

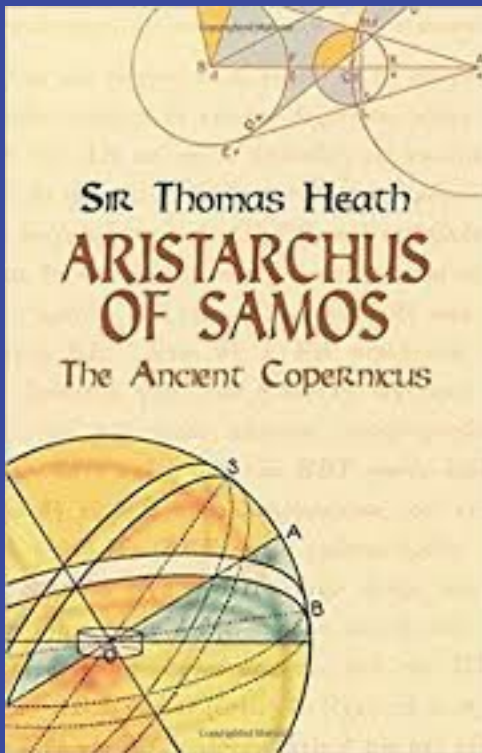
A vibrant cosmic background featuring a deep blue and purple space filled with numerous stars, nebulae, and galaxies. A prominent spiral galaxy is visible on the right side, and a bright, glowing nebula is on the left. In the lower foreground, the curved horizon of the Earth is visible, showing a blue sky and white clouds. The overall scene is a stunning representation of the universe's vastness and beauty.

A.A.Nucita Le misure dell'Universo

https://www.youtube.com/watch?v=mE_DfRw2lXQ

Mettere tutto nelle giuste proporzioni

Considerare il contesto entro il quale avviene una scoperta scientifica

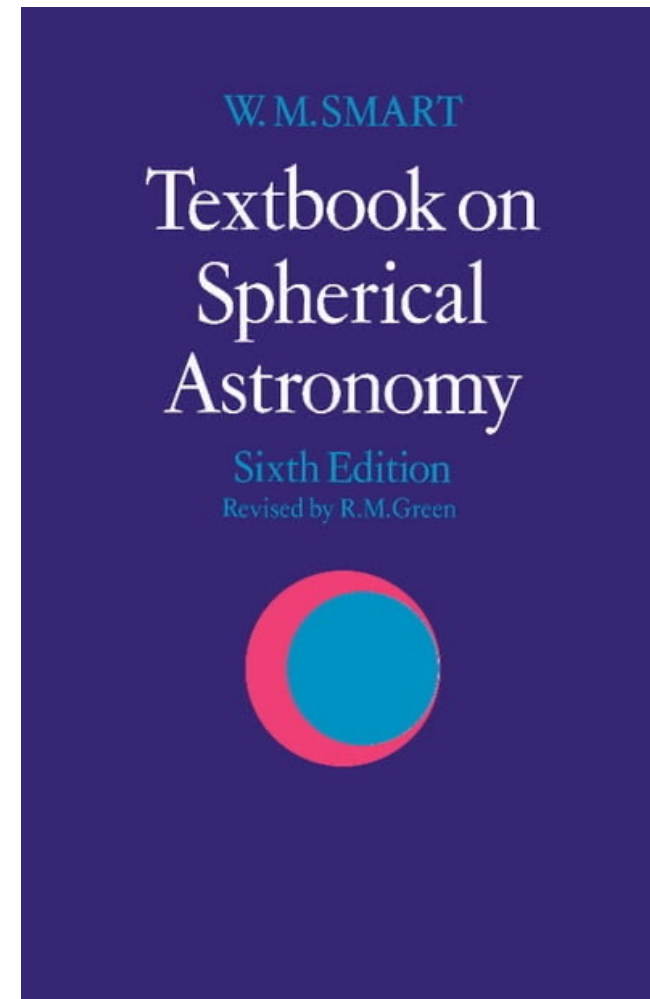
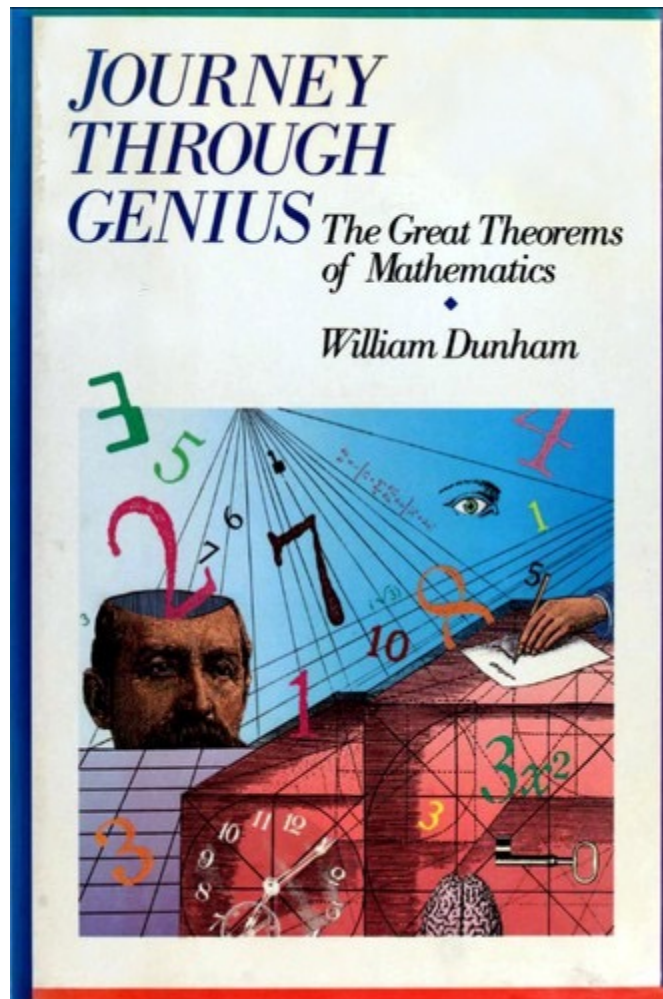


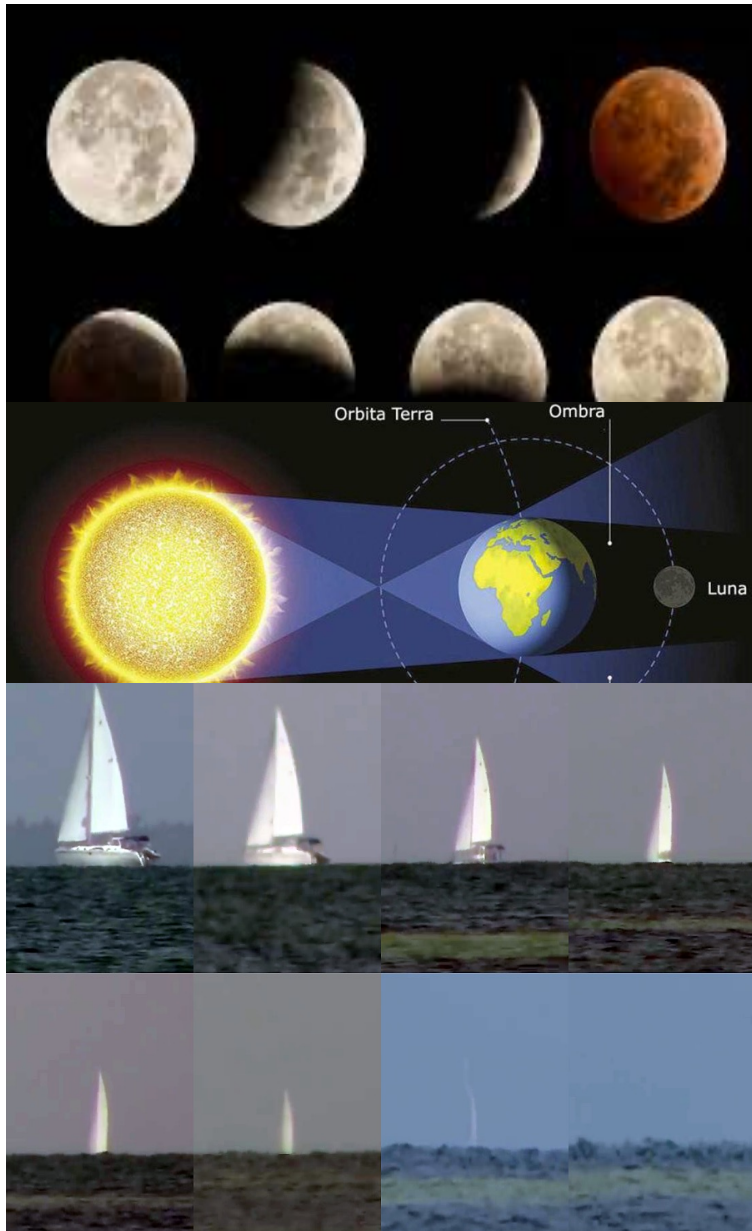
L'Ellenismo si fa iniziare nel 323 a.C. con la dissoluzione dell'impero di Alessandro Magno in un certo numero di regni. Alla scienza ellenica non contribuirono solo i greci abitanti delle regioni dell'impero originale di Alessandro ma anche delle città greche autonome (Rodi, Siracusa, Marsiglia...)

La scienza ellenica esplode ad Alessandria d'Egitto tra il IV e il III secolo a.C.

Decade rapidamente nel II secolo a.C.

L'ultimo scienziato fu Diofanto (vissuto in epoca incerta tra il I e il IV secolo d.C.) e si assume terminare nel 415 d.C. con la morte della matematica Ipazia.





La misura delle lunghezze astronomiche: **Il raggio della Terra**

- Con buona pace dei terrapiattisti, sappiamo che la Terra è sferica almeno dal 278—194 a.C. grazie a Eratostene.

Cerchiamo di ricostruirne il pensiero in chiave moderna.

Le osservazioni mostrano che:

- *1) La Terra appare curva*
- *2) La Terra proietta un'ombra circolare sulla Luna durante un'eclisse*

Spigolature...geometriche!

Servono cerchi, poligoni regolari e triangoli

Archimede (circa 225 a.C.)

Teorema:

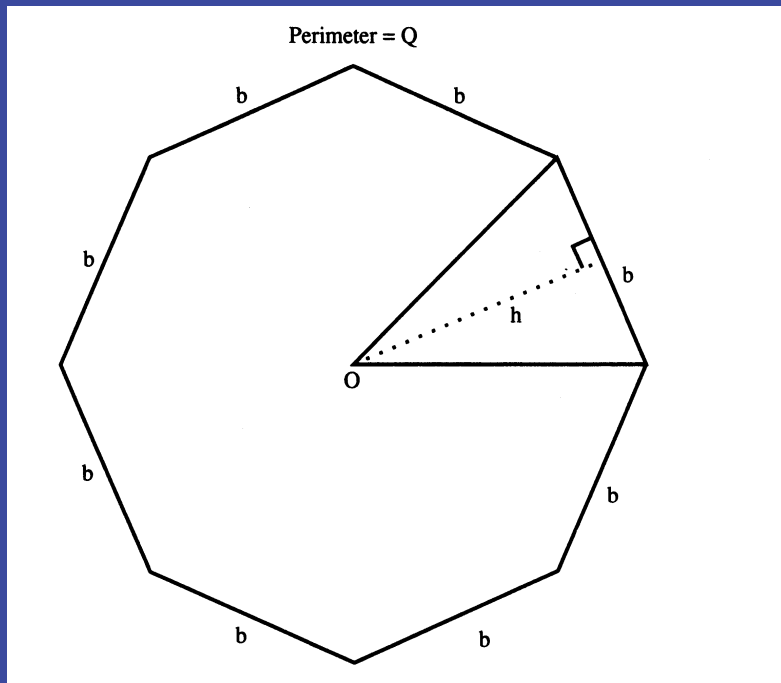
L'area di un poligono regolare di n lati, ciascuno di lunghezza b ha area

$$A_p = \frac{1}{2} a * P$$

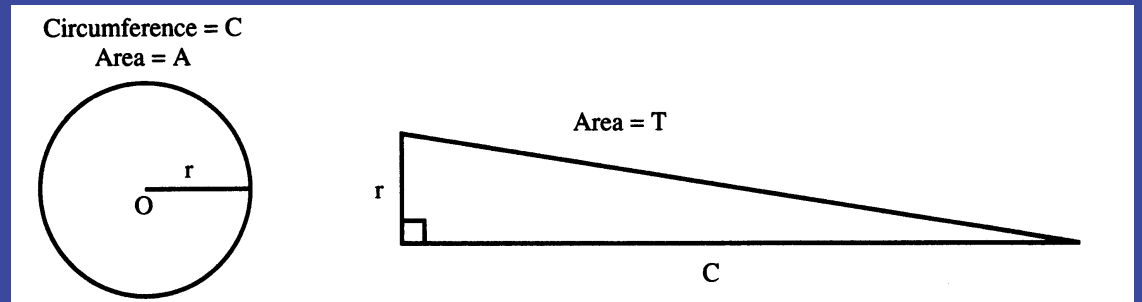
Teorema:

L'area di un cerchio è uguale all'area di un triangolo rettangolo la cui altezza è uguale al raggio del cerchio e la base è uguale alla lunghezza della circonferenza.

$$A = \frac{1}{2} R 2\pi R$$
$$C = 2\pi R$$



$$A_p = \frac{1}{2} a * P$$



Archimede lo dimostra con un procedimento di riduzione all'assurdo

Sia A l'area del cerchio e T l'area del triangolo. Vogliamo dimostrare che

$$A = T = \frac{1}{2} R 2\pi R = \pi R^2$$

$A < T$?

$A = T$?

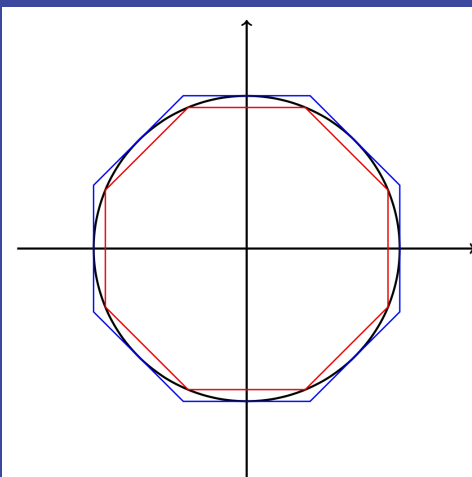
$A > T$?

Rimane da calcolare il valore della costante. Archimede nota che:

Aumentando il numero dei lati, i perimetri si avvicinano quanto si vuole alla lunghezza della circonferenza. In termini moderni possiamo dire che la lunghezza della circonferenza è il limite dei perimetri dei poligoni regolari, inscritti o circoscritti, al crescere del numero dei lati.

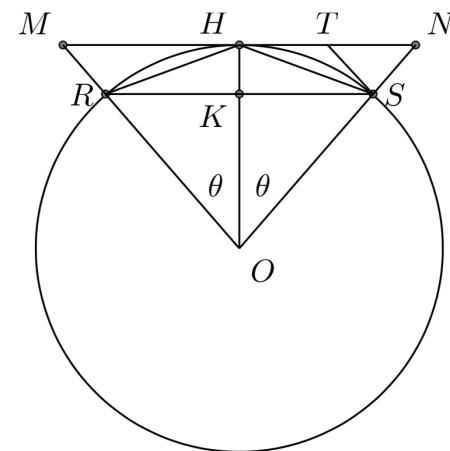
Proposizione:

Il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante



$$a_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{2n} = \sqrt{b_n a_{2n}}$$



$$a_6 = 4\sqrt{3}R, b_6 = 6R.$$

Segue l'algoritmo fino al passo 5 (corrispondente ad un poligono di 96 lati) e determina il valore della costante

$$3.140845 < \pi < 3.142852$$

N Le equazioni

$$\begin{aligned}\cos \psi' \cos \theta' &= \cos \psi \cos \theta, \\ \sin \psi' \cos \theta' &= \sin \psi \cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi, \\ \sin \theta' &= -\sin \psi \cos \theta \sin \chi + \sin \theta \cos \chi\end{aligned}$$

sono utili per poter passare tra diversi sistemi di coordinate (come ad esempio i sistemi di riferimento altazimutale ed equatoriale tipici dell'astronomia) fissati su di una sfera.

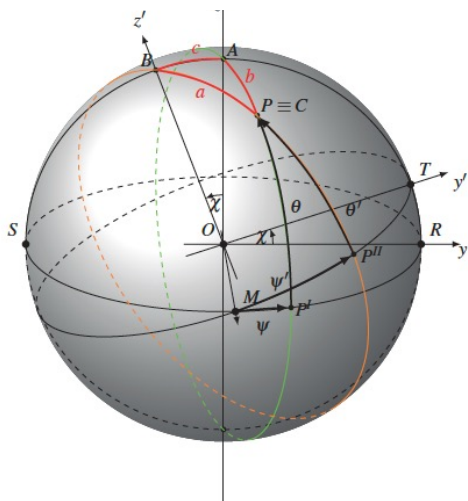


Figura 1.6: Trasformazioni di coordinate sferiche per una rotazione in senso anti-orario di un angolo χ intorno all'asse $x \equiv x'$.

N Il sistema di equazioni del gruppo di Gauss

$$\begin{aligned}\sin B \sin a &= \sin A \sin b \\ \cos B \sin a &= -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c, \\ \cos a &= \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c\end{aligned}$$

e l'equazione delle quattro parti

$$\cos a \cos c = \sin a \cot b - \sin c \cot B \quad (1.24)$$

costituiscono gli strumenti essenziali per affrontare qualsiasi problema di astronomia sferica.

Spigolature...astronomiche!

Ponendo...

$$\begin{aligned}\psi &= 90^\circ - HA, & \theta &= \delta \\ \psi' &= 90^\circ - A, & \theta' &= a, & \chi &= -(90^\circ - \varphi)\end{aligned}$$

Si ottengono le

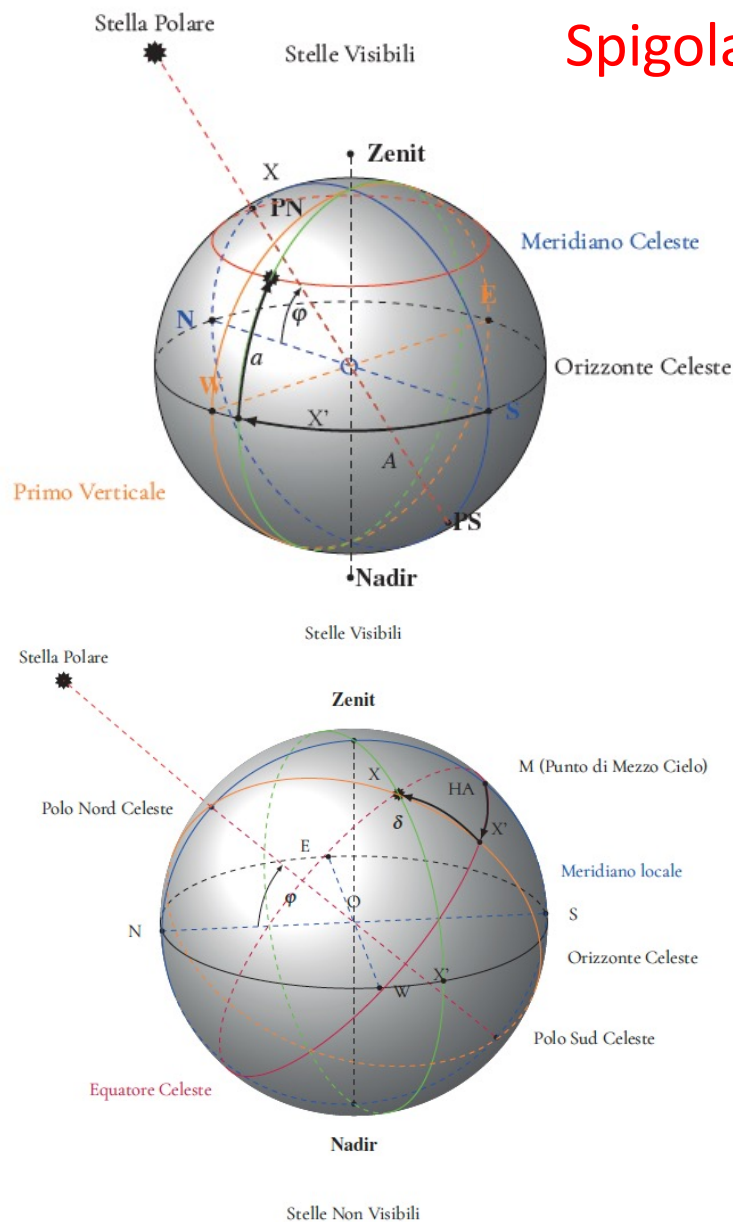
$$\begin{aligned}\sin A \cos a &= \sin HA \cos \delta, \\ \cos A \cos a &= \cos HA \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi, \\ \sin a &= \cos HA \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi.\end{aligned}$$

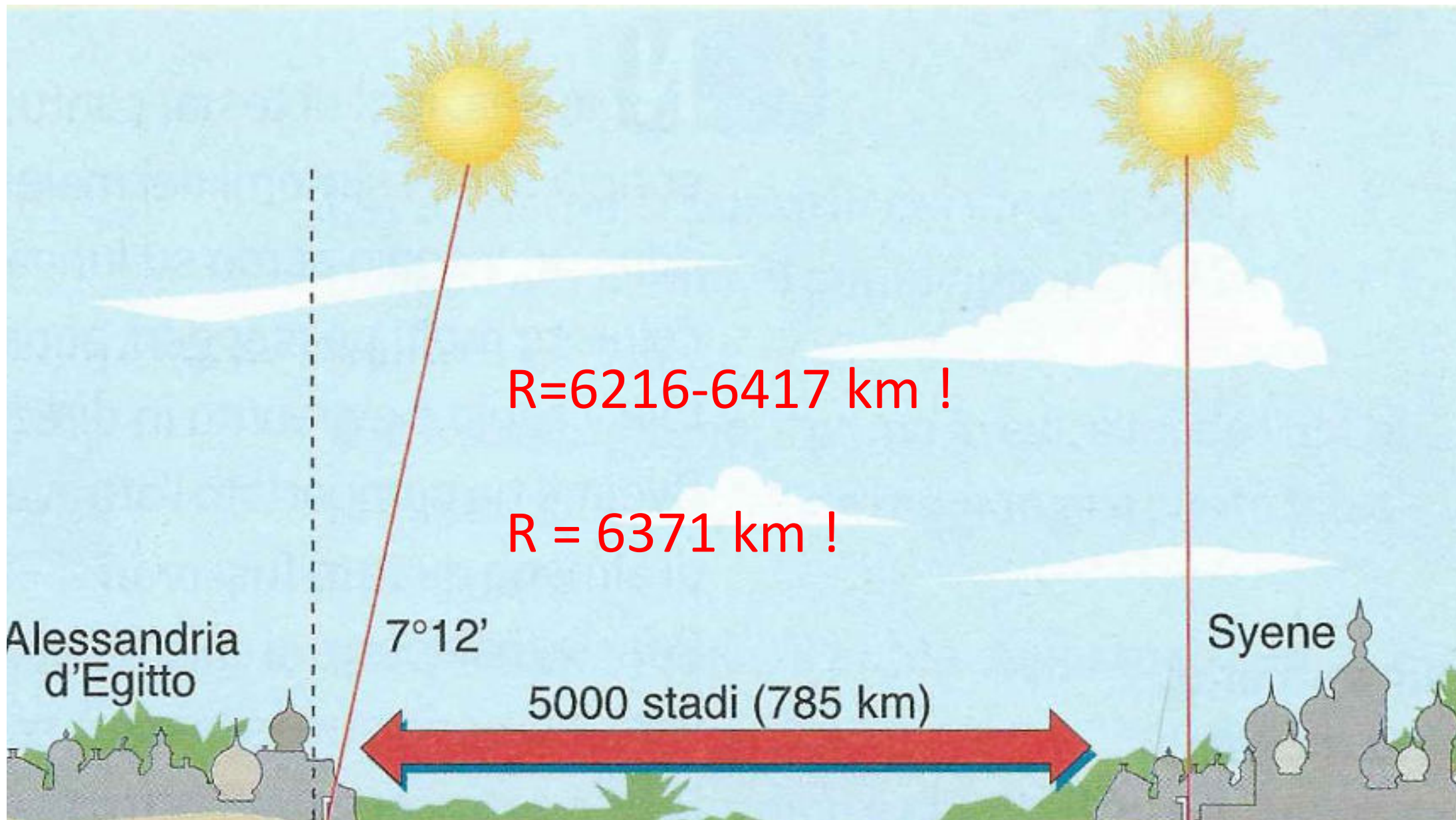
Se un astro come il Sole deve culminare allo Zenit

$$HA = 0 \quad \sin a = 1$$

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = 1$$

$$\cos(\delta - \varphi) = 1, \text{ da cui } \delta = \varphi$$





$R = 6216 - 6417 \text{ km !}$

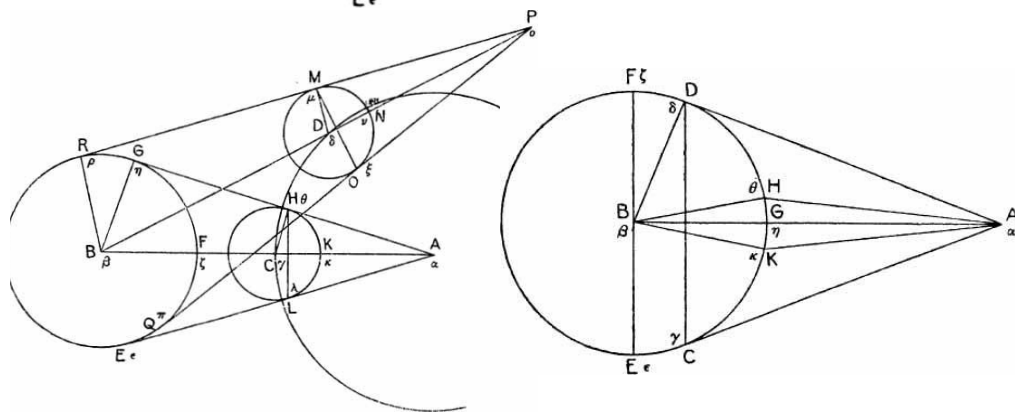
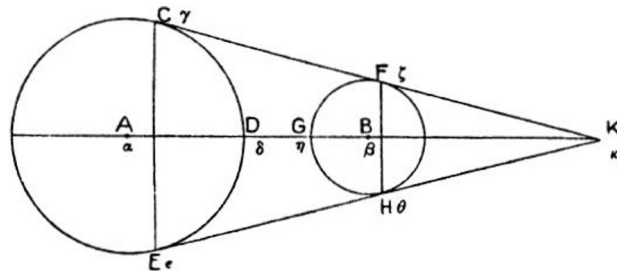
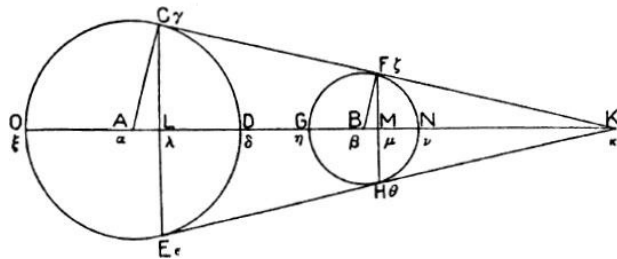
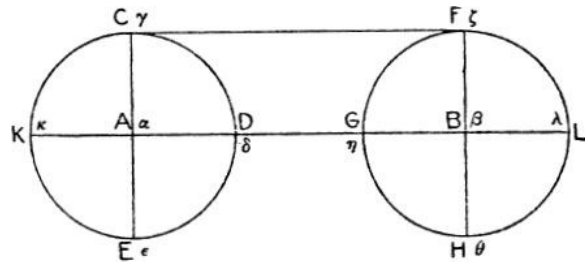
$R = 6371 \text{ km !}$

La misura delle **lunghezze** astronomiche: **Rapporti tra distanze e raggi di Sole e Luna (< 1AU)**

Aristarco da Samo (310 – 270 a.C) in «Sulla distanza e dimensione del Sole e della Luna)

- 1) La Luna riceve la luce dal Sole
- 2) La Terra è il punto intorno al quale ruota la Luna
- 3) Quando la Luna appare dimezzata, il cerchio che divide la regione luminosa da quella buia e' quasi un cerchio massimo. Il piano che lo contiene è nella direzione del nostro occhio (ovvero noi siamo nello stesso piano)
- 4) Lo «spessore» dell'ombra terrestre è pari a due Lune
- 5) La Luna sottende un angolo che è la quindicesima parte di un segno (zodiacale)
- 6) La Luna e il Sole sottendono un uguale angolo.
- 7) Il diametro del Sole sta al diametro della Terra più del rapporto di 19 a 3 ma meno del rapporto di 43 a 6

Spigolature...geometriche!



Proposizione 1

Due sfere uguali sono contenute nello stesso cilindro e due sfere disuguali da uno stesso cono che ha il vertice in direzione della sfera minore; La retta tracciata attraverso i centri delle sfere è ad angoli retti a ciascuno dei cerchi in cui la superficie del cilindro, o del cono, tocca le sfere.

Proposizione 2

Se una sfera è illuminata da una sfera maggiore (uniformemente irradiante) la porzione illuminata è maggiore di una semisfera

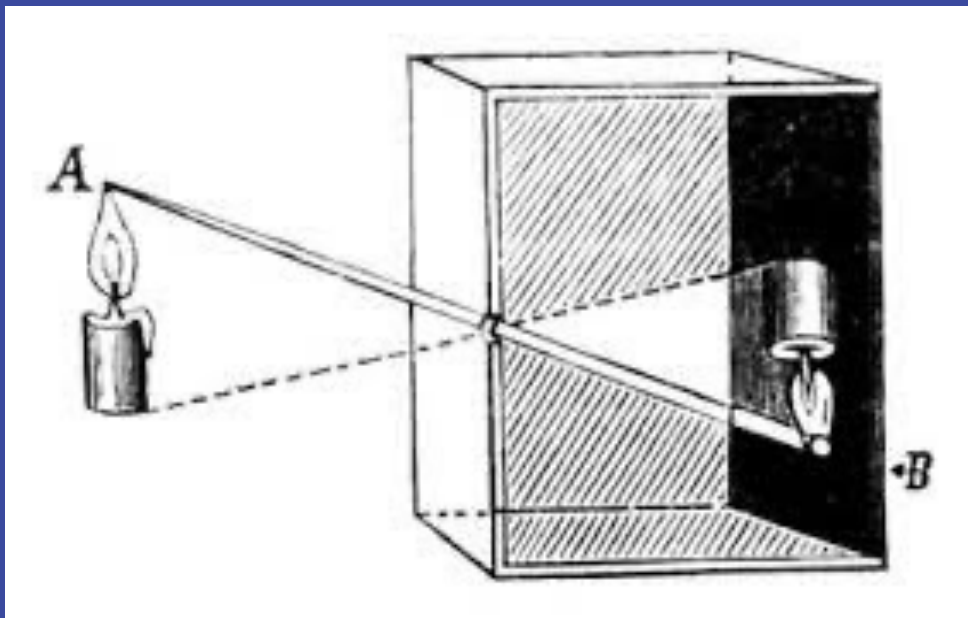
Proposizione 3

Il cerchio che divide la regione luminosa da quella buia è minimo se il cono che contiene Sole e Luna ha il vertice nel nostro occhio (in A)

Proposizione 4

Il cerchio terminatore non è percettibilmente differente da un cerchio massimo.

Durante un'eclisse solare, la Luna può oscurare completamente il disco del Sole. Ne segue che i diametri angolari di Sole e Luna sono uguali



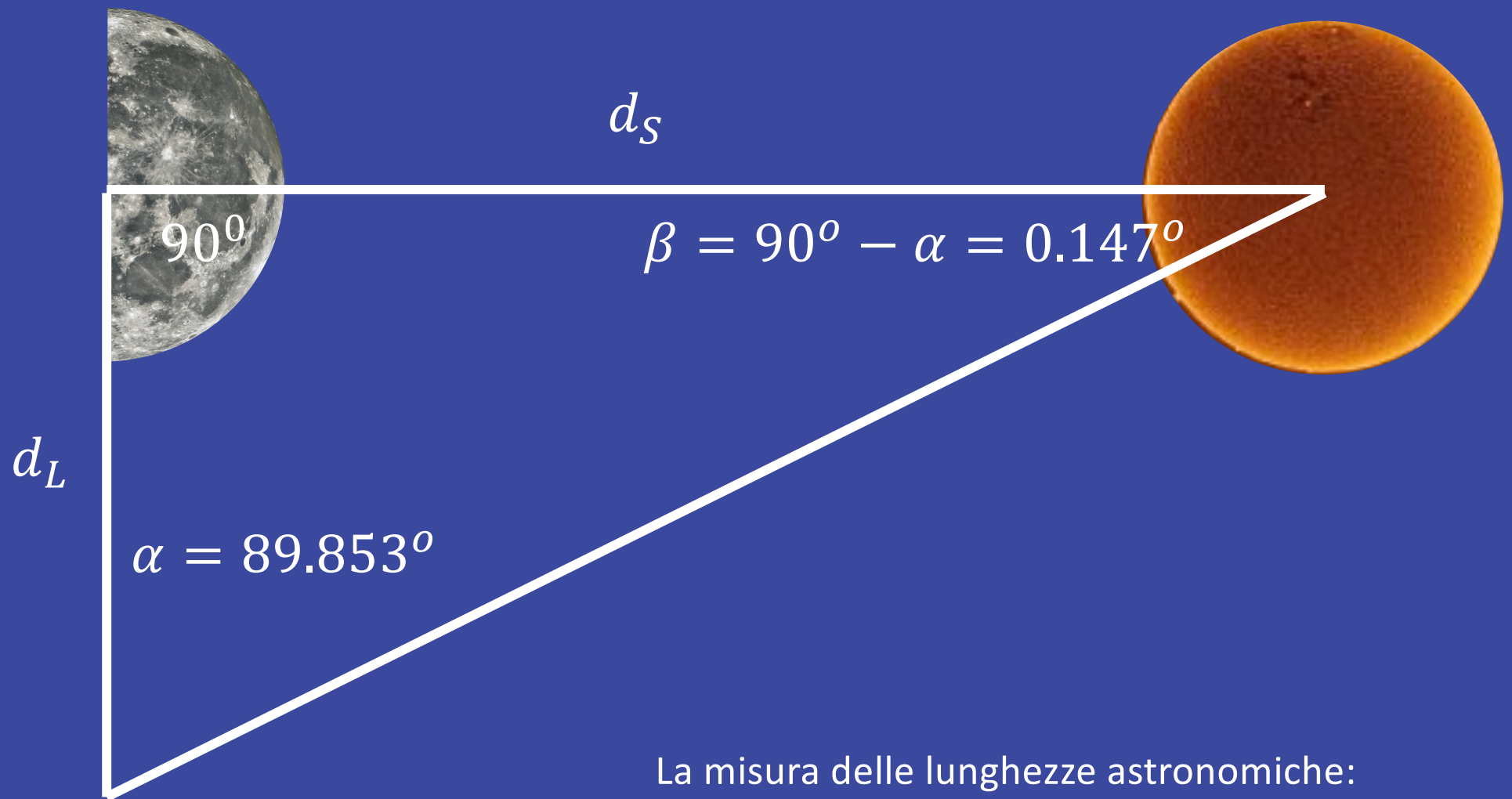
$$\theta_{Sole} \simeq 32'$$

$$\theta_{Luna} \simeq 32'$$



Vedremo a breve che la Luna è circa 400 volte più piccola del Sole ma anche circa 400 volte più vicina

$$\frac{D_L}{D_S} = \frac{d_L}{d_S}$$



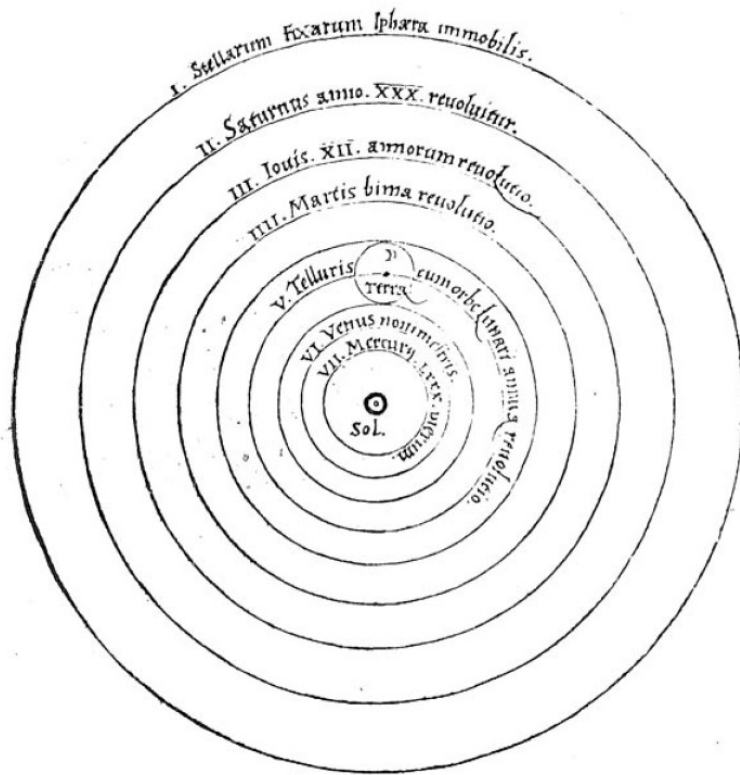
La misura delle lunghezze astronomiche:

I RAGGI DI SOLE, LUNA e le LORO DISTANZE (in km)

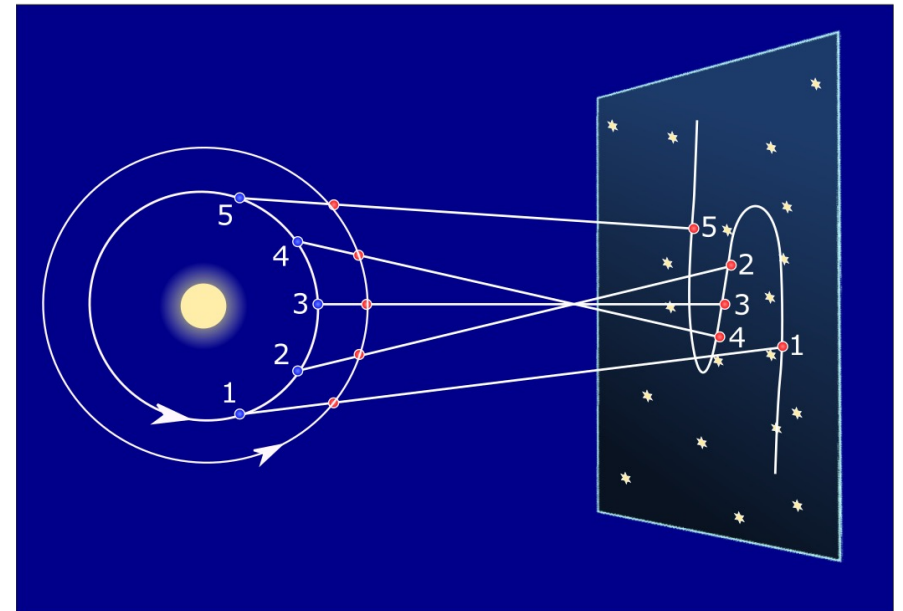
Aristarco di Samo (III secolo a.C.)

Copernico (1473-1543)

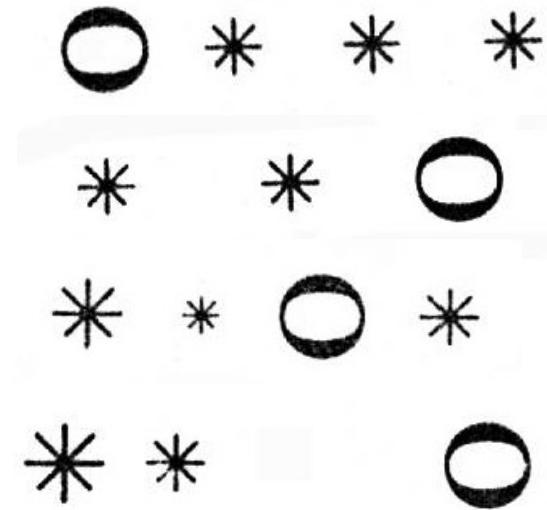
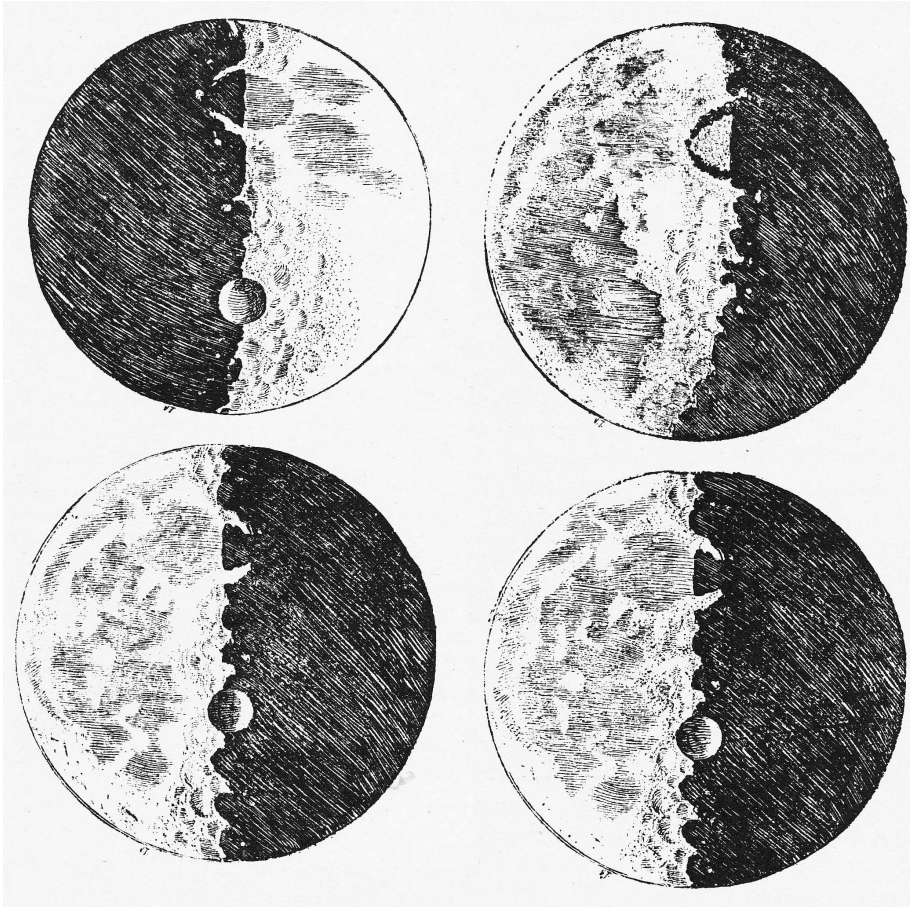
1800 anni di pensiero (filosofico, matematico, fisico, teologico...)...ridotti a pochi minuti di lettura su qualsiasi libro di scuola!



De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543)

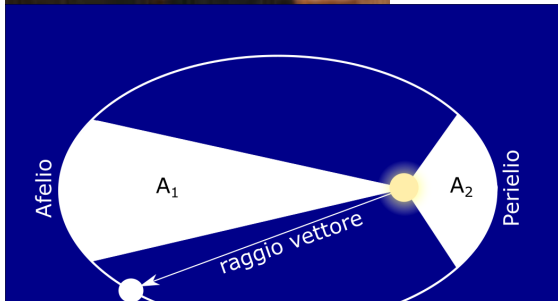


Galilei (1564-1642)



«...il giorno 7 gennaio del corrente anno 1610, alla prima ora della notte seguente, mentre guardavo gli astri celesti con il cannocchiale, mi si presentò Giove.»
(Sidereus Nuncius)

Tra il 1608 ed il 1619 Johannes Keplero formula tre leggi empiriche (basate su osservazioni astronomiche) che permettono di descrivere il moto dei pianeti intorno al Sole. Sono note come **legge delle orbite ellittiche**, **legge delle aree** e **legge dei periodi**



I^o Tutti i pianeti si muovono su orbite piane, nel caso della Terra l'orbita è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi.

(esistenza di una forza centrale)

II^o Il segmento che collega un pianeta al sole spazza aree uguali in tempi uguali.

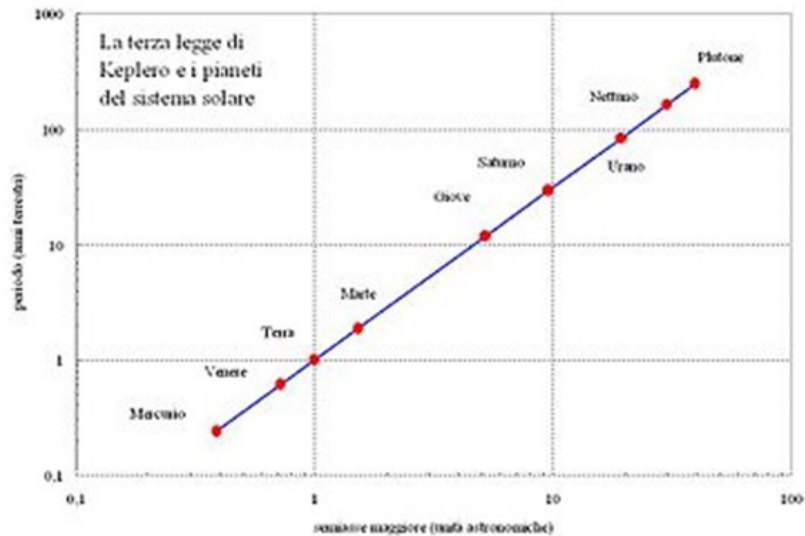
(Legge della costanza della velocità areolare)

III^o Il quadrato del periodo di un pianeta è pari al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

(verifica la legge della gravitazione)

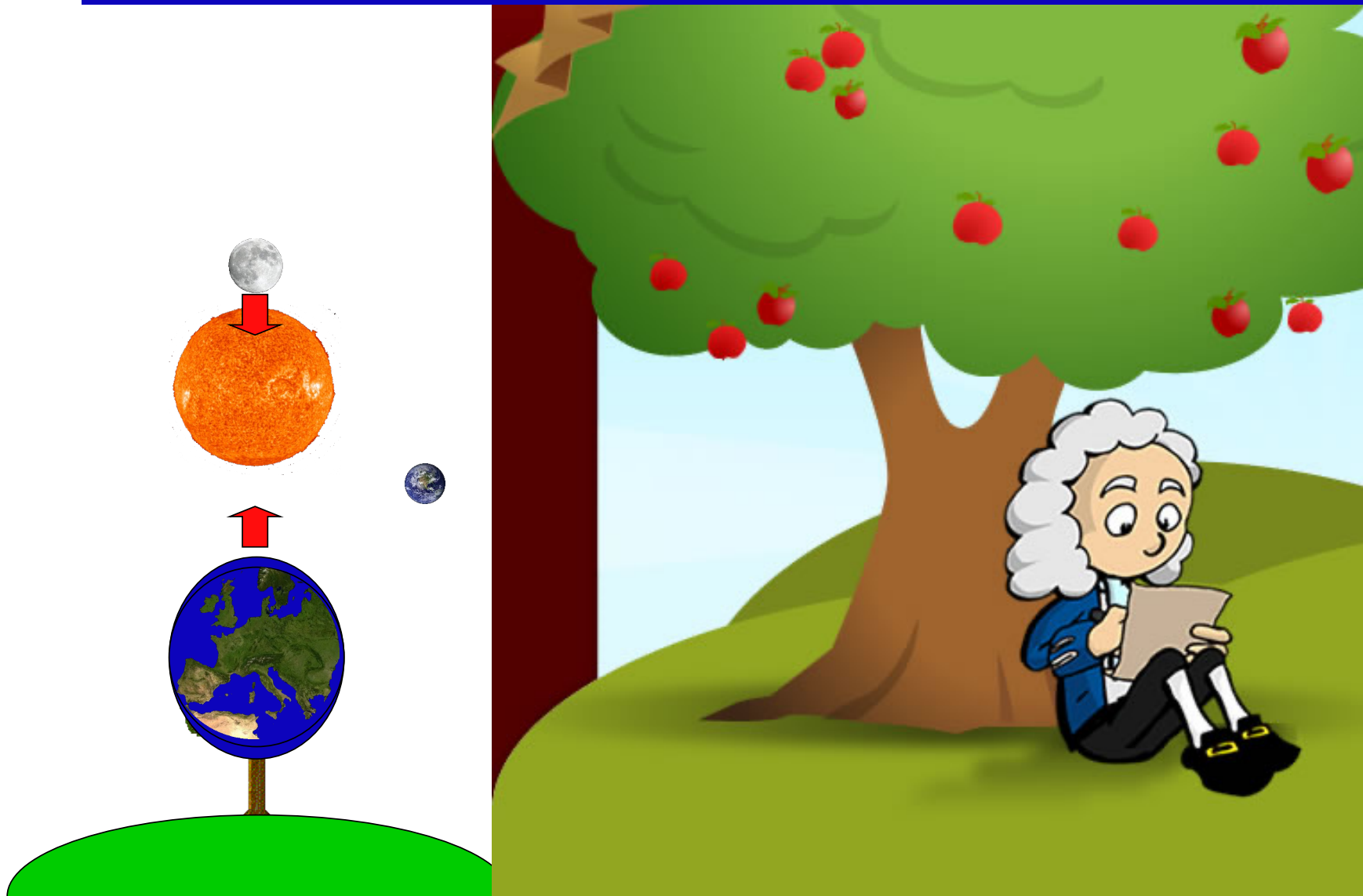
Verifica della III Legge di Keplero

Possiamo verificare la validità della terza legge di Keplero riportando in un grafico il periodo delle orbite e la distanza media dei pianeti nel Sistema Solare. Il rapporto T^2/r^3 vale $2,98 \pm 0.03$

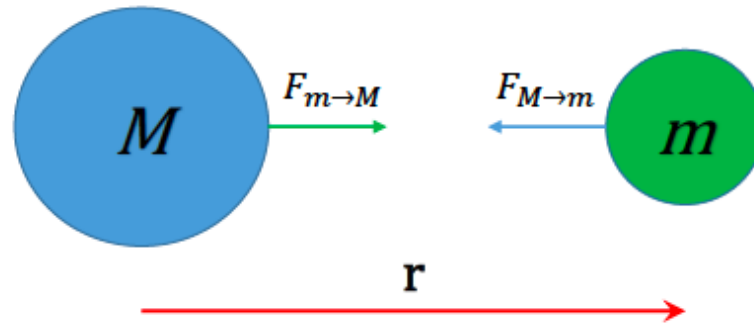


Pianeta	Semiasse r ($10^{10}m$)	Periodo T (a)	T^2/r^3 ($10^{-34} a^2/m^3$)
Mercurio	5,79	0,241	2,99
Venere	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Giove	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98

E ALLA FINE VENNE NEWTON (1642-1726)



Nel 1687, Newton formula la teoria della gravitazione universale ed introduce il concetto di **MASSA GRAVITAZIONALE**



$$-\vec{F} = M \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{Gm}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

E per poter essere consistente con la prima legge della dinamica:
MASSA GRAVITAZIONALE = MASSA INERZIALE (Principio di equivalenza)

Non esiste esperimento col quale un osservatore possa capire di essere fermo in un campo gravitazionale o in moto accelerato, né di essere in assenza di campo gravitazionale o in caduta libera

Le leggi della dinamica, la legge della gravitazione Universale ed il Principio di Equivalenza ci permettono di giustificare teoricamente la III legge di Keplero

(quadrato del tempo impiegato a percorrere un'orbita è proporzionale al cubo della distanza media sole-pianeta)

Infatti:

Consideriamo la seconda legge di Newton

$$\underline{F = ma}$$

Nel caso dei pianeti la forza è la forza della gravitazione universale e se ipotizziamo un moto circolare, potremo dedurre la terza legge di Keplero

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad G \frac{mM}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$$

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3$$

$$P = \left(\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \right)^{1/2} \quad P^2 = K r^3$$

Cavendish misura G

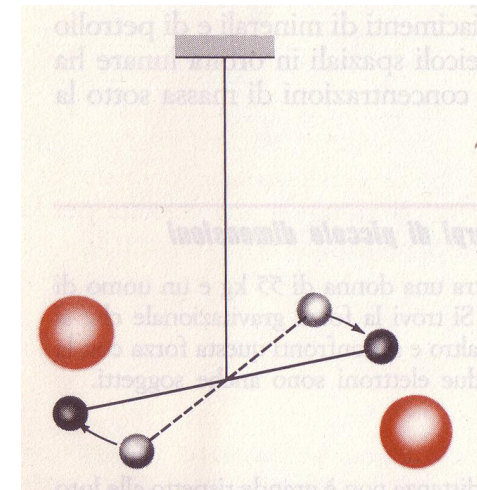
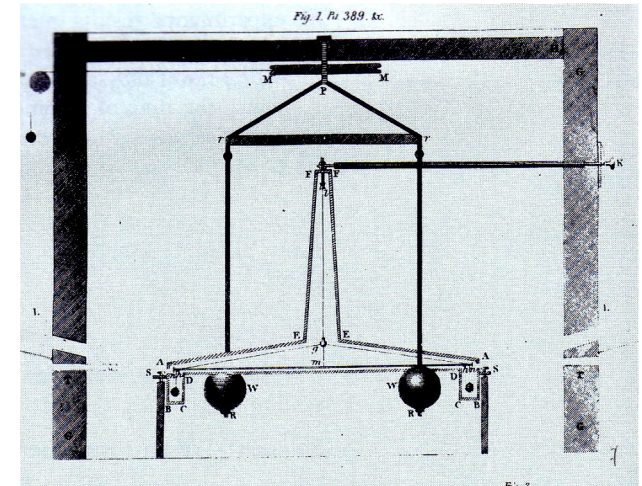
■ Nel 1798 H. Cavendish misurò tramite una bilancia a torsione la costante G che compare nell'equazione della Gravitazione Universale :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

■ All'equilibrio l'attrazione di Gravità è uguale alla torsione del filo che tiene il bilanciante.

- r è la distanza fra le sfere a riposo,
- m e M sono le masse delle sfere.

$$G = \frac{Fr^2}{mM} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$



Attrazione Gravitazionale

- La leggendaria mela di Newton cadrà sulla Terra secondo $\underline{F} = m\underline{a}$ con $\underline{a} = \underline{g}$

Come si ricava il valore di g dalla legge della gravitazione universale

$$mg = G \frac{mM_T}{r^2} \Rightarrow g = G \frac{M_T}{r^2}$$

$$r = R_T \Rightarrow g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

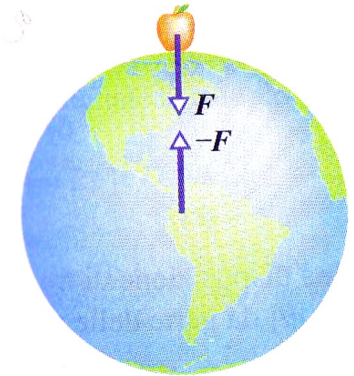
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [m}^3\text{/(kgsec}^2\text{)]}$$

$$M_t = 5.98 \times 10^{24} \text{ [kg]}$$

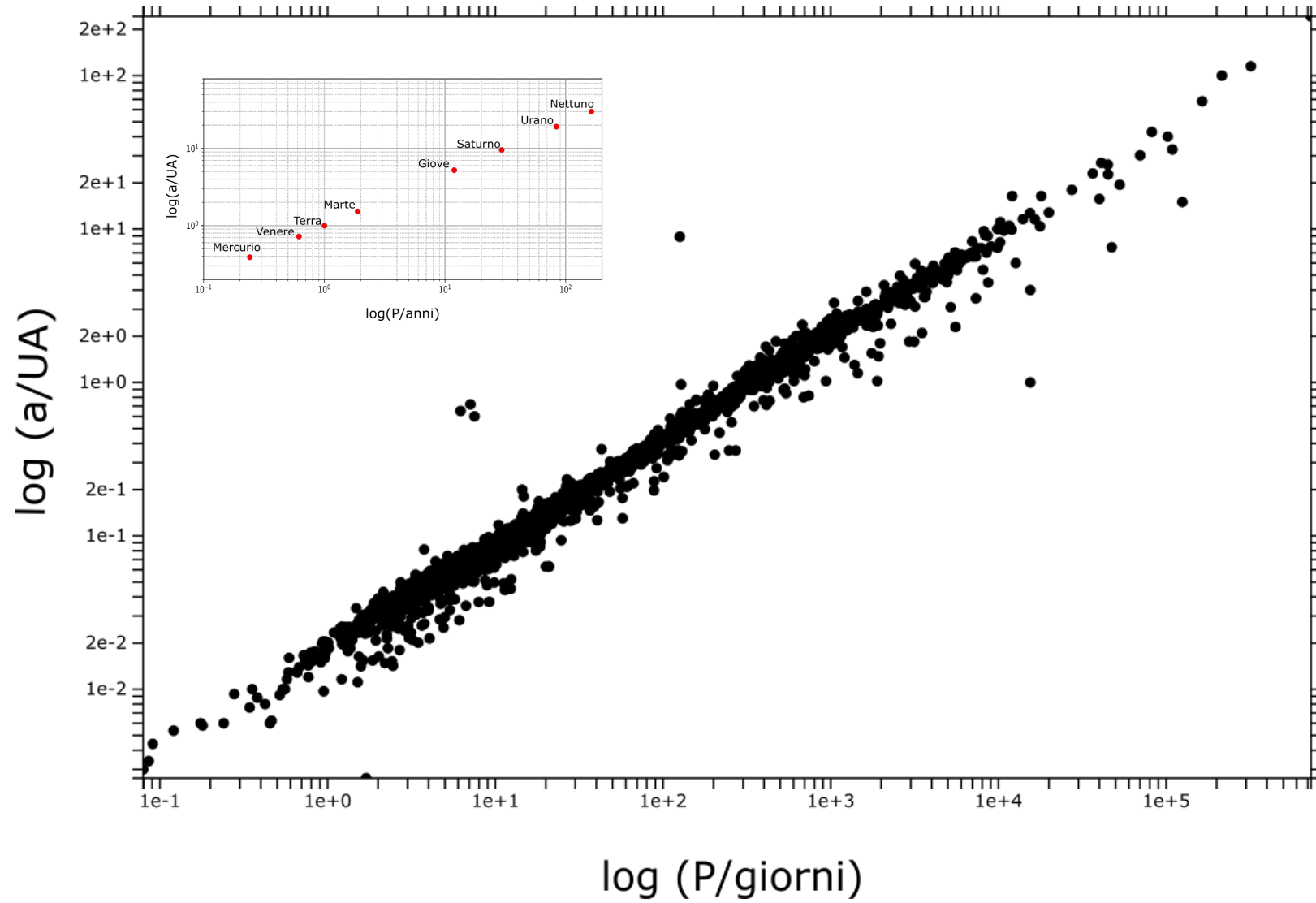
$$R_t = 6.4 \cdot 10^6 \text{ [m]}$$

$$G = \frac{Fr^2}{mM} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

NOTA!



LA LEGGE E' UNIVERSALE!



La misura delle lunghezze astronomiche:
L'UNITA' ASTRONOMICA (misure entro qualche AU)

ARISTARCO ci ha insegnato che la geometria è importante in astronomia

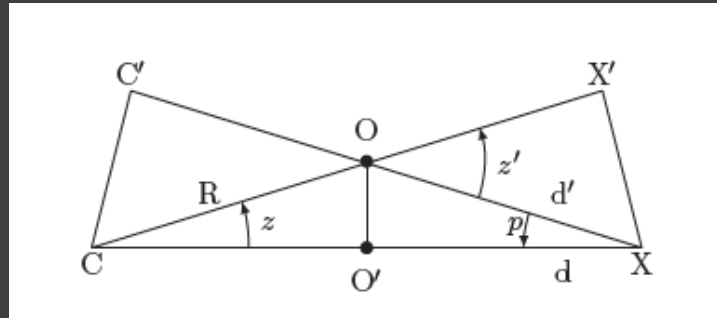
TRANSITO
PARALLASSE

“L'osservazione del passaggio di Venere sul disco solare sarà, nel prossimo secolo, l'unico modo per scoprire la reale distanza della Terra dal Sole”.

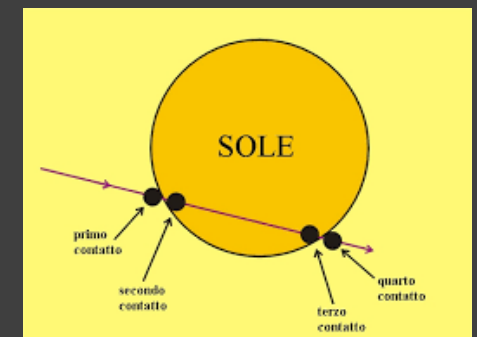
(Edmund Halley, 1691)

Newcomb (1890): 149.668.465 km

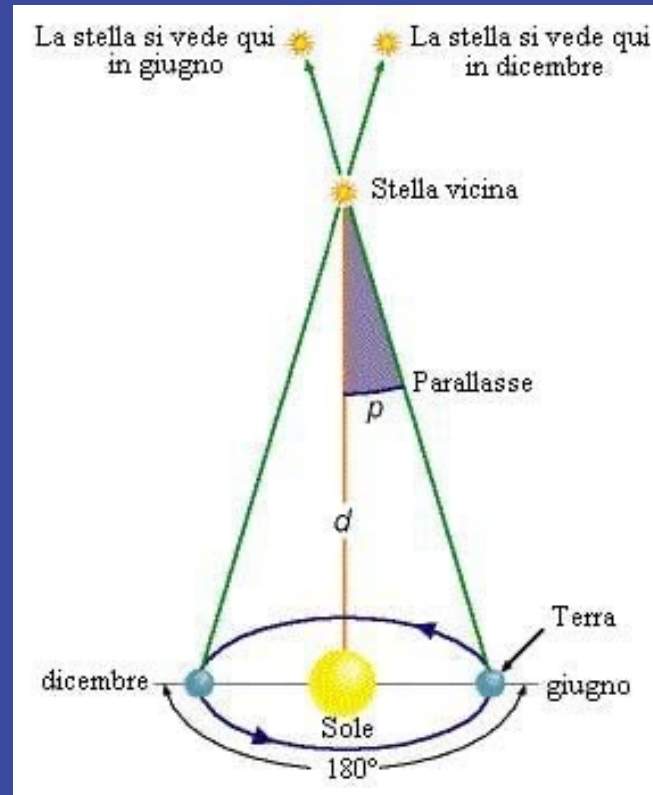
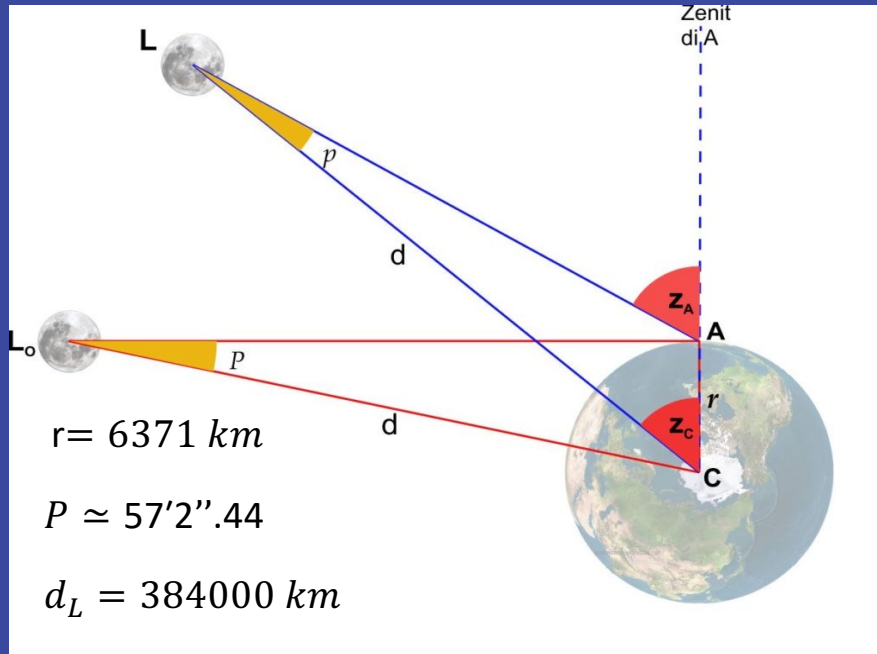
RADAR (1976): 149.597.870 km
 (usando ancora Venere all'elongazione massima) **POSSIBILE APPROFONDIMENTO.**



$$\begin{aligned} d \cos z &= d' \cos z' + R, & d &= d' \cos p + R \cos z, \\ d \sin p &= R \sin z', & d \cos p &= d' + R \cos z', \\ \tan p &= \frac{R}{d'} \frac{\sin z'}{1 + \frac{R}{d'} \cos z'} \end{aligned}$$



La misura delle lunghezze astronomiche: **LA PARALLASSE (< 10 kpc)**



$$d(\text{pc}) = \frac{1\text{pc}}{p('')}$$

$$1 \text{ pc} \simeq 206265 \text{ AU} \simeq 3 \text{ a.l.}$$



- 1) 2 miliardi di oggetti osservati (circa 1% delle stelle nella Galassia)
- 2) Distance misurate entro qualche kpc da noi con un'accuratezza fino a 0.001%. Anche stelle a 30000 a.l. (centro galattico) sono osservate con precisione del 20%

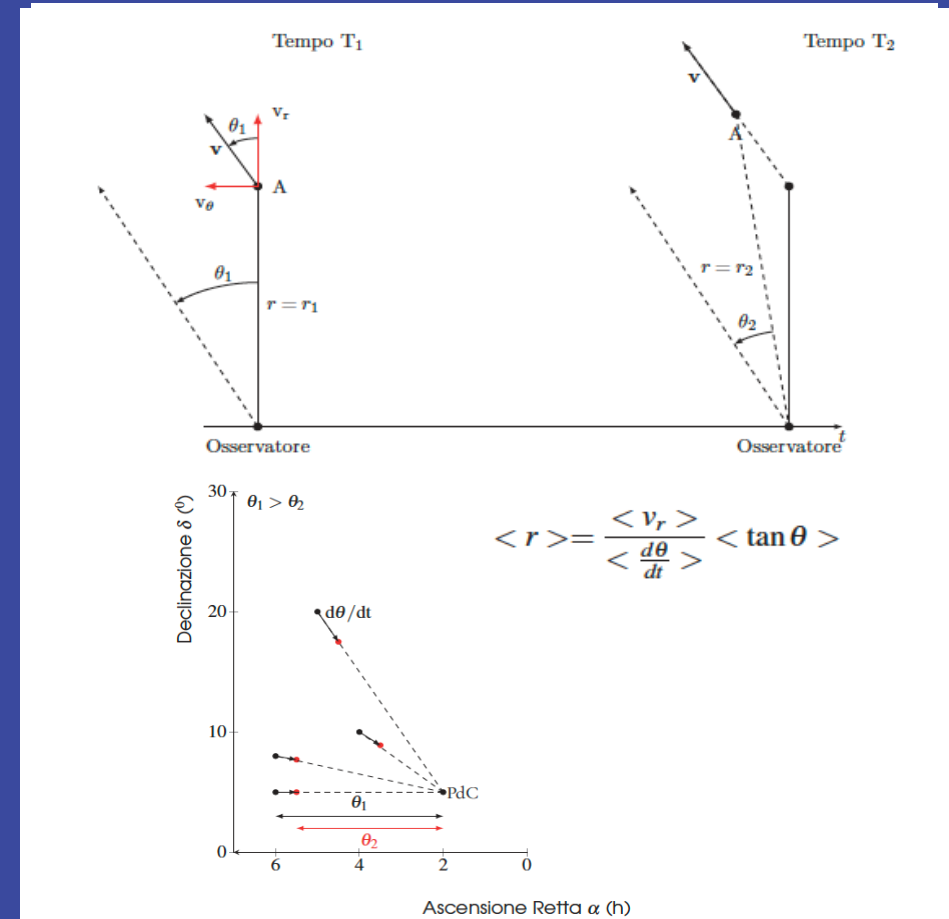
POSSIBILI APPROFONDIMENTI:

PARALLASSE ORIZZONTALE LUNARE

METODO DI COPERNICO PER LA DISTANZA DEI PIANETI ESTERNI

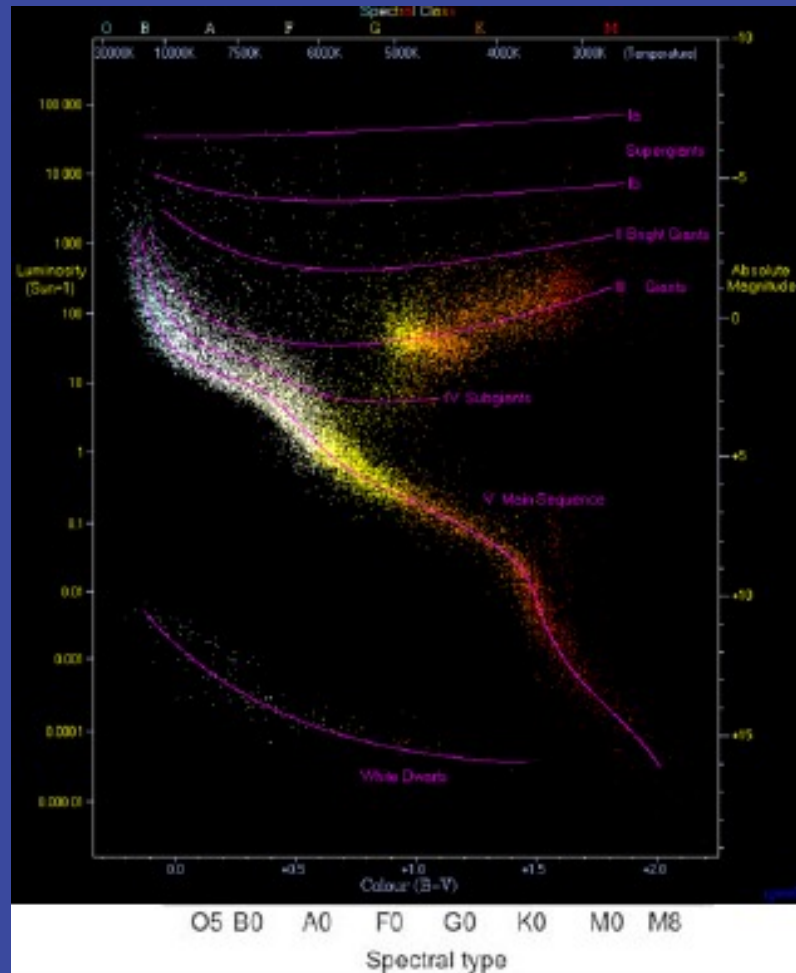
La misura delle lunghezze in astronomia: LA CONVERGENZA (< 10 kpc)

Tale metodica si basa sull'idea che finché tutte le stelle sono vicine tra loro e legate da vincoli gravitazionali, esse tenderanno a muoversi verso un comune punto di convergenza nel cielo; tuttavia questo è dovuto essenzialmente ad un effetto di prospettiva.



Iniziano a comparire anche altri tipi di misura (oltre a quelle trigonometriche): le misure spettroscopiche (vedi le **SPIGOLATURE RELATIVISTICHE**)

La misura delle lunghezze in astronomia: METODI NON TRIGONOMETRICI



Candele Standard

Per essere utili devono avere le seguenti proprietà:

- Essere luminose per essere viste da grande distanza
- Conoscere con precisione la loro luminosità
- Facilmente riconoscibili (per esempio dall'aspetto della loro curva di luce per stelle variabili)
- Essere molto comuni, per avere la probabilità di trovarne un po' ovunque

PARALLASSE SPETTROSCOPICA (< 10 kpc)

Non è una vera parallasse.

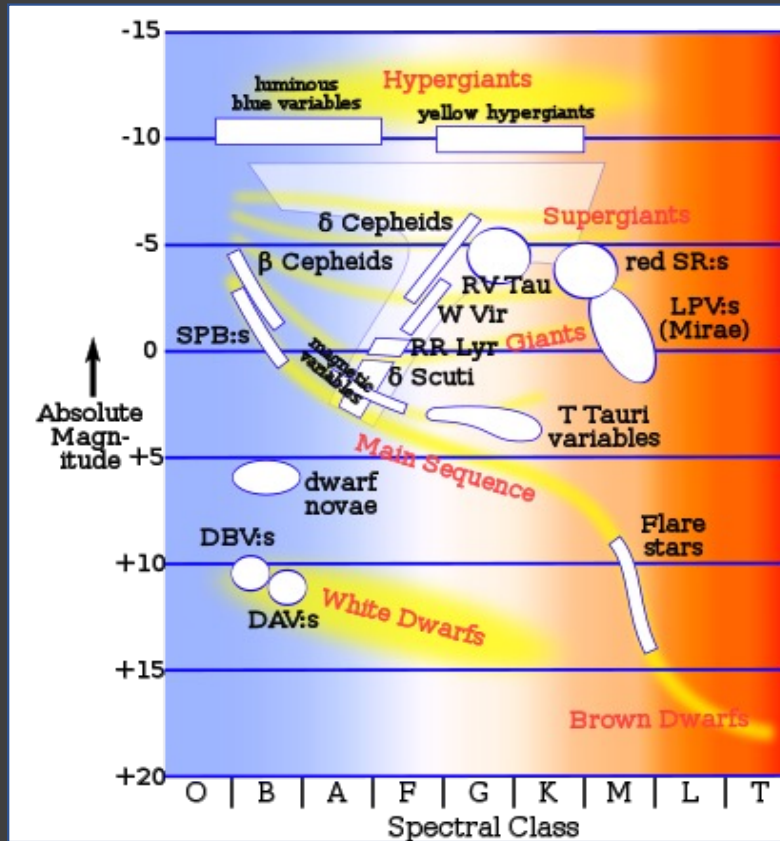
Spettroscopicamente si determinano:

- tipo spettrale (Es. G8) - classe di luminosità (Es. V – seq. princ.) e la classe spettrale della stella.

Si ottiene la magnitudine assoluta M e, dalla magnitudine apparente, si determina la distanza r per mezzo del modulo di distanza

$$M - m = 5 - 5 \log d(\text{pc}) \quad d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = 10^{1 + \frac{m-M}{5}} \text{ pc}$$

La misura delle lunghezze in astronomia: LE VARIABILI CEFEIDI (1kpc – 30 Mpc)



Per la popolazione di Cefeidi di tipo I

$$M_v = (-2.43 \pm 0.12) (\log_{10} P - 1) - (4.05 \pm 0.02)$$

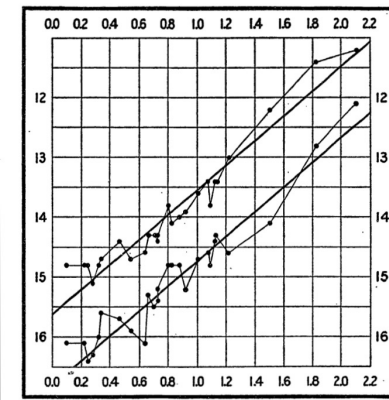
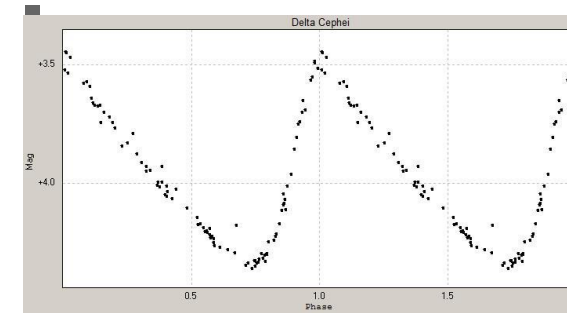
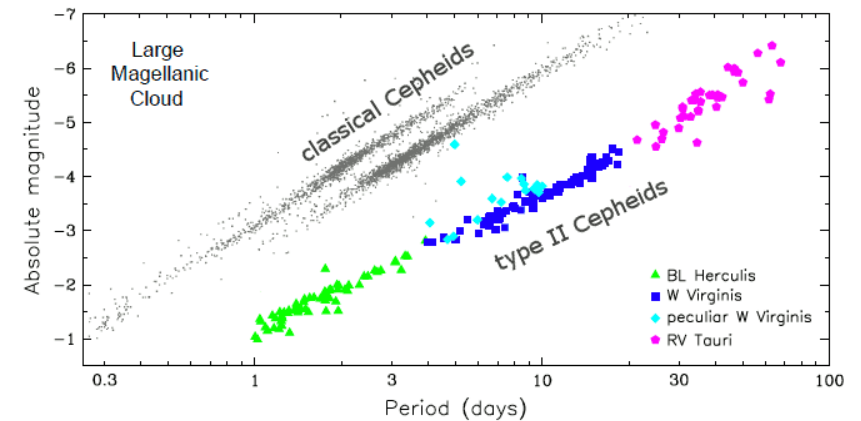


Fig. 2.



Tipo I = Pop. I - P variabile con magnitudine
800 - 20000 $L_{\odot}$
Tipo II = Pop. II - P variabile con magnitudine
200 - 2000 $L_{\odot}$



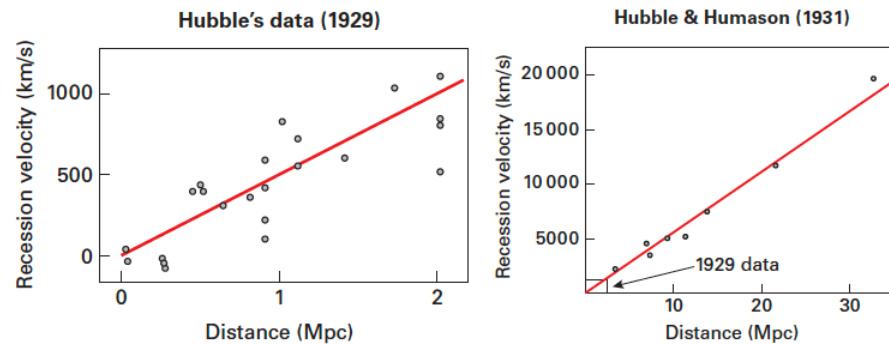
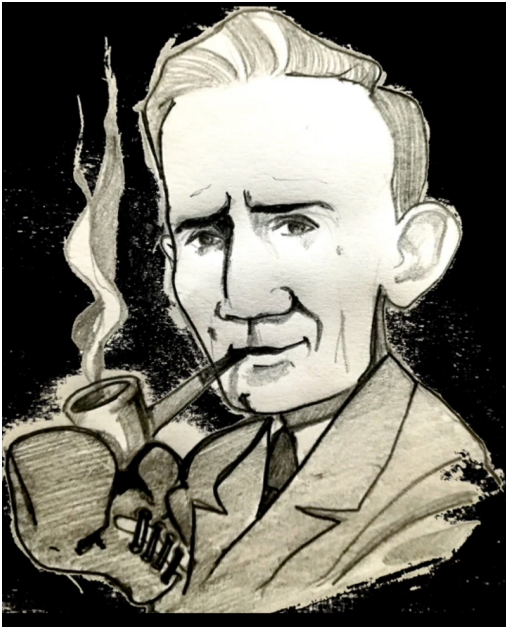


Figure 27.3 The original discovery forms of Hubble's law, showing a roughly linear proportionality between the recession velocity V_r of a galaxy and its distance. The slope of the red line fits through the data points gives a measure of the Hubble constant, $H_0 \approx 500$ (km/s)/Mpc. The modern best value is much smaller, $H_0 \approx 67$ (km/s)/Mpc.

Legge di Hubble-Lamaitre

$$V = H_0 d$$

con

$$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$$

Ovvero l'Universo si espande,
i.e. il più grande sbaglio di
Einstein (a suo dire).

$$z = v/c \text{ (per } z < 0.1)$$

$$d = cz/H_0$$

La misura delle lunghezze in
astronomia: **II REDSHIFT**
GRAVITAZIONALE (entro 50
Mpc)

- Nel 1929, Edwin Hubble ed il suo assistente notturno Milton Humason affrontarono una campagna osservativa molto impegnativa: misurare la distanza tramite il metodo delle cefeidi (già visto) e lo spostamento d'onda Doppler per un campione di «nebulose galattiche» (già visto).

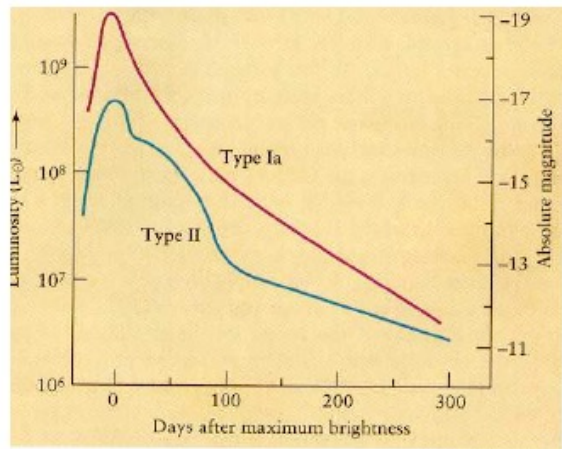
La misura delle lunghezze in astronomia: le
supernovae di tipo Ia (entro 1000 Mpc)

Variabile cataclismica: esplosione di una
nana bianca di un sistema binario.

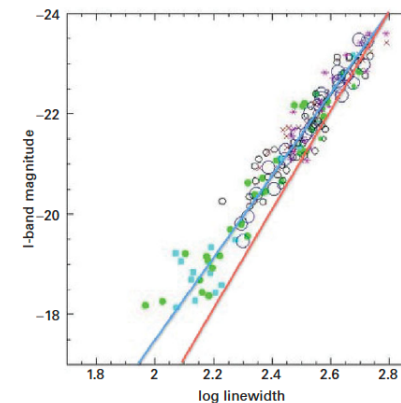
La nana bianca accresce materiale fino al
limite di Chandrasekhar 1.4 Masse Solari

Si riconoscono dallo spettro povero di H e He
e dalla curva di luce.

Supernovae più brillanti hanno una curva di
luce a decrescita più lenta. E' un esempio di
CANDELA STANDARD (già vista)



La misura delle lunghezze in astronomia: Galassie a spirale:
Tully-Fisher (entro 100 Mpc) e simili! Un esempio



$$L_{\text{gal}} \propto V_{\text{rot}}^4.$$

$$M_I \approx -3.3 - 8.3 \log \left(\frac{V_{\text{rot}}}{\text{km/s}} \right).$$

Figure 27.4 Empirical Tully–Fisher relation in the infrared, plotted as I-band absolute magnitude M_I versus logarithm of the total linewidth (in km/s), set by twice the rotational velocity, $2V_{\text{rot}}$. The blue line shows best fit line with slope -8.3 , as given in Eq. (27.7), corresponding to velocity exponent $8.3/2.5 \approx 3.3$, slightly shallower than the slope 4 assumed in the simple $\log L_{\text{gal}}$ versus $\log V_{\text{rot}}$ scaling law of Eq. (27.6). The red line shows the slope $-10 = -2.5 \times 4$ that would be implied in the I-band magnitude scaling by this simple form for the Tully–Fisher relation. The best-fit slope can differ for different wavebands. Credit: R. B. Tully.

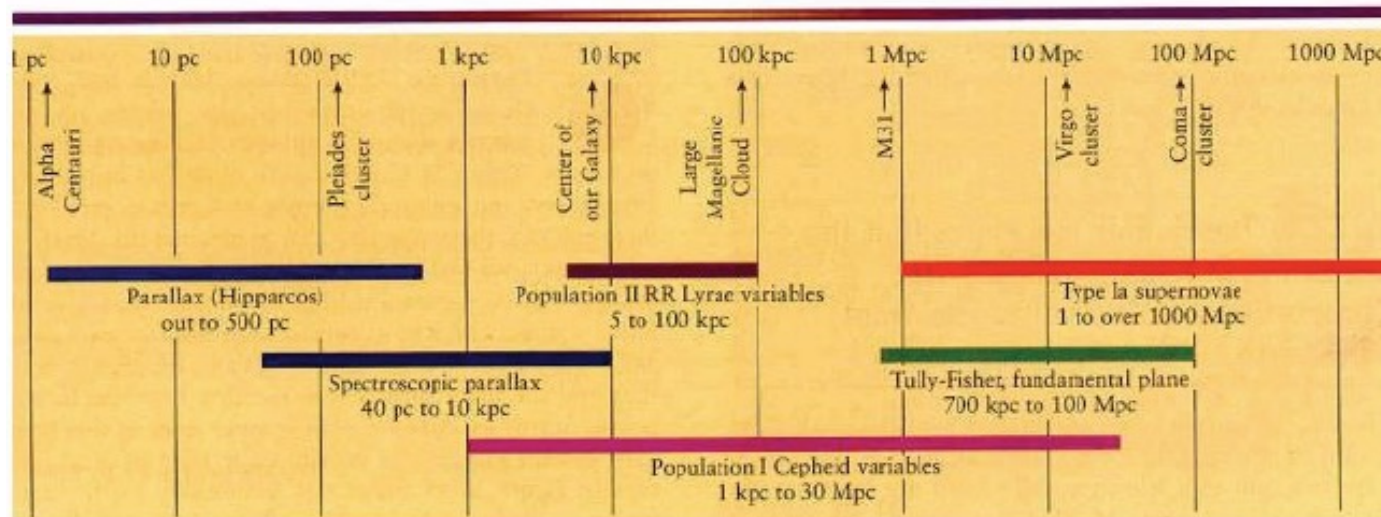
$$\frac{GM}{R} = V_{\text{rot}}^2$$

$$L_{\text{gal}} \propto M$$

$$L_{\text{gal}} \propto V_{\text{rot}}^4.$$

$$L_{\text{gal}} \propto R^2$$

Scala distanze (distance ladder)

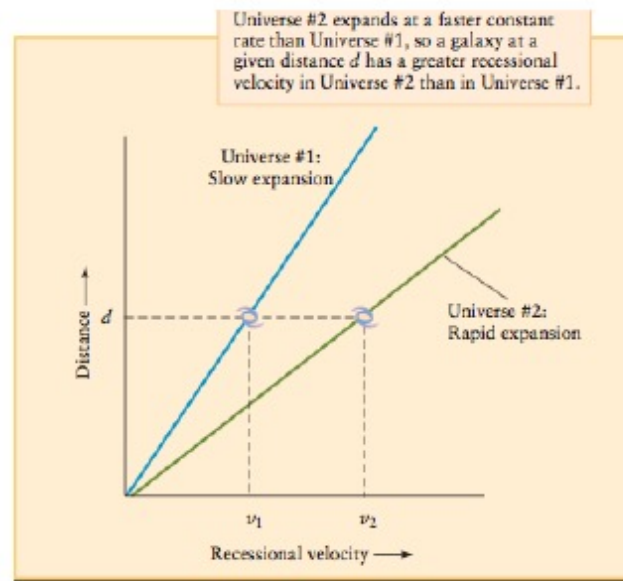


I metodi di determinazione delle distanze sono tutti legati fra loro. Se cambia un metodo, si modificano tutte le distanze degli oggetti più distanti.

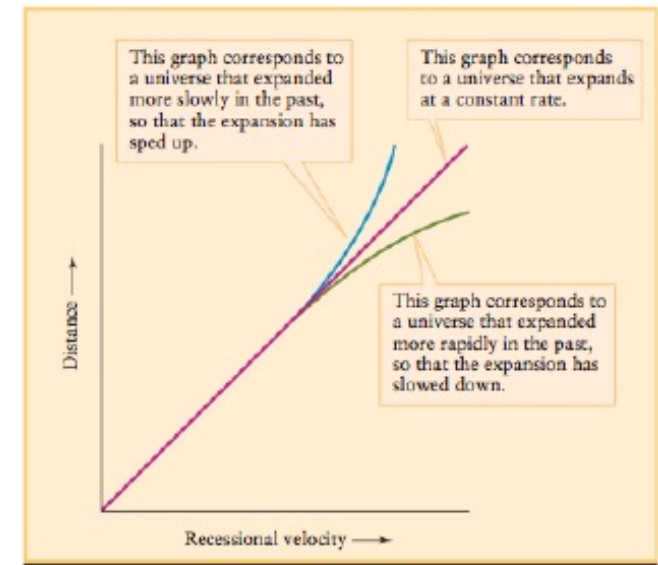
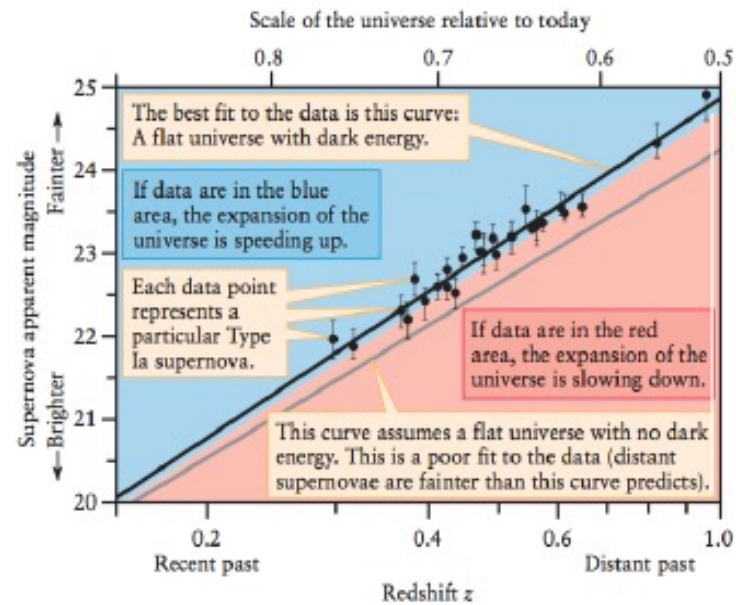
Esistono molte altre relazioni tra parametri misurabili e la distanza:

Legge Tully-Fisher: mette in relazione la velocità di rotazione della galassia con la luminosità assoluta nelle galassie a spirale

Legge Faber-Jackson: mette in relazione la dispersione di velocità delle stelle con la luminosità assoluta nelle galassie ellittiche



(a) Two universes with different expansion rates



(b) Possible expansion histories of the universe

2011: Premio Nobel a Perlmutter, Schmidt e Riess

