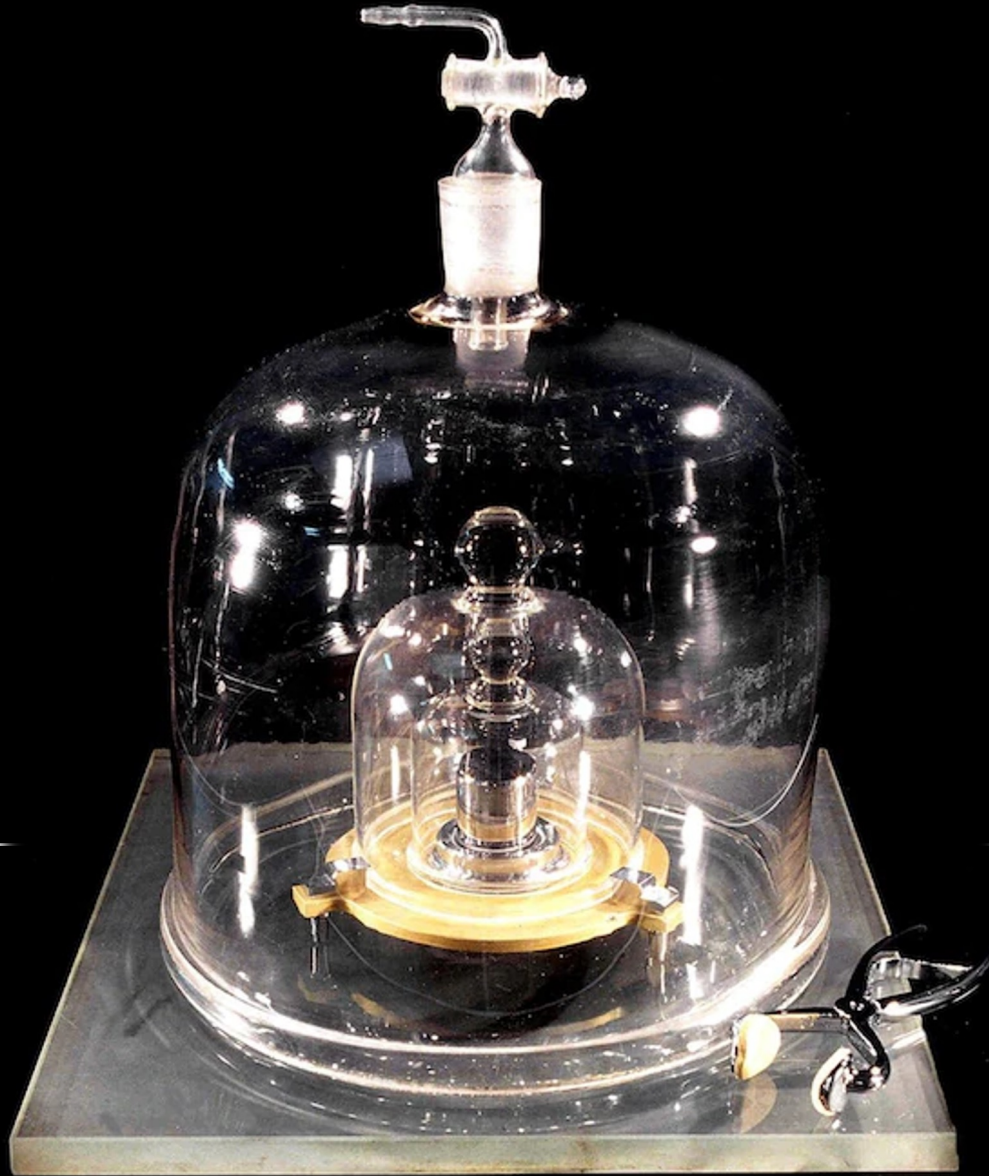




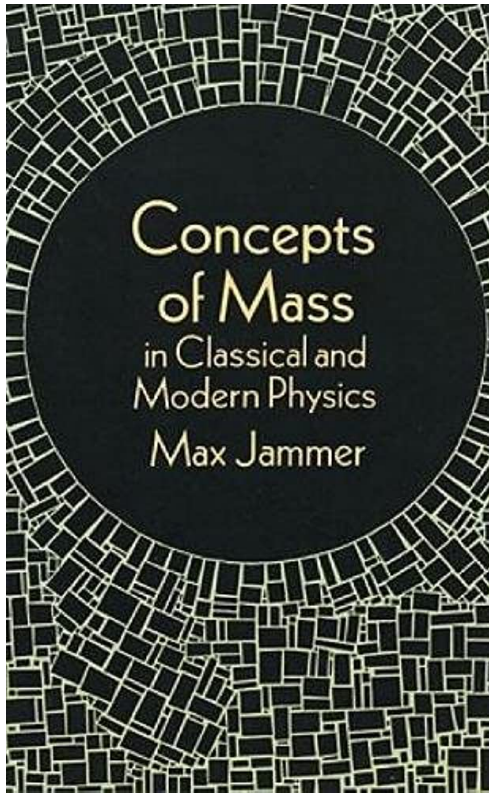
Il concetto di massa in Fisica classica e Moderna

DANIELE MONTANINO

DIPARTIMENTO DI **MATEMATICA E FISICA**
"ENNIO DE GIORGI"



Bibliografia



Max Jammer

Concepts of Mass in Classical and Modern Physics

Dover Publications

ISBN-10 : 0486299988

ISBN-13 : 978-0486299983

La massa è un concetto ovvio!

... ne così siamo sicuri?



Etimologia



Deriva dalla parola latina *massa* nel senso di grumo di pasta inteso come «aggregazione di corpi».

A sua volta deriva dalla parola greca $\mu\alpha\tilde{\alpha}\zeta\alpha$ che indicava un particolare tipo di pane. Probabilmente la parola deriva a sua volta dall'ebraico *matzah* (מַצָּה) che indicava il pane azzimo.

E' possibile anche che il termine «messa» abbia la stessa etimologia (intesa come sacrificio eucaristico).

L'antico concetto di massa



Gli scambi commerciali nell'antichità hanno reso necessario l'uso di standard nelle unità di misura. La prima unità di peso conosciuta fu introdotta dal re assiro Dalmanassar V (727-722AC) con la *mina* (circa 570g).

Quantità di beni differenti spesso erano misurati con unità differenti.

Il peso non era concepito come una entità dinamica (forza) proporzionale alla quantità di materia ma piuttosto come una proprietà intrinseca dei corpi.

Il concetto aristotelico di massa



Per Aristotele il concetto di «quantità di materia» era estraneo al suo modo di pensare. La «fisica» aristotelica (φύσις) è la scienza dei fenomeni di crescita e trasformazione.

Il crescere o il decrescere di una sostanza erano compatibili con la preservazione della stessa. Per esempio nella fisica erano inclusi anche i fenomeni biologici per cui la crescita di un essere vivente era avulsa dall'idea di assimilazione di materia esterna.

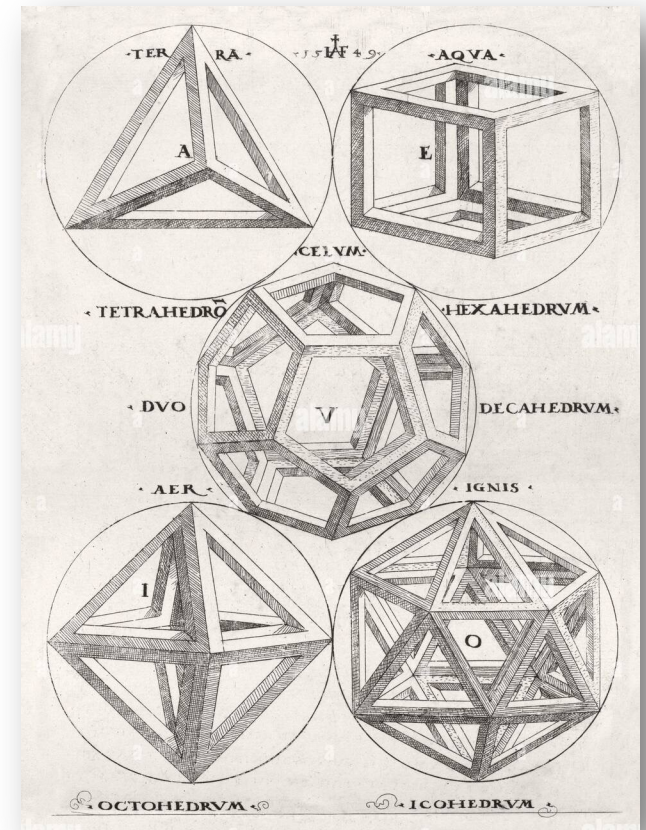
Aristotele inoltre rigettava il concetto di inerzia come conseguenza di una resistenza «interna». Egli riteneva che l'inerzia fosse dovuta ad una forza esterna dovuta al mezzo in cui esso si muoveva.

Il concetto platonico di massa

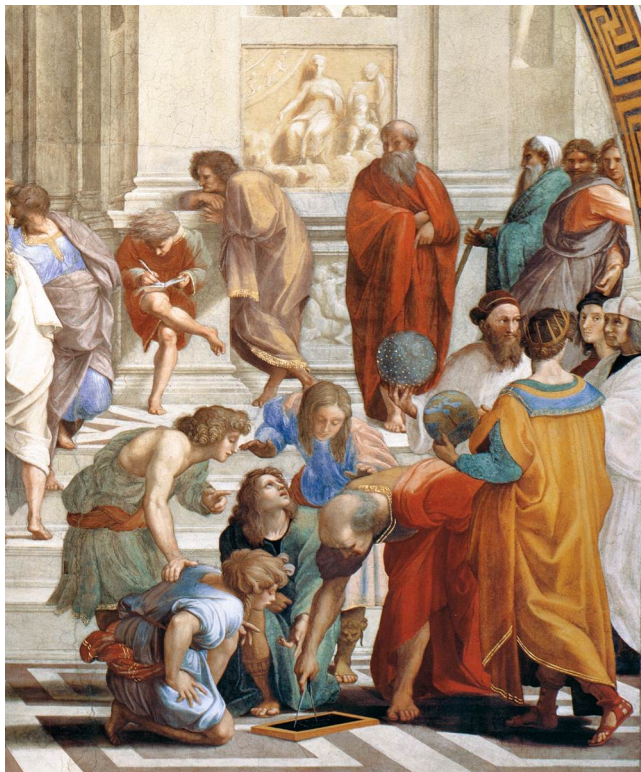
Per Platone l'unico indicatore affidabile è l'estensione spaziale dell'oggetto in quanto lo spazio è permanente e immutabile. Questo concetto fu accettato in seguito anche dalla scuola peripatetica (stanziamente dovuta alla critica di Simplicio). In pratica la massa era legata al «volume» dell'oggetto stesso.

Questa concezione ovviamente ha senso solo se si comparano oggetti omogenei della stessa sostanza. I maggiori oppositori a questa visione furono gli stoici i quali sostenevano la distinzione tra spazio e corpo.

Sextus Empiricus attribuisce ai corpi due quantità «geometriche» (estensione e forma) e due «fisiche» (resistenza e peso). Tuttavia manca ancora una definizione operativa di queste caratteristiche.



Il concetto neoplatonico di massa



Con l'amalgamazione della filosofia platonica con quella giudaico-cristiana la «materia» diventa «impotente» ovvero «inerte» nel senso di una assoluta assenza di attività spontanea.

Plotino distingue tra «materia» e «corpo». Il corpo è un composto del quale la materia è solo un elemento.

Conclusioni simili vengono raggiunte nella scuola islamica «Fratellanza della Purezza» in cui si ritiene che l'immobilità è una caratteristica della materia non avendo nessuna direzione preferenziale nel quale muoversi.

La visione atomistica

E' probabilmente la visione più vicina al concetto di quantità di materia in quanto esisterebbero componenti invarianti e indistruttibili. Tuttavia nell'antichità il concetto di «conservazione del peso» non è mai stato formulato esplicitamente (tranne in un isolato scritto di Luciano di Samosata).

Già Lucrezio affermava che i corpi possono essere più pesanti o più leggeri poiché gli atomi sono più «vicini» o «lontani» tra loro. Tuttavia, nonostante gli studi idrostatici di Archimede il concetto di *densità* è relativamente recente.



Quantitas Materiae



Averroè (Ibn Rushd, X secolo) identifica la forma corporale come avente una «tridimensionalità determinata» (ovvero la forma o il volume) la quale è una quantità accidentale, e una indeterminata, indipendente dalla forma sostanziale, dotata di divisibilità (o quantità).

Aegidius Romanus (XI secolo), un discepolo di Tommaso d'Aquino, fu il primo a introdurre il concetto di quantità di materia in un dibattito sulla transustanziazione. Infatti egli accettava la terminologia introdotta da Averroè di *dimensiones indeterminate* e *determinate* ma in una accezione diversa. La prima è quella che chiama *quantitas materiae* mentre la seconda era un sinonimo del volume del corpo. Il variare della seconda non influenza la prima.

La dimensione indeterminata ha quindi un primato rispetto a quella determinata. E' curioso notare che il concetto fondamentale in fisica newtoniana è la particella dotata di massa ma senza dimensione spaziale, e non un volume senza massa!

La concettualizzazione della massa inerziale

Il concetto di quantità di materia ha continuato a giocare un ruolo importante nella scienza medievale.

Buridano per esempio, nella sua teoria dell'*impetus* nota che scagliando un corpo vi sia una proporzionalità inversa tra la distanza raggiunta da due corpi della stessa dimensione ma con quantità di materia diversa, a parità di forza. Tale proporzionalità riguarda anche altri concetti (come ad esempio la capacità termica). Nonostante ciò la resistenza al moto viene considerata, come in Aristotele, una forza reale.

Galileo enumera le caratteristiche primarie della materia: forma, dimensione, posizione, contiguità, numero e moto. Tutte le quantità sono di tipo geometrico, aritmetico o cinematico. In nessun punto egli tratta degli aspetti non-geometrici della massa. Solo Torricelli, dopo la spiegazione di Keplero, aggiungerà il termine «massa» come dimensione tra le quantità primarie.

La concettualizzazione della massa inerziale

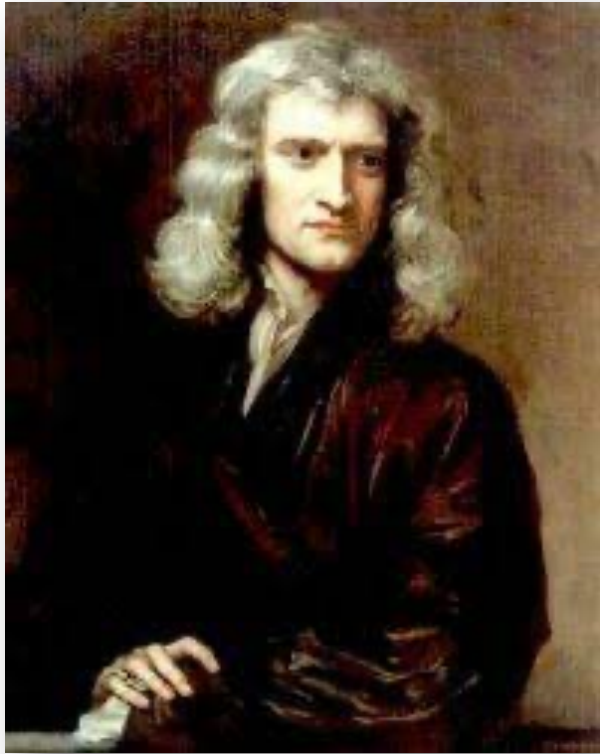
Fu Giovanni Keplero a formalizzare il concetto di massa inerziale. Nel trattato *Astronomia Nova* egli afferma:

«Se due pietre fossero piazzate in in qualche parte l'una vicino all'altra oltre la sfera di influenza di un terzo corpo esse si attirerebbero l'una verso l'altra verso l'altra come due magneti in un punto intermedio l'una in proporzione della massa dell'altra»

In questa affermazione è possibile vedere diverse intuizioni (conservazione della quantità di moto, forza di attrazione gravitazionale). Inoltre potrebbe anche essere utilizzata per una definizione operativa di massa. Inoltre nella *Epitome Astronomiae Copernicae* egli afferma che se i corpi non fossero dotati di inerzia la più piccola forza conferirebbe loro una velocità infinita.



La sistematizzazione della massa



Già prima dei *Principia* di Newton vi erano stati già diversi approcci alla formalizzazione della massa inerziale. Huygens per esempio afferma che le forze centrifughe sono proporzionali al peso dei corpi in gioco.

Newton nel libro 3 dei suoi *Principia* definisce corpi della stessa densità come quelli che hanno la stessa inerzia nello stesso volume. Egli introduce il concetto di quantità di moto (*quantitas motus*) come la misura del prodotto della quantità di materia per la velocità specificando che si tratta di una quantità additiva (ovvero la QM del corpo è la somma delle QM delle parti). Infine la definizione 3 descrive la *vis insita* o la forza innata della materia a rimanere nel suo stato di quiete o di moto.

Si noti che le tre leggi che seguono da queste definizioni non fanno uso esplicito del concetto di massa.

La sistematizzazione della massa

Un interessante commento alla definizione 3 fu fatto da Franciscan Le Seur e Jacquier nel 1739. In termini moderni si arguiva che la forza inerziale è una proprietà della materia invariante sotto una trasformazioni da un sistema «a riposo» a uno in moto rettilineo uniforme.

Alcuni autori ritengono che per Newton il concetto di densità fosse primario rispetto a quello di massa. Bisogna considerare che Newton caratterizza le qualità irriducibili di un corpo come quelle che esistono in tutto il corpo poiché esistono in ogni sua parte. Nel linguaggio moderno diremmo che le quantità rilevanti per Newton sono quelle «intensive».

Egli inoltre non considera l'inerzia *per se* come una quantità fondamentale poiché essa cessa quando cessa la forza che accelera il corpo (allo stesso modo in cui il peso non è una quantità fondamentale). Il concetto fisicamente determinante è quello di quantità di materia. Poiché la quantità di materia in corpi con lo stesso volume è in generale diversa, Newton identifica la quantità intensiva densità come la quantità «irriducibile» del corpo.

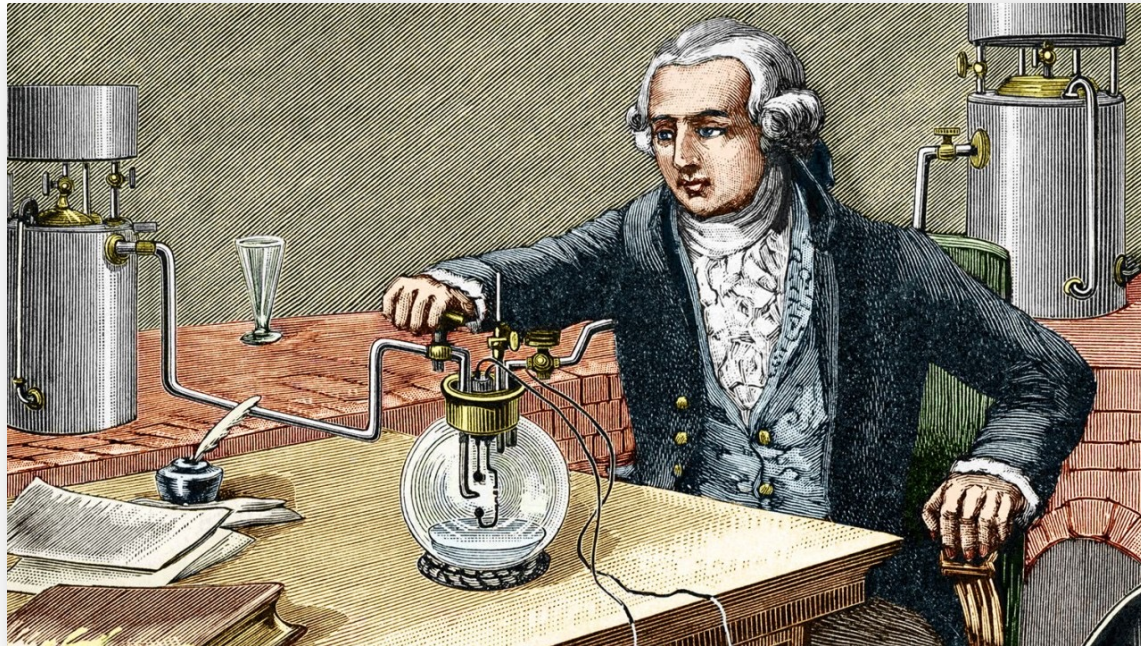
La sistematizzazione della massa

Un contributo sorprendente al concetto di massa viene da Immanuel Kant. Egli infatti rifiuta il concetto di «forza di inerzia» poiché è una contraddizione in termini in quanto una «forza» è in grado di creare moto (oggi la definiremmo al più come una forza apparente in un sistema di riferimento non inerziale).

Egli quindi postula la «legge di inerzia» come corrispondente alla categorie della causalità: ogni cambio di stato del moto ha una causa esterna. Secondo Kant la *quantità di materia* è l'ammontare di «mobile» (*beweglichen*) in un volume definito e la massa è la «quantità di materia» considerata «attiva» nello stesso momento. A sua volta la quantità di materia può essere stimata solo attraverso la quantità di moto ad una data velocità.



Il concetto «sostanziale» della massa



Nel VIII e IX secolo si fa sempre più strada l'idea che i corpi siano costituiti da un substrato sottostante a tutta la realtà fisica (sostanza). In particolare la quantità di materia si deve conservare. Questo concetto assunto implicito nei Principia fu supportato dagli esperimenti di chimica portati avanti da Lavoisier il quale affermava che nelle reazioni chimiche la quantità iniziale di materia sia uguale a quella finale.

Poiché era oramai noto che il peso cambiava da luogo a luogo doveva essere la massa e non il peso la quantità conservata.

La definizione formale di massa

Alla fine del XIII secolo ancora mancava una definizione formale di massa definita ancora come la quantità di materia contenuta da un corpo.

Fu Eulero nel trattato *Mechanica* a formalizzare gli assiomi della meccanica. In particolare nella Definizione XV egli afferma che la massa è data dalla misura della forza per impartire un certo moto (accelerazione) al corpo stesso. Egli scrive quindi la relazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

la quale, pur essendo chiamata II legge di Newton non fu scritta in questa maniera nei *Principia* bensì nella forma (in termini moderni) $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$



La definizione formale di massa

La definizione precedente tuttavia presuppone la definizione del concetto di forza. Per i positivisti questo concetto, centrale nella fisica newtoniana, è ritenuto oscuro e metafisico. Per i filosofi, fisici e matematici del IX secolo la cinematica possiede una priorità metodologica rispetto alla dinamica.

Per esempio Saint-Venant rigetta il concetto di «quantità di materia» come vuoto di ogni significato fisico. Egli definisce la massa in maniera cinematica attraverso gli urti. Se il corpo 1 viene utilizzato come corpo di riferimento e lo si urta centralmente con un corpo 2 è possibile definire la massa di quest'ultimo rispetto al primo come rapporto delle variazioni di velocità

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|}$$

La definizione formale di massa



Nel 1867 Ernst Mach suggerì una nuova definizione di massa. Nella sua «scienza della Meccanica» egli chiama «affermazioni sperimentali» delle estrapolazioni legittime dell'esperienza. In particolare scrive le seguenti proposizioni:

- a) Due particelle A e B in interazione reciproca (di qualunque tipo) ma la cui interazione con le altre particelle dell'universo sia trascurabile subiscono «sotto certe circostanze» una accelerazione uguale e contraria
- b) Il rapporto tra le masse tra le due particelle è per definizione il rapporto dalle mutue accelerazioni cambiate di segno

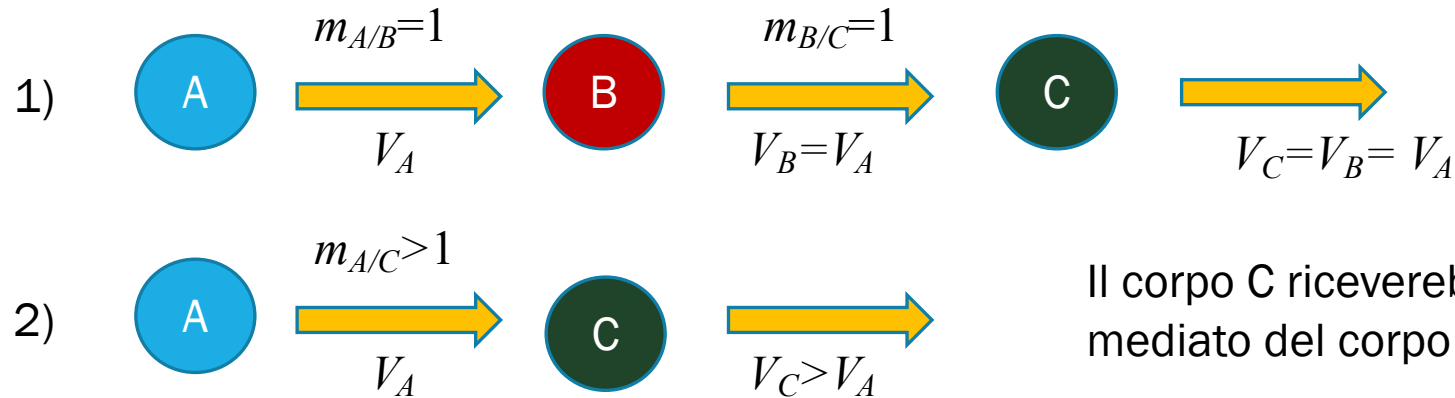
$$m_{A/B} = - \frac{a_{B/A}}{a_{A/B}}$$

- c) Il rapporto di massa è indipendente dallo stato fisico dei corpi [...]
- d) L'accelerazione che un certo numero di corpi A, B, C inducono in un corpo K sono indipendenti le une dalle altre

La definizione formale di massa

Per poter definire $m_{A/B}$ come effettivamente un «rapporto di masse» (ed in tal caso basta scegliere una massa campione A e definire le altre in rapporto a quella) è necessario che valga una relazione di transitività. In parole semplici se due corpi A e C hanno la stessa massa se hanno separatamente la stessa massa di un corpo B?

Mach effettua un esperimento di pensiero supponendo che i tre corpi subiscano urti elastici tramite una *reductio ad absurdum*:



Il corpo C riceverebbe più energia nell'urto diretto che non mediato del corpo B

La definizione formale di massa

La frase «sotto certe circostanze» è stata per essere molto vaga. In particolare «circostanze» si riferisce ad un particolare sistema di riferimento? Infatti è facile vedere che se un sistema S' si muove di moto accelerato con accelerazione a rispetto ad un altro sistema S il rapporto di massa misurato non sarà uguale nei due sistemi

$$m'_{A/B} = m_{A/B} \frac{1 - \frac{a}{a_{B/A}}}{1 - \frac{a}{a_{A/B}}}$$

In particolare due corpi che hanno massa uguale in un sistema di riferimento avranno massa disuguale in un altro.

In aggiunta vi sono ulteriori difficoltà di interpretazione. In particolare Mach assume un sistema isolato di due corpi, qualcosa che evidentemente non esiste in natura (se non in maniera approssimata).

La definizione formale di massa

In un sistema con N particelle, l'accelerazione deve essere prima risolta nelle componenti relative alla direzione dei vari corpi. L'accelerazione del corpo k -esimo sarà data da

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N \alpha_{k,i} \mathbf{u}_{k,i}$$

con $\mathbf{u}_{k,i}$ versore nella direzione del corpi i -esimo. L'equazione precedente costituisce un sistema di $n(n-1)$ incognite per $3n$ equazioni, per cui deve essere $n(n-1) \leq 3n$ cioè $n \leq 4$. La procedura proposta da Mach fallisce per 5 o più particelle.

Tuttavia, al netto di queste sottigliezze la definizione di Mach è una buona definizione operativa di massa.

La definizione formale di massa

Maxwell nella sua *Matter and Motion* non obietta sul concetto di forza come concetto fisicamente significativo. Egli afferma che è possibile causare la forza di un corpo su di un altro con la stessa intensità in diverse occasioni. Per esempio una molla allungata più volte con la stessa elongazione produrrà la stessa forza.

Alcuni autori come Alois Höfler basano la definizione di massa su forza e tensione: «Una massa di un grammo è un corpo che soggetto a una tensione di un dyne acquista una accelerazione di 1 cm s^{-2} ». Anche Clémentich de Engelmeyer ha pubblicato una investigazione riguardante l'origine «sensoria» dei concetti scientifici nel quale egli enfatizza che la nostra esperienza è più vicina a quella di forza che a quella di massa. Egli propone quindi un sistema fondamentale basato su forza (F), lunghezza (L) e tempo (T) in cui la massa diventa una quantità derivata FT^2L^{-1} .

Molti fisici tuttavia propongono la strada più semplice per definire la massa: semplicemente pesandola! Questo metodo è sicuramente valido (sinché sia accertato che la forza peso cresce linearmente con la massa), sebbene ovviamente tenda a creare confusione tra peso e massa.

Assiomatizzazione della massa

In principio il concetto di massa può essere assiomatizzato, ed essere assunto come concetto primitivo
Per esempio Simon da la seguenti definizioni:

- Def. 1: Un moto (π) è un insieme finito di punti $\{P_i\}_{i=1,\dots,N}$ in uno spazio 3-d sul quale è definito un insieme di vettori associati $\mathbf{r}_i(t)$, per $t_1 \leq t \leq t_2$
- Def. 2: il vettore $\mathbf{r}_i(t)$ è chiamata la posizione del punto P_i al tempo t .
- Def. 3: se esiste un insieme N di scalari positivi $\{m_i\}$ costanti rispetto al tempo tali che

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i(t) \times \ddot{\mathbf{r}}_i(t)] \equiv 0$$

allora l'insieme $\{P_i\}$ con i vettori associati $\{\mathbf{r}_i(t)\}$ e gli scalari $\{m_i\}$ è chiamato *moto isolato proprio*

- Def. 4: L'elemento P_i con la funzione $\mathbf{r}_i(t)$ e lo scalare m_i è chiamato *punto materiale o particella*
- Def. 5: Lo scalare m_i è chiamate *massa* di P_i .

Assiomatizzazione della massa

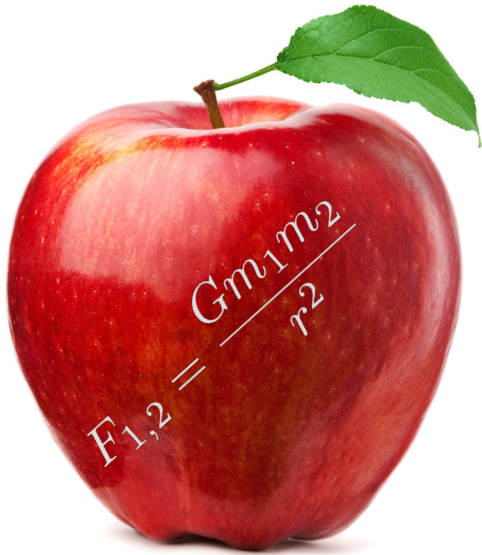
Nella definizione precedente tuttavia ci possono essere casi in cui le masse non sono definite univocamente. Vi è però un teorema:

- Condizione necessaria e sufficiente perché le masse siano univocamente determinate (eccetto per una ovvia costante moltiplicativa) è che non esista nessun sottoinsieme (π') del moto (π) sul quale il moto isolato può essere definito.

Un moto è chiamato *disgiunto* se $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) \equiv 0$. Il moto delle stelle fisse è approssimativamente disgiunto. In base al teorema precedente, in un moto disgiunto le masse non sono determinate univocamente. Simon aggiunge la seguente ipotesi «fisica»

- Esiste una classe galileiana di sistemi di riferimento rispetto al quale il moto delle stelle fisse è un moto disgiunto. Le masse determinate rispetto a tale sistema di riferimento sono chiamate *masse inerziali newtoniane*.

Il concetto gravitazionale di massa



Nei *Principia* Newton afferma la legge di gravitazione universale:

«Ogni particella nell'universo attrae ogni altra particella con una forza la cui intensità è inversamente proporzionale all'inverso della loro reciproca distanza e proporzionale alle diverse quantità di materia che essi contengono».

A rigor di termini nella meccanica newtoniana dobbiamo distinguere tre tipi di massa:

- La massa inerziale (ovvero quella che entra nella II legge di Newton)
- La massa gravitazionale *attiva*, ovvero quella che induce il campo gravitazionale
- La massa gravitazionale *passiva*, ovvero quella che risente del campo gravitazionale

La seconda e la terza però uguali a causa della III legge di Newton. Infatti se abbiamo due corpi 1 e 2 con masse attive (passive) m_{a1} e m_{a2} (m_{p1} e m_{p2}) rispettivamente

$$F_{1,2} \equiv G \frac{m_{a1} m_{p2}}{r_{12}^2} = F_{2,1} \equiv G \frac{m_{a2} m_{p1}}{r_{12}^2} \Rightarrow \frac{m_{a1}}{m_{p1}} = \frac{m_{a2}}{m_{p2}}$$

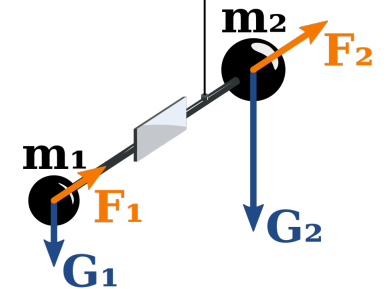
Massa inerziale e gravitazionale



Researcher	Year	Method	Average sensitivity
John Philoponus	517 AD	Drop Tower	"small"
Simon Stevin	1585	Drop Tower	5×10^{-2}
Galileo Galilei	1590?	Pendulum, Drop Tower	2×10^{-2}
Isaac Newton	1686	Pendulum	1×10^{-3}
Friedrich Wilhelm Bessel	1832	Pendulum	2×10^{-5}
Southerns	1910	Pendulum	5×10^{-6}
Zeeman	1918	Torsion balance	3×10^{-8}
Loránd Eötvös	1922	Torsion balance	5×10^{-9}
Potter	1923	Pendulum	3×10^{-6}
Renner	1935	Torsion balance	2×10^{-9}
Dicke, Roll, Krotkov	1964	Torsion balance	3×10^{-11}
Braginsky, Panov	1972	Torsion balance	1×10^{-12}
Shapiro	1976	Lunar Laser Ranging	1×10^{-12}
Keiser, Faller	1981	Fluid support	4×10^{-11}
Niebauer, et al.	1987	Drop Tower	1×10^{-10}
Heckel, et al.	1989	Torsion balance	1×10^{-11}
Adelberger, et al.	1990	Torsion balance	1×10^{-12}
Baeßler, et al. ^[15]	1999	Torsion balance	5×10^{-13}
Adelberger, et al. ^[16]	2006	Torsion balance	1×10^{-13}
Adelberger, et al. ^[17]	2008	Torsion balance	3×10^{-14}
MICROSCOPE ^[18]	2017	Satellite orbit	1×10^{-15}

L'eguaglianza tra massa gravitazionale attiva e passiva è quindi una conseguenza delle leggi fondamentali di Newton.

L'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale è invece un fatto puramente empirico in fisica classica, misurato con una precisione di 10^{-15}



Il «Principio di Mach»



Mach nel 1893 formulò la seguente ipotesi (successivamente denominata da Einstein «Principio di Mach»): «L'inerzia di ogni sistema è il risultato dell'interazione del sistema stesso con il resto dell'universo.»

Egli immaginava infatti che in universo vuoto, per un osservatore sarebbe impossibile determinare se un corpo fosse in moto rettilineo uniforme o accelerato. Secondo Mach, la forza di inerzia che agisce sui corpi in un riferimento accelerato è prodotta dall'interazione con tutti gli altri corpi dell'universo la cui massa è complessivamente molto superiore a quella di qualunque oggetto vicino.

Torniamo all'idea di inerzia come «forza reale»?

Il «Principio di Mach»

Il principio di Mach è considerato tuttavia vago (Herman Bondi per esempio fornisce 10 formulazioni diverse del principio). Einstein credeva che la teoria della Relatività Generale inglobasse il principio di Mach, tuttavia si conoscono soluzioni non «machiane» delle equazioni di Einstein (un esempio è l'«Universo rotante» di Gödel).

Vari tentativi sono stati effettuati per inglobare il principio di Mach nella relatività generale. Un esempio è la teoria di Brans-Dicke in cui l'inverso della costante di gravitazione universale $1/G$ viene sostituito da un campo ϕ che può variare nello spazio e nel tempo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}^M \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi} (T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^\phi)$$

Il campo ϕ soddisfa a sua volta un'equazione di campo. Queste equazioni dipendono da un parametro ω , per $\omega \rightarrow \infty$ si riottiene la Relatività Generale di Einstein. Al momento esiste un limite inferiore a ω ricavato dalle misure di precisione sulla traiettoria della sonda Cassini-Huygens, $\omega > 40000$.

Massa «anisotropa»?

Un'altra possibilità in accordo con il principio di Mach è che l'inerzia dipenda dalla direzione, per esempio rispetto al centro della via lattea dove vi è concentrata la maggior parte della massa. In tal caso la massa cesserebbe di essere uno scalare ma diventerebbe un tensore

$$F_i = m_{ij} \frac{dx^j}{dt}$$

Se l'elemento diagonale corrispondente all'asse principale nella direzione del centro galattico viene assunto come $m + \Delta m$, (con m traccia della matrice m_{ij}) il contributo $\Delta m/m$ può essere stimato sulla base di una formulazione quantitativa del principio di Mach. Cocconi e Salpeter assumono che questo contributo sia dipendente da M/r^k , con M massa che induce l'inerzia, r distanza da essa. A seconda del valore di k è possibile trovare valori di $\Delta m/m$ dell'ordine di $10^{-11} \sim 10^{-7}$. Tuttavia le misure più recenti pongono un limite su $\Delta m/m$ dell'ordine di 10^{-34} .

Il concetto «elettromagnetico» di massa

Alla fine del IXX secolo si fece strada l'ipotesi che la massa fosse un effetto puramente elettromagnetico. Il primo ad avanzare questa ipotesi fu Thomson. Egli infatti notò che per le equazioni di Maxwell il campo elettrico intorno ad una sfera carica genera un campo magnetico. Vi è quindi un campo elettromagnetico che circonda la sfera il quale trasporta una certa quantità di energia. Ne deriva che per mettere in moto la sfera bisogna fornire una quantità extra di energia che può essere interpretata come l'effetto di una massa effettiva extra

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(m + \mu)v^2, \quad \mu = \frac{4}{15} \frac{e^2}{rc^2}$$

con r raggio della sfera. Il risultato non era tuttavia corretto a causa di una assunzione errata. Heavyside raffinò il conto portando ad un risultato leggermente diverso

$$\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{rc^2}$$

Per Heavyside questo fenomeno era fisicamente significativo tanto da chiamarlo «forza di inerzia elettrica»

Il concetto «elettromagnetico» di massa

I lavori di Thomson e Heavyside portarono molti fisici a ritenere che riteneva le leggi dell'elettromagnetismo di Maxwell più fondamentali di quelle meccaniche di Newton. Uno dei più entusiasti fu Wien il quale pensava di poter derivare le leggi della meccanica da quelle dell'elettromagnetismo. Egli calcolò la massa effettiva di un ellissoide carico con energia a riposo U_0 trovando il valore

$$\mu = 4U_0/3c^2$$

Successivamente Abraham, facendo uso del teorema di Poynting mostrò che un elettrone che si muove con velocità $\mathbf{v}$ possiede una quantità di moto pari a

$$\mathbf{p} = \frac{4U_0}{3c^2} \mathbf{v}$$

Questi risultati sono validi solo per basse velocità $v \ll c$. Come si vede la massa effettiva elettromagnetica differisce da quella prevista dalla teoria di Einstein ($m=U_0/c^2$). Questa discrepanza è stata affrontata da diversi fisici (quali Fermi, Dirac e Schwinger). Una spiegazione euristica è che la carica deve possedere uno «sforzo interno» per rimanere stabile il quale dà un contributo negativo esattamente pari a $-1/3 U_0/c^2$

Il concetto «elettromagnetico» di massa

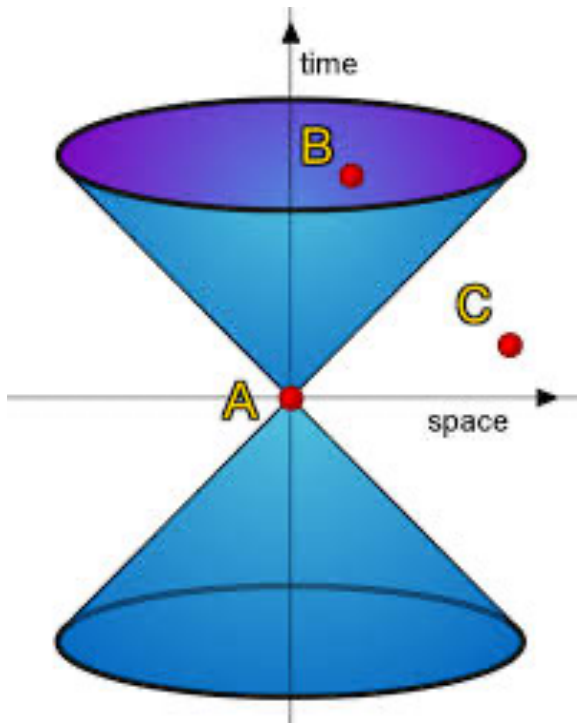
Per velocità prossime a quelle della luce, oltre a dipendere dal rapporto $\beta=v/c$, l'elettrone acquisterebbe anche una massa effettiva «trasversa». Gli esperimenti di Kaufmann sembravano confermare l'esistenza di tale massa trasversa (successivamente si provò che questa era compatibile con la dinamica relativistica dell'elettrone) tanto da far ritenere che la massa dell'elettrone fosse di natura puramente elettromagnetica. Poiché all'epoca

L'entusiasmo per questa teoria andò però rapidamente diminuendo quando ci si rese conto che non poteva essere generalizzata agli altri costituenti della materia oltre che agli elettroni.

Sebbene questa teoria sia stata abbandonata, è interessante notare come per la prima volta la «materia» per la prima volta sia stata privata della sua natura intrinseca di «massa sostanziale». Il concetto di massa elettromagnetica è stato una delle prime teorie di campo nel senso moderno della parola.

In un certo senso «la materia non fa quella che fa perché è quello che è, ma è quello che è perché fa quello che fa»

Il concetto relativistico di massa

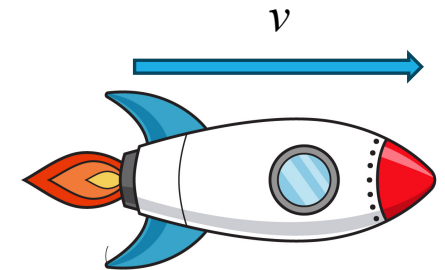
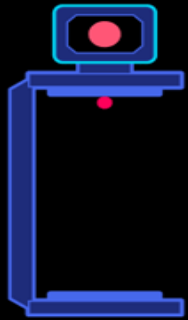


Nel 1905 Einstein formulò la sua teoria della «relatività speciale» in cui oltre a supporre l'invarianza delle leggi della Fisica rispetto a sistemi di riferimento inerziali in moto relativo l'uno rispetto all'altro ipotizzava che la velocità della luce fosse anche essa un invariante.

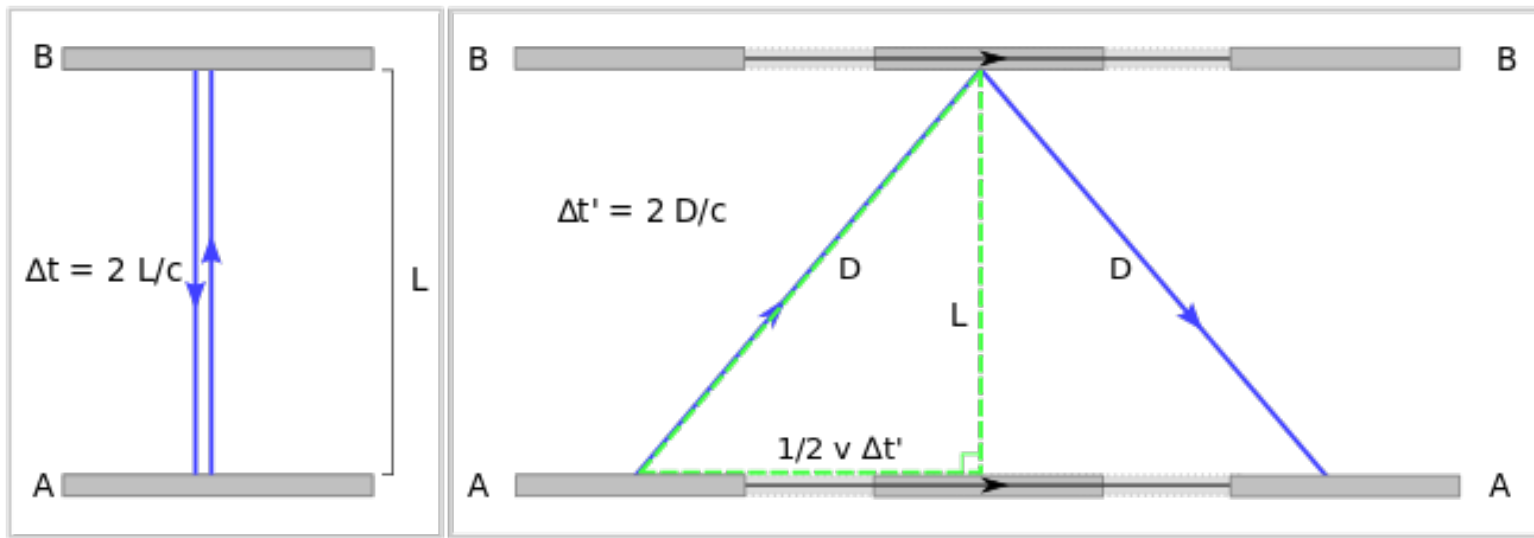
Questa richiesta porta a delle conseguenze rivoluzionarie. In particolare non esiste più un tempo e uno spazio assoluto ma questi dipendono dall'osservatore.

Un'altra conseguenza è che la massa «dinamica» dipende dalla velocità...

L'«orologio a luce»

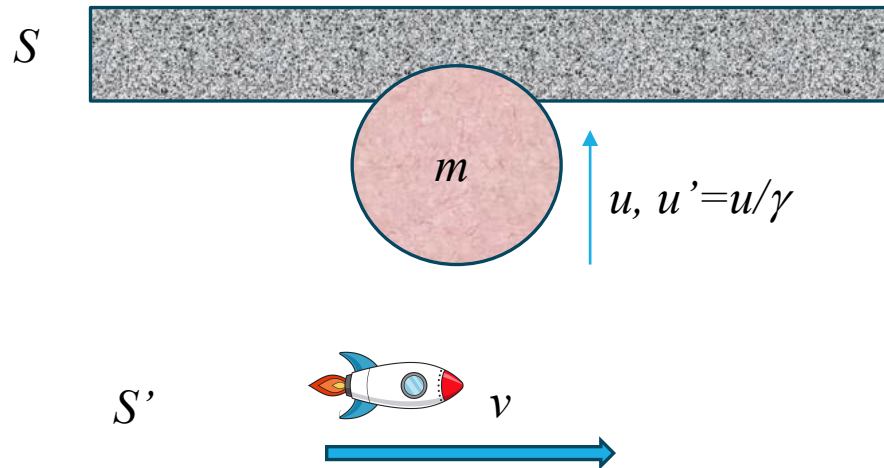


Dilatazione dei tempi



$$\Delta t' = \frac{2D}{c} = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2}}{c} \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t / \gamma$$

L'«incremento relativistico» della massa



(Lewis-Tolman)

Nel sistema «a riposo» S l'urto avviene in un tempo Δt

Nel sistema S' l'urto avviene in un tempo $\Delta t' = \Delta t/\gamma$, ovvero come se la velocità della palla fosse rallentata di un fattore $1/\gamma$. Tuttavia la profondità del foro essere uguale in entrambi i sistemi. Questo può essere spiegato soltanto supponendo che la q.d.m. della palla sia uguale nei due sistemi di riferimento. Questo equivale a supporre che la massa della palla nel sistema di riferimento S' sia «aumentata» di un fattore γ .

$$m' = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le equazioni relativistiche del moto

Nel 195 Einstein nel suo celebre trattato «sull'elettrodinamica dei corpi in movimento» arrivò alla stessa conclusione. Egli quindi ipotizzò che la II legge di Newton dovesse essere modificata come

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

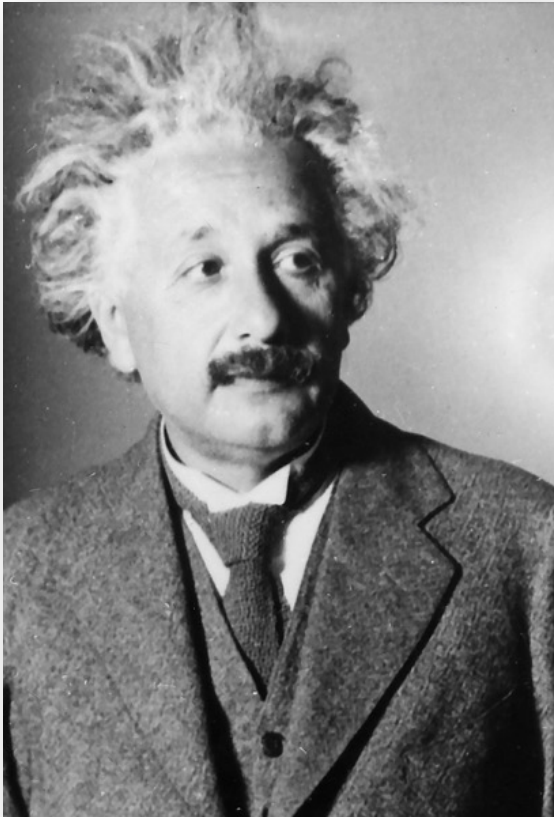
A rigore, sviluppando la derivata nell'equazione precedente, la massa «dinamica» non è più uno scalare ma un tensore

$$F_i = m_{ij} \frac{dv_j}{dt} = m \gamma \left(\delta_{ij} + \gamma^2 \frac{v_i v_j}{c^2} \right) \frac{dv_j}{dt}$$

Gli assi principali di questo tensore sono quelli paralleli e perpendicolari alla velocità $\mathbf{v}$ con autovalori

$$m_{\parallel} = \gamma^3 m, \quad m_{\perp} = \gamma m$$

Massa relativistica?



Dobbiamo però far notare che il concetto di «massa dinamica» (o «relativistica») è fuorviante e andrebbe evitata (un concetto aborrito dallo stesso Einstein). La dipendenza funzionale della quantità di moto dalla velocità è una conseguenza della cinematica relativistica, non una nuova proprietà della materia. L'unica «massa» che ha significato fisico è la «massa a riposo» (o massa propria o massa invariante) della particella.

Notiamo che (contrariamente ad una credenza diffusa) la massa gravitazionale non cresce come la massa relativistica. In verità per velocità prossime a quelle della luce la formula di Newton non è più valida e occorre utilizzare le equazioni della Relatività Generale per stabilire il moto di un grave (in particolare la «forza» in generale non è più diretta verso la congiungente dei due corpi).

Massa ed energia

Il primo a scrivere la relazione $E=mc^2$ fu... Poincaré, nel 1900 (5 anni prima di Einstein), tuttavia basandosi su di un ragionamento euristico errato. Egli basandosi sulla teoria di Maxwell la quale prevede che un'onda elettromagnetica trasporta una quantità di moto $p=E/c$, dalla relazione $p=mv$, con $v=c$ egli deduceva la relazione tra massa ed energia. La cosa tuttavia non ha senso poiché un'onda elettromagnetica (un fotone) non ha massa!

Nel 1905 Einstein ripropose la famosa formula di equivalenza tra massa ed energia raffinando il ragionamento di Poincaré ma anche egli commise un errore nel suo ragionamento!



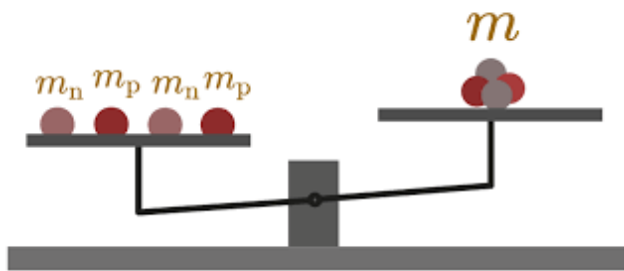
Massa ed energia

E' possibile ricavare l'energia di una particella semplicemente ragionando come nel caso classico

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = \dots = \Delta \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta E$$

da cui è immediata l'identificazione $E=\gamma mc^2$. Tale quantità è chiamata «energia totale» del corpo. Per $v=0$ otteniamo la relazione $E=mc^2$ («energia a riposo»). Questo però non mostra davvero l'equivalenza tra massa ed energia (poiché possiamo semplicemente ridefinire l'energia cinetica $E_k=E-mc^2$). Questa può essere in effetti dimostrata in un sistema relativistico di punti materiali ponendosi nel centro di massa del sistema (inteso come quello in cui la somma delle q.d.m. delle particelle si annulla). In tal caso l'energia a riposo del sistema di particelle è la somma delle energie totali delle particelle stesse ed è quindi maggiore della somma delle masse delle particelle stesse!

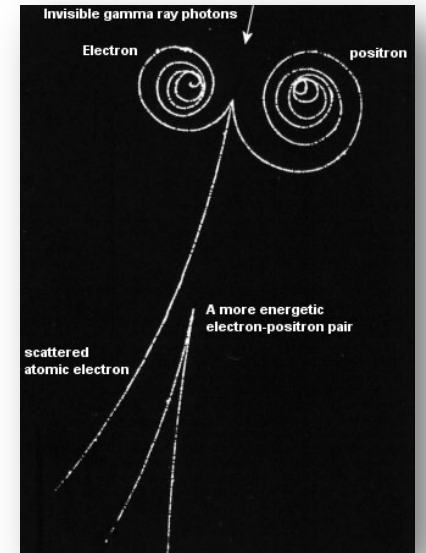
Massa ed energia



La situazione precedente vale anche nel caso di forze attrattive di legame tra le particelle. In tal caso le energie potenziali di legame sono negative e superano in valore assoluto quelle cinetiche per cui il sistema di particelle ha una massa inferiore alla somma delle masse del sistema. Questo è particolarmente evidente nei nuclei atomici in cui la massa del nucleo è sempre minore della massa dei nucleoni costituenti («difetto di massa»).

La conversione di energia in materia fu infine dimostrata in maniera spettacolare da Occhialini e Blackett nel 1933 tramite il processo $\gamma \rightarrow e^+e^-$ in una camera a bolle.

La massa e l'energia diventano così un'unica entità che si presenta talvolta in una forma talvolta nell'altra. Perché allora la materia non si converte spontaneamente in energia? A questa domanda la relatività non può dare risposta. Occorre entrare nel reame della meccanica quantistica...



La massa in meccanica quantistica

In Meccanica Quantistica non-relativistica la massa appare in qualche modo come un concetto «spurio». Infatti in MQNR una quantità osservabile è legata ad un operatore hermitiano, tuttavia non esiste nessun «operatore massa». Essa appare come parametro nell'operatore hamiltoniano nell'equazione di Schrödinger descrivente l'evoluzione della funzione d'onda

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathcal{H}} \psi(\mathbf{x}, t) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

L'unico collegamento con il concetto classico di massa è attraverso il teorema di Ehrenfest: I valori medi delle osservabili quantistiche seguono le leggi del moto classiche. In particolare

$$m \frac{d^2 \langle \mathbf{x} \rangle}{dt^2} = -\langle \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad \langle \mathbf{x} \rangle = \int \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3 \mathbf{x}$$

Riotteniamo così la II legge di Newton (e quindi all'inerzia) seppure «in media».

La massa in meccanica quantistica

In Meccanica Quantistica Relativistica (MQR) e in teoria di campo di seconda quantizzazione la massa si lega al concetto di energia. In questa teoria le particelle diventano semplicemente «eccitazioni di campo» (alla stregua di oscillatori armonici quantizzati). La massa (ovviamente moltiplicata per c^2) rappresenta l'energia minima per una singola eccitazione rispetto all'«energia dello stato di vuoto». Tuttavia il valore di m per una particella rimane ancora un parametro arbitrario e indeterminato che deve essere misurato sperimentalmente.

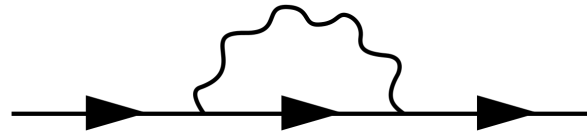
In MQR vi è inoltre una interessante conseguenza: l'esistenza di «antiparticelle» ovvero particelle simili a quelle ordinarie ma con le cariche invertite. Esse devono avere necessariamente la stessa massa delle particelle a causa di una simmetria fondamentale (CPT). Esperimenti al CERN cercando di stabilire se l'antimateria ha lo stesso comportamento della materia in un campo gravitazionale. Gli esperimenti non sono ancora conclusivi.



$$(\not{\partial} + m)\psi = 0$$

La «self-energia»

In teoria quantistica di campo (QFT) una particella carica può acquistare una «self-energia» dall'interazione con il campo da esso stesso creato, tecnicamente da diagrammi di Feynman di questo tipo



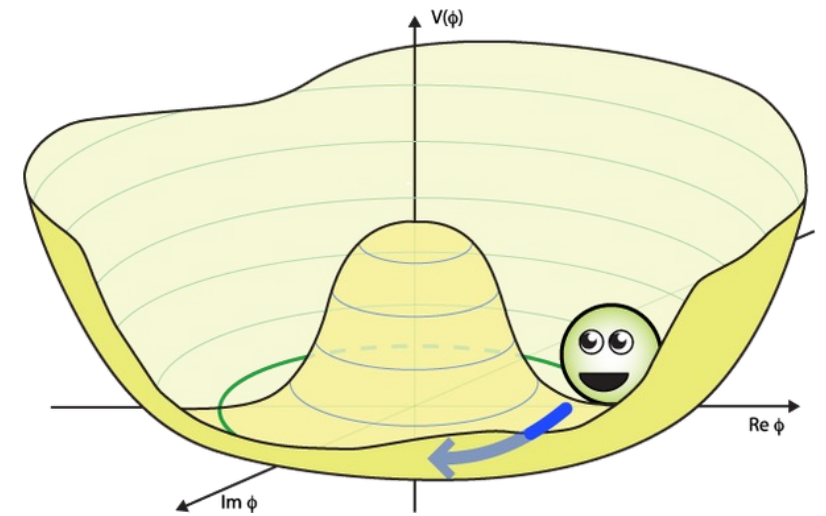
Questa self-energia porta ad una correzione della massa rispetto alla «massa nuda» m_0 della particella

$$mc^2 \simeq m_0 c^2 \left[1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left(3 \log \frac{\mu^2}{m_0^2} + \frac{3}{2} \right) \right]$$

dove $\alpha \cong 1/137$ è detta «costante di struttura fine» e μ è una scala di «cutoff». Tale scala è sostanzialmente incognita, così come la massa nuda. In pratica m è la massa che viene misurata ed è quella attribuita alla particella. Si ritorna in parte all'idea classica in cui la massa è generata dal campo stesso...

Il meccanismo di Brout-Englert-Higgs

Nelle moderne teorie delle interazioni fondamentali le particelle sono assunte in principio senza massa, per preservare delle simmetrie. In queste teorie (in particolare il *Modello Standard*) vi è la presenza di un campo scalare ϕ (detto campo di Higgs) in cui il minimo di energia non corrisponde alla fase simmetrica (in cui $\phi = 0$) ma ad una situazione in cui $\phi \neq 0$. In pratica vi sarebbe un campo di Higgs costante che permea tutto l'Universo! Le oscillazioni intorno al minimo di questo campo rappresenterebbero i bosoni di Higgs osservati al LHC.



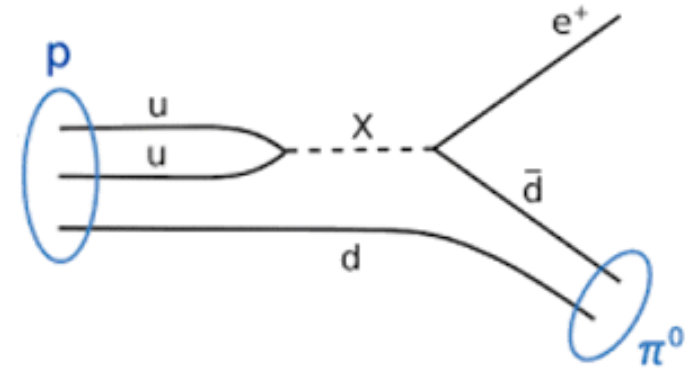
La massa delle particelle (tranne quella del fotone e dei gluoni) è invece dovuta alla continua interazione di queste con il campo di Higgs. Alcune particelle (come i neutrini) potrebbero «prendere massa» da altri meccanismi più complessi. Al momento non esiste ancora una teoria convincente che «preveda» le masse delle particelle elementari (leptoni o quark) le quali rimangono ancora dei parametri sperimentali.

Leggi di conservazione

Torniamo alla domanda del perché tutta la massa non si converta in energia. La risposta è che... è in parte ciò accade! Negli acceleratori o nei raggi cosmici si creano particelle instabili che decadono in particelle più leggere o in fotoni. Esistono però delle leggi di conservazione di alcuni numeri quantici che impediscono ad alcune particelle di decadere. Per esempio

- conservazione della carica elettrica
- del momento angolare
- del *numero barionico*

In particolare, l'ultimo numero quantico è quello responsabile della stabilità del protone e dei nuclei atomici (poiché il protone è il barione più leggero). Vi sono però teorie che prevedono che anche il numero barionico possa essere violato: questo ha come conseguenza che anche il protone è instabile e prima o poi tutta la materia conosciuta sparirà. Per il momento possiamo però stare tranquilli: nessun esperimento ha mai visto un protone decadere per cui la sua vita media è sicuramente maggiore di 10^{34} anni!



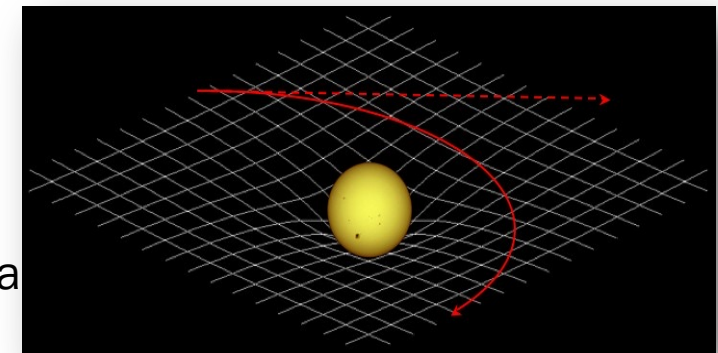
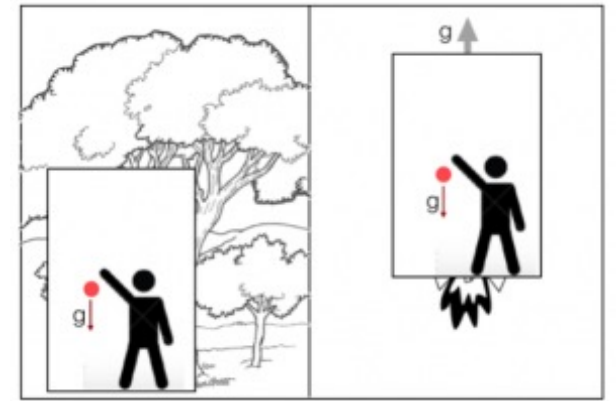
La massa in Relatività Generale

Nella relatività generale l'eguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale è assunta a principio primo. In particolare si assume il *principio di equivalenza forte*: «non è possibile, con nessun esperimento di fisica (che coinvolga anche esperimenti di tipo gravitazionale) stabilire se ci si trova in un sistema di riferimento accelerato o uno posto in un campo gravitazionale costante»

Le conseguenze di questo semplice principio sono molto profonde. In particolare si può interpretare un campo gravitazionale come una deformazione del tessuto spazio temporale descritto da un *tensore metrico* $g_{\mu\nu}(x)$ che lega l'elemento di linea infinitesimo (distanza spaziotemporale tra due punti vicino) è dato da

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

con $\mu, \nu = 0 \dots 3$ e $x^0 = ct$. Un corpo che si muove in campo gravitazionale segue una *geodetica*, ovvero la via «più breve» in questo spazio curvo.



Le equazioni del moto

Nella meccanica newtoniana un corpo non soggetto a forze soddisfa l'equazione $d^2\mathbf{x}(t)/dt^2=0$. In uno spaziotempo curvo questa equazione viene modificata nell'equazione della geodetica

$$\frac{D^2 x^\mu}{Ds^2} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

dove $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ è detta connessione affine e dipende dalla metrica. In quest'ottica il moto in un campo gravitazionale diviene nient'altro che la generalizzazione di un moto rettilineo uniforme. In presenza di una forza di tipo non gravitazionale tale equazione viene modificata come

$$m \frac{D^2 x^\mu}{Ds^2} = \mathcal{F}^\mu$$

Tale equazione generalizza la II equazione di Newton, m è la massa (inerziale e gravitazionale) del corpo. Tuttavia m assume il significato di massa gravitazionale «passiva». Come entra questa massa nella generazione di un campo gravitazionale?

Le equazioni di campo

Le equazioni che determinano il tensore metrico in funzione della sorgente sono le *equazioni di campo* di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

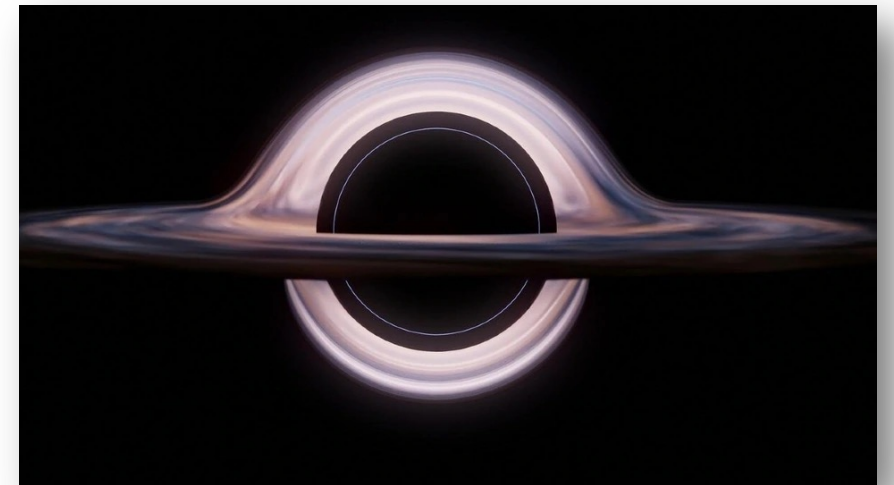
dove $R_{\mu\nu}$ è il *tensore di Ricci*, R lo *scalare di curvatura* (che dipendono dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde) mentre $T_{\mu\nu}$ è il tensore *impulso energia* della sorgente del campo (di tipo classico o quantistico). Quest'ultimo dipende non solo dalla massa dell'«oggetto» che genera il campo ma anche dall'energia e dall'impulso dello stesso. In relatività generale quindi qualunque sorgente di energia è sorgente di campo. Ne consegue che, mentre l'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale è assunto a principio non esiste una equivalenza ovvia tra massa gravitazionale attiva e passiva.

Questa equivalenza vale sicuramente nel limite di campi deboli e velocità $\ll c$ dove la RG restituisce sostanzialmente la teoria di Newton (con qualche correzione).

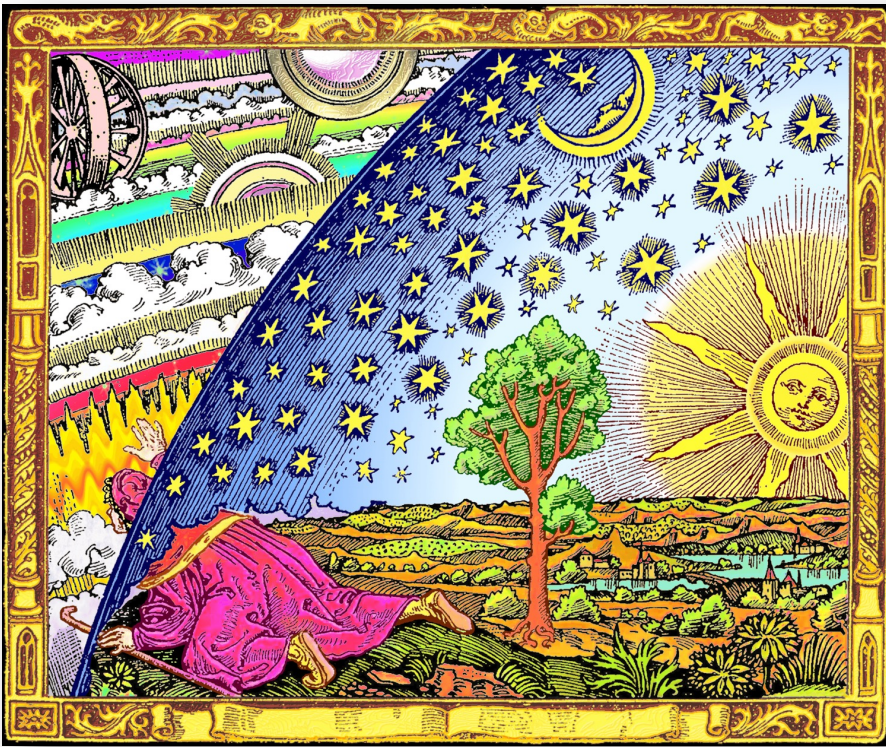
Massa gravitazionale attiva e passiva

La difficoltà di definire una massa gravitazionale «attiva» in maniera non ambigua e come questa sia legata a quella «passiva» è stato oggetto di studio da parte di molti fisici quali lo stesso Einstein, Nordström, Klein, Weil. Diversi approcci hanno mostrato la completa equivalenza tra massa gravitazionale attiva e passiva all'interno della relatività generale, sebbene non in maniera ovvia. Un approccio interessante fu dovuto ad Einstein e Infeld nel 1949: essi trattavano le particelle come «singolarità di campo» e ricavano le equazioni del moto partendo dalle equazioni di campo stesse.

A causa delle non linearità delle equazioni di Einstein sono infatti possibili soluzioni di «puro campo» o «singolarità»: essi sono i ben noti «Buchi Neri». Per il Teorema di Birkhoff essi producono lo stesso campo di una massa statica a simmetria sferica (almeno all'esterno di esso). Ne deriva che ad essi è possibile attribuire la stessa massa del corpo. Possono essere allora le particelle un qualche tipo di singolarità di campo?



«Teorie del tutto»



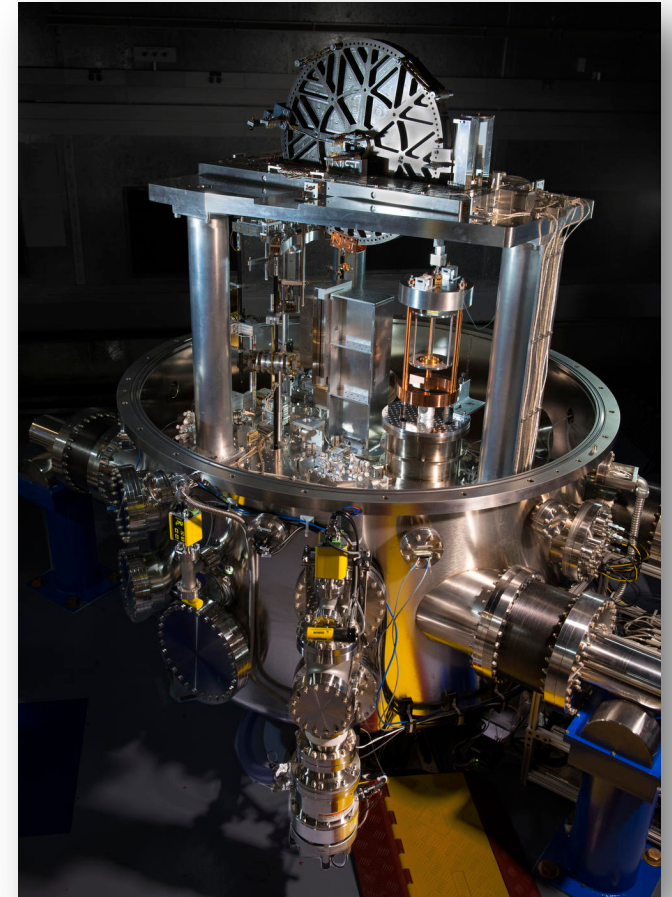
Da un punto di vista teorico il problema nasce soprattutto dal «matrimonio illegale tra l'artificiale tensore impulso energia e il tensore curvatura» secondo le parole dello stesso Einstein. Campo gravitazionale e sorgente di campo sono entità «sconnesse». Da un punto di vista rigoroso $T_{\mu\nu}$ deve essere considerato solo uno «strumento provvisorio» e solo una trattazione unificata di campo ha senso.

Probabilmente la vera comprensione di cosa sia la «massa» può venire da una teoria che unifichi la gravità con la meccanica quantistica e con le altre forze della natura.

Chilogrammo campione

Fino al 20 maggio 2019, era definito come la massa di un particolare cilindro di altezza e diametro di circa 4 cm di una lega di platino-iridio depositato presso l'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure a Sèvres, in Francia, chiamato anche *prototipo internazionale*. Il kg era l'unica tra le unità di misura SI rimasta definita in relazione a un manufatto, e non da una proprietà fisica.

Il *Bureau international des poids et mesures* ha stabilito che, dopo il 20 maggio 2019, il kg viene definito tramite una proprietà fisica correlata alla *costante di Planck* h la quale viene definita esatta: $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ Js. Per definire operativamente il kg si utilizza una bilancia di Kibble, un complesso strumento che converte la forza peso in una corrente che può essere misurata in funzione di h tramite l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico.



La Massa in versi

Nel vasto universo, un concetto raduna
La massa, entità misteriosa e luna.
È l'ammasso di materia, il peso che sfida,
La forza che governa ogni vita.

La massa è quantità, inerzia nel reame,
Attraverso la fisica, il suo nome si estende.
Una proprietà che dà forma e sostanza,
Ai corpi che popolano questa danza.

La massa è legge di gravità e movimento,
Determina la traiettoria nel suo intento.
Se pesante o leggera, influisce sulla trama,
Dell'universo e delle stelle che l'ama.

Dal microcosmo dell'atomo alla vastità del cosmo,
La massa conduce e governa ogni moto.
Attrazione e repulsione, bilancia invisibile,
Guida i pianeti e gli astri in un balletto indiscutibile.

La massa è energia che si trasforma,
In onde e particelle che l'universo conforma.
Attraverso la formula di Einstein ci svela,
Che la massa e l'energia sono parenti in questa tela.

Così la massa, con il suo impatto profondo,
Regge le fondamenta del mondo,
Un concetto che sfida e affascina,
L'anima dell'universo che ci illumina.