}{3}x^4 .$$

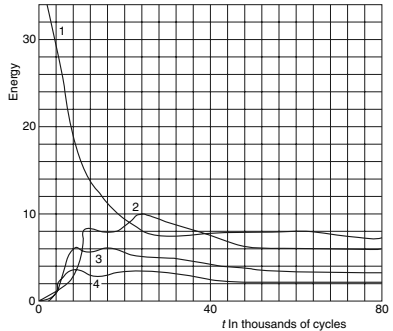
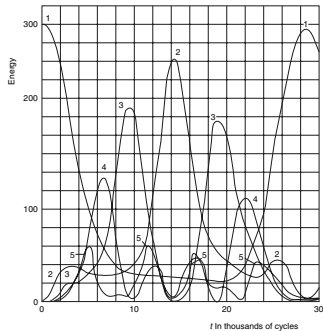
Modi normali $\omega_k = 2 \sin \frac{k \pi}{2(n+1)}$

Energia media per modo $\langle E_k \rangle_E = E/n = \epsilon$

FPU pensavano di stimare il tempo di rilassamento delle medie temporali

$$\bar{E}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_k(t') dt' \rightarrow \epsilon$$

Il modello Fermi-Pasta-Ulam II



Paradosso !!! (apparente)

Il modello di Toda I

(1967)

$$V_T = \frac{1}{2} \left(e^{\lambda r} - 1 - \lambda r \right) = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} \alpha r^3 + \frac{2}{3} \alpha^2 r^4 + \dots \quad \alpha = \lambda/2$$

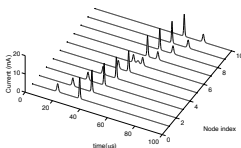
Toda trovò famiglie di soluzioni esatte: I solitoni, essi non termalizzano !!!

$$q_N(n, t) = q_+ + \log \frac{\det(\mathbb{I} + C_N(n, t))}{\det(\mathbb{I} + C_N(n+1, t))},$$

$$C_N(n, t) = \left(\frac{\sqrt{\gamma_i(n, t) \gamma_j(n, t)}}{1 - e^{\kappa_i + \kappa_j}} \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

$$\gamma_j(n, t) = \gamma_j e^{-2\kappa_j n - 2\sigma_j \tanh(\kappa_j) t}$$

where $\kappa_j, \gamma_j > 0$ and $\sigma_j \in \{\pm 1\}$.



Il modello di Toda II

Completa integrabilità : Flaschka (1974)

$$\frac{d}{dt}L(t) = [P(t), L(t)]$$

$$\begin{aligned} L(t)f(n) &= a(n, t)f(n+1) + a(n-1, t)f(n-1) + b(n, t)f(n), \\ P(t)f(n) &= a(n, t)f(n+1) - a(n-1, t)f(n-1). \end{aligned}$$

$$a(n, t) = \frac{1}{2}e^{-(q(n+1, t) - q(n, t))/2}, \quad b(n, t) = -\frac{1}{2}p(n, t)$$

Metastabilità in FPU

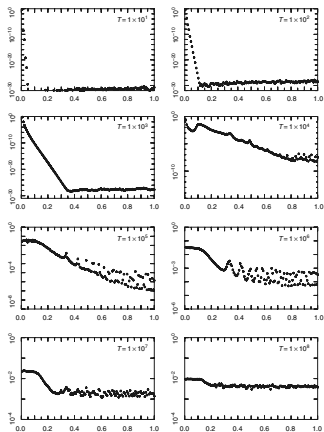


Fig. 4.7. The spectrum at several times ($10, 10^2, \dots, 10^8$). Illustration of the final phase following the first one, with the attainment of global equipartition (note the change in the vertical scale of the figures). Same as Fig. 4.6, but now with $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$. The time-scale of observation is the same in both cases

Rappresentazione di Lax di un sistema integrabile I

Supponiamo di avere un sistema integrabile a n g.d.l. $\implies$ esistono n integrali del moto indipendenti in involuzione $(H_1, \dots, H_n)$

Costruisco una matrice $n \times n$ $L_0 = \text{diag}(H_1, \dots, H_n)$

Ogni trasformazione di similarità (unitaria) $U(t)$ preserva gli autovalori

$L = U L_0 U^{-1}$, che sono costanti rispetto a t

Consideriamo l'eq. agli autovalori $L\psi = \lambda \psi$ e supponiamo che gli autovettori formino una base

Derivando rispetto al tempo t e tenendo conto della costanza di λ e definito

$\dot{\psi} = -P \psi$ si ottiene per ogni ψ l'equazione di compatibilità

$$\dot{L} = [L, P]$$

Un sistema hamiltoniano a n gdl corrispondente ad una coppia di Lax (L, P) ha integrali del moto $\text{Tr}(L^k)$ per $k = 1, \dots, n$

KdV e Trasformata Spettrale I

Limite continuo di FPU : la Korteweg - de Vries (1895)



$$u_t + 6 u u_x + u_{xxx} = 0$$

KdV e Trasformata Spettrale II

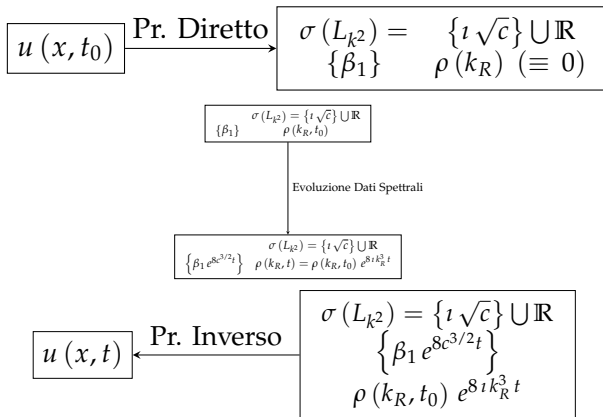
$$\begin{aligned} L[u] &= -\partial_x^2 u + u, \\ M[u, u_x] &= 4\partial_x^3 - 3(u \partial_x + \partial_x (u \cdot)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= u \\ S_2 &= u_x \\ S_3 &= u_{xx} - u^2 \\ S_4 &= u_{xxx} - 2(u^2)_x \\ S_5 &= u_{xxxx} - 2(u^2)_{xx} - (u_x)^2 - 2u u_{xx} + 2u^3 \\ &\vdots \\ S_{n+1} &= \partial_x S_n + \sum_{m=1}^{n-1} S_m S_{n-m} \end{aligned} \quad (6)$$

Es. soluzione: Onda Solitaria

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right]$$

KdV e Trasformata Spettrale III



KdV e Trasformata Spettrale IV

$$u_N(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad \tau_i = -i(k_i x - 4k_i^3 t), \quad A_{mn} = \delta_{mn} + i \beta_m \frac{e^{-(\tau_m + \tau_n)}}{k_m + k_n}.$$

$$u = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)}{[3 \cosh(x) + \cosh(3x)]^2}$$

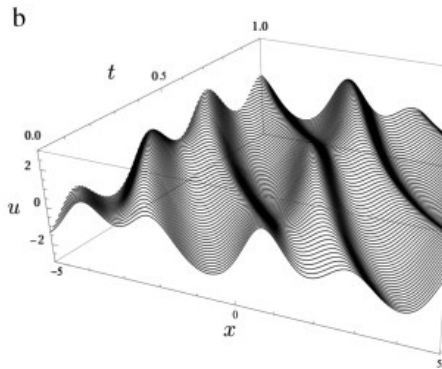
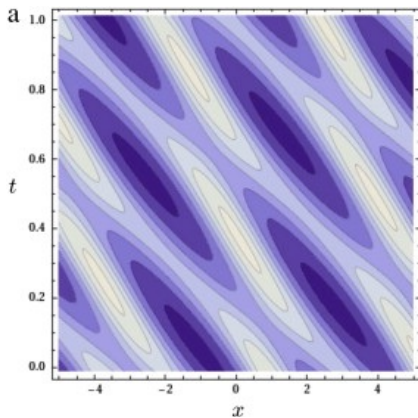
Soluzioni periodiche

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \log \Theta(x\mathbf{p} + t\mathbf{v} + \mathbf{l}) + 2C - 2 \sum_{k=1}^g \oint_{a_k} \lambda dU_k,$$

$$\Theta(\mathbf{h}|\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g} \exp [\pi i B \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}].$$

Funzione Theta di Riemann di genus g

KdV e Trasformata Spettrale V



Bibliografia Minimale

- 1 V. I. Arnold: Metodi Matematici della Meccanica Classica, Editori Riuniti Univ. Press, Roma 2010
- 2 M. Cencini, F. Cecconi, A. Vulpiani: *Chaos From Simple Models to Complex Systems*, World Scientific , Singapore, 2010
- 3 E. Ott : *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press , Cambridge 1993
- 4 O. Babelon, D. Bernard M. Talon : *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press , Cambridge 2003
- 5 M. A. Ablowitz, P. A. Clarkson: *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press , Cambridge 2010