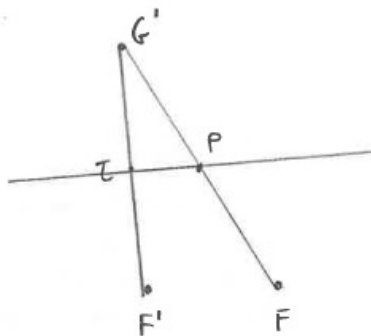




"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

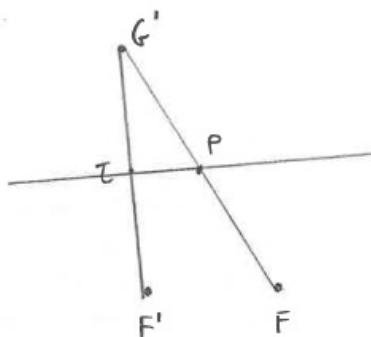
"Le cose semplici hanno dimostrazioni elementari" diceva Richard Feynman ma, per elementare, non intendeva certo quello che pensiamo comunemente, ovvero ad una dimostrazione semplice. Anzi di semplice, nella sua derivazione delle leggi di Keplero, c'è veramente poco. Sulla falsa riga di Feynman e, prima di lui Newton, mostreremo come le leggi fondamentali della meccanica celeste possono essere ricavate ricorrendo ad algebra "elementare" e da argomentazioni geometriche che implicano l'uso di riga e compasso.

E poi?

Alcune applicazioni "astrofisiche"!



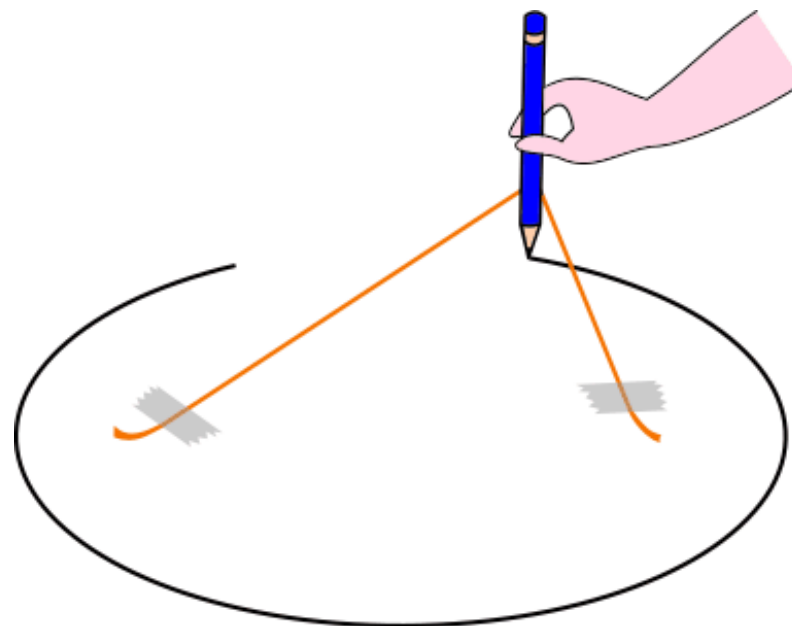
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

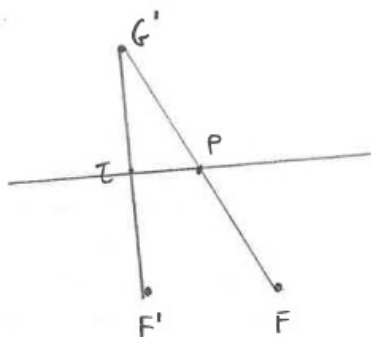
I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

«L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi (detti Fuochi)»



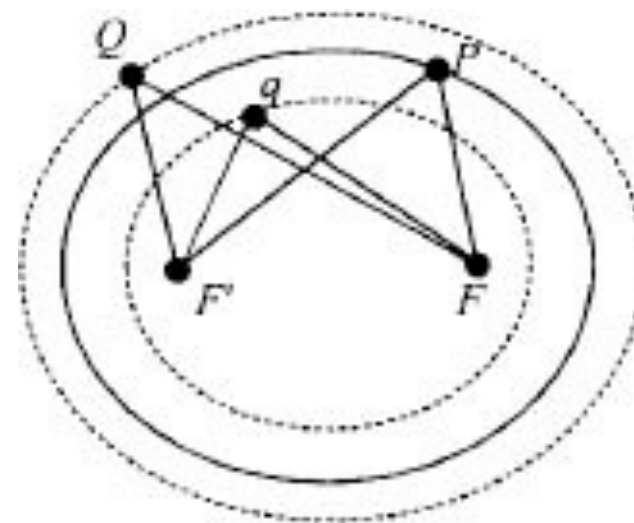


"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

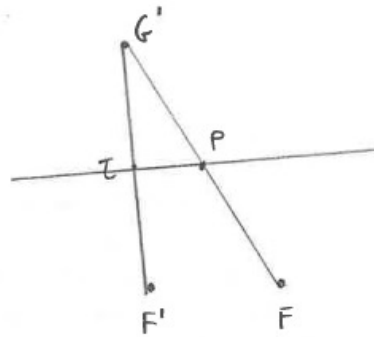
I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)



I **proprietà**: Per ogni punto P dell'ellisse, $F'-P-F$ è costante

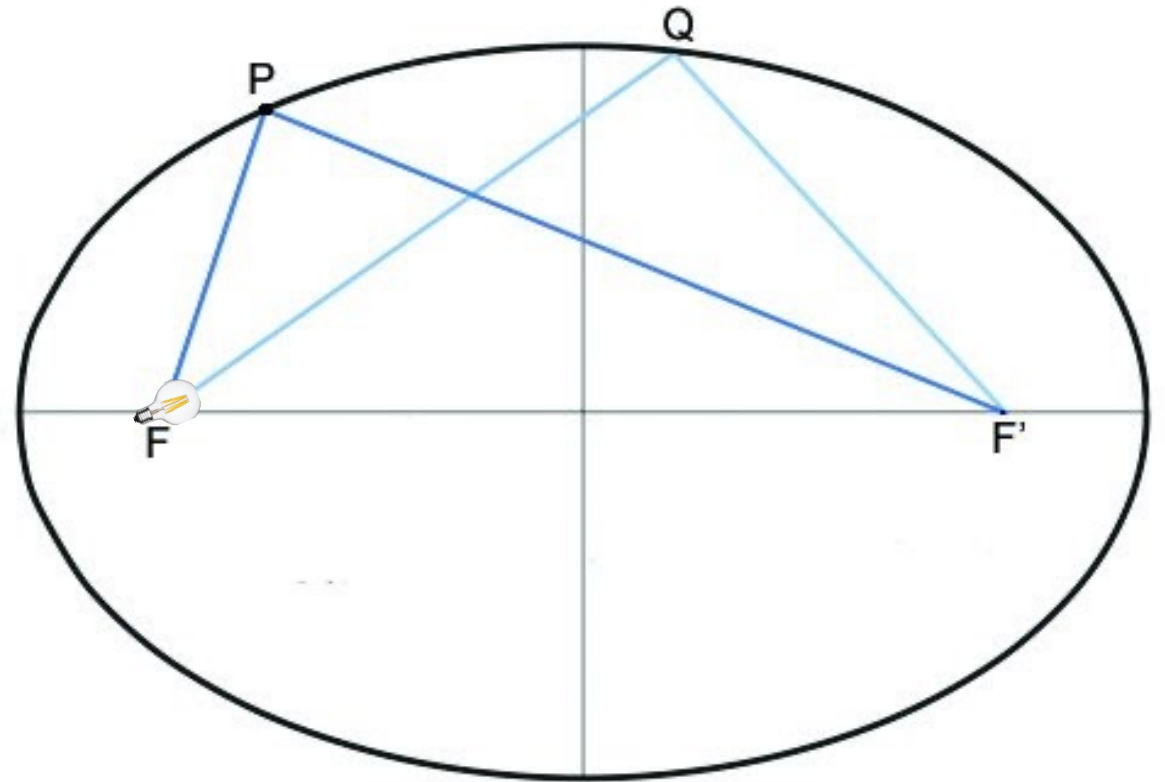
II **Proprietà**: Ogni punto del piano Q tale che $F'-Q-F > F'-P-F$ giace all'esterno dell'ellisse.

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



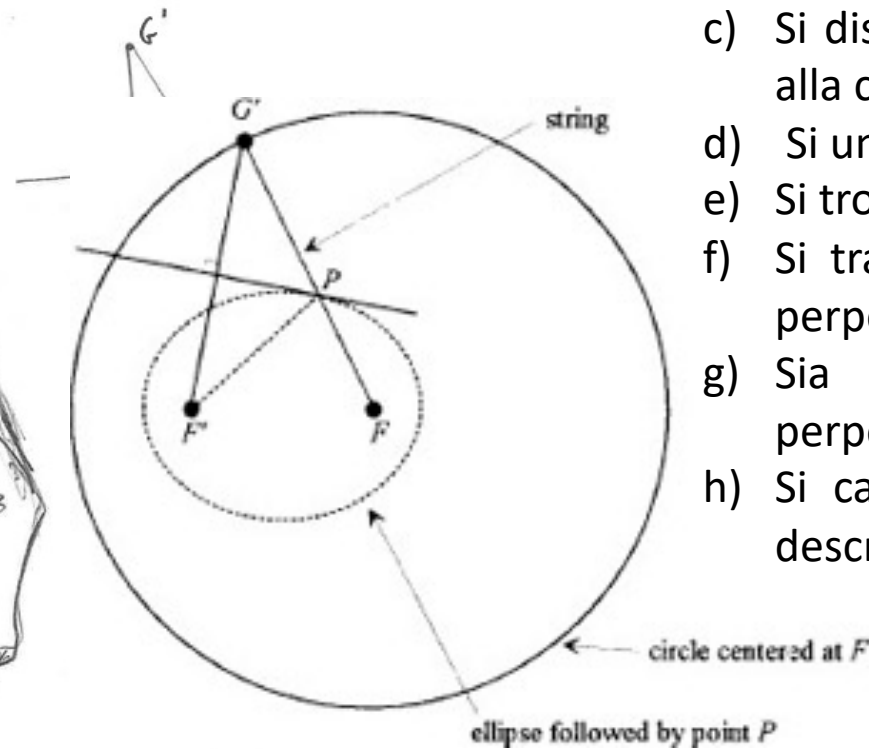
Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)



III proprietà: Se la parte interna dell'ellisse riflettesse come uno specchio, con una sorgente luminosa posta in un fuoco, la superficie rifletterebbe i raggi nell'altro fuoco. Per ogni P, $F'-P-F'$ è la minima distanza percorsa dalla luce.

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



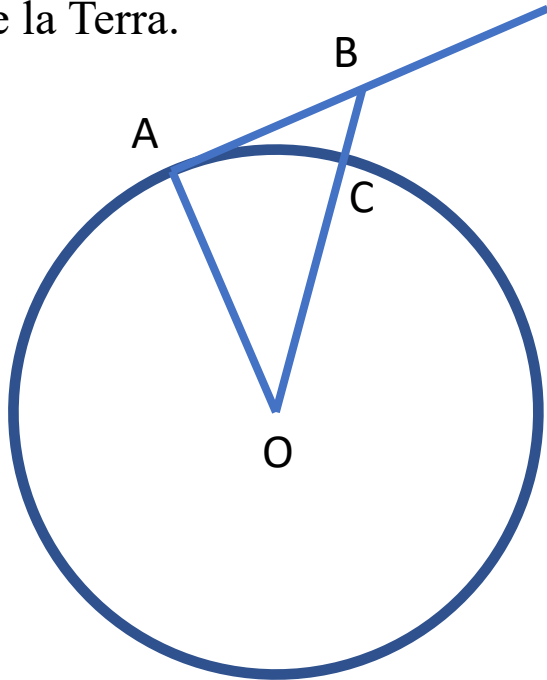
Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

- Si disegnano 2 punti (i fuochi) F' e F
- Si sceglie la lunghezza della stringa FG' e la si ancora in F .
- Si disegna FG' con una orientazione qualsiasi rispetto alla congiungente $F'F$.
- Si unisce G' con F'
- Si trova il punto medio t di $F'G'$.
- Si traccia la perpendicolare mediana in t (bisettrice perpendicolare)
- Sia P l'intersezione di FG' con la bisettrice perpendicolare
- Si cambia orientazione (ossia G' ruota intorno a F descrivendo un cerchio) e si torna al punto c).

Plutarco, De facie quae in orbe lunae apparet, 923C-D

Certo la Luna è trattenuta dal cadere dallo stesso moto e dalla rapidità della sua rotazione, proprio come gli oggetti posto nelle fionde sono trattenuti dal cadere dal moto circolare. Il moto **secondo natura** guida infatti ogni corpo, se non è deviato da qualcos'altro. Perciò la Luna non segue il suo peso, [che è] equilibrato dall'effetto della rotazione. Ma si avrebbe forse più ragione di meravigliarsi se essa restasse assolutamente immobile e e fissa come la Terra.



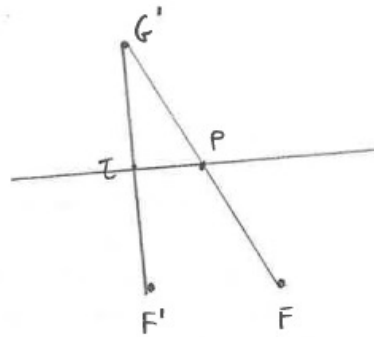
Seneca, Naturales questiones, VII, xxv, 6-7

Abbiamo trovato chi ci ha detto: Sbagliate, pensando che qualche stella interrompa il suo cammino o lo inverta. Non è permesso ai corpi celesti fermarsi né invertire il moto; tutti avanzano: come una volta sono stati lanciati, così procedono; la fine del loro cammino coinciderebbe con la loro stessa fine.

Quest'opera eterna ha moti irrevocabili: se dovessero arrestarsi, quei [corpi] ora conservati dal loro moto regolare cadrebbero gli uni sugli altri. Qual è allora il motivo per cui alcuni sembrano tornare indietro?

L'intervento del Sole e la natura dei percorsi e delle orbite circolari, disposte in modo che per un certo tempo ingannano gli osservatori, impone loro un'apparenza di lentezza: così le navi, sebbene procedano a vele spiegate, sembrano tuttavia star ferme

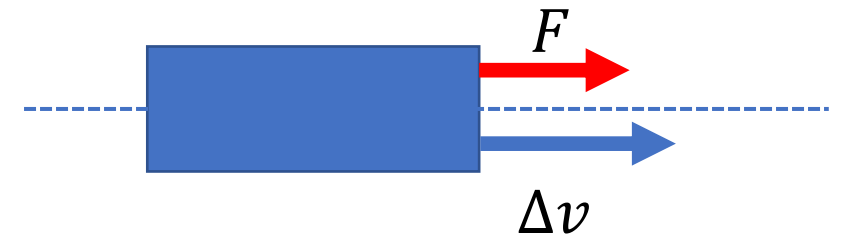
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

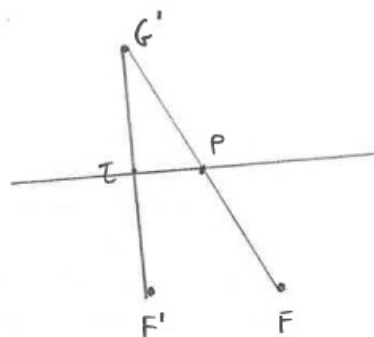
- I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)
- II) **La seconda Legge di Keplero (o Legge delle Aree: il raggio vettore congiungente Sole e pianeta spazza aree uguali in tempi uguali)**
- I) **Prima legge della dinamica:** In assenza di forze interagenti esterne (o quando la risultante delle forze agenti è nulla) su di un corpo, esso si muove di moto rettilineo uniforme
- II) **Seconda legge della dinamica:** La forza netta $\mathbf{F}$ agente induce un'accelerazione ovvero, in un certo intervallo di tempo Δt , una variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$.

$$F \propto \Delta v$$





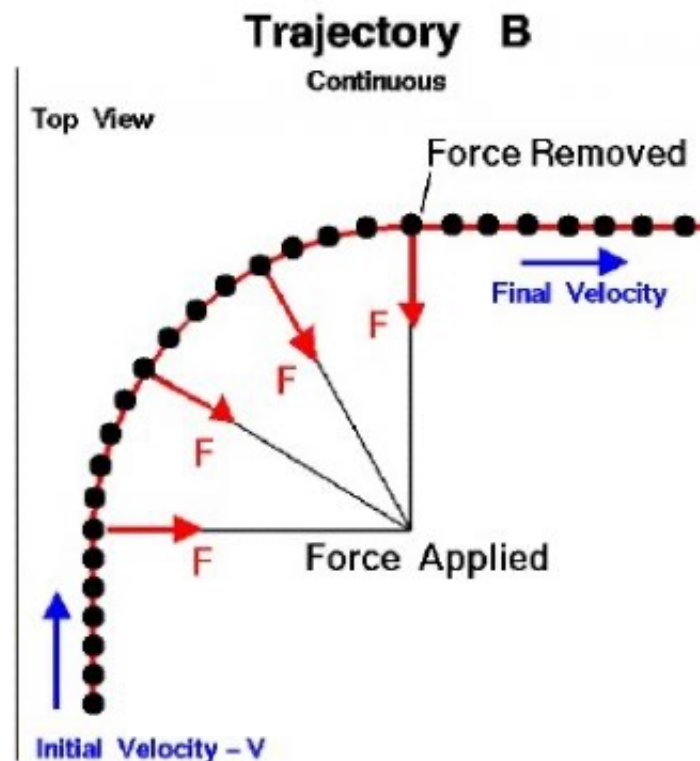
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



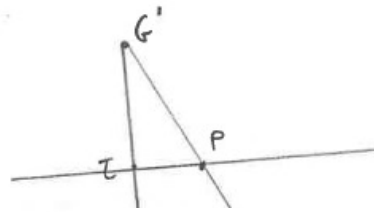
Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero (o Legge delle Aree: il raggio vettore congiungente Sole e pianeta spazza aree uguali in tempi uguali)



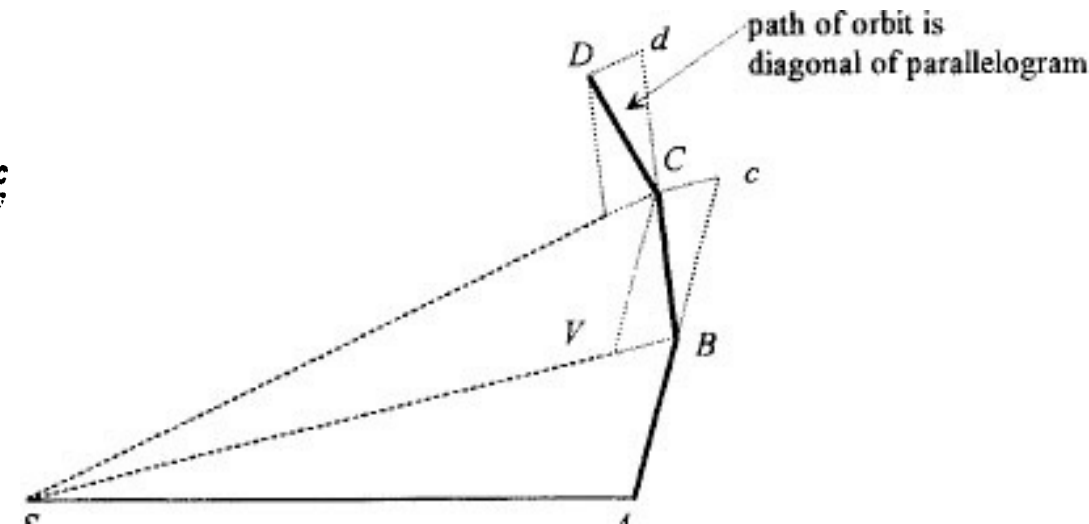
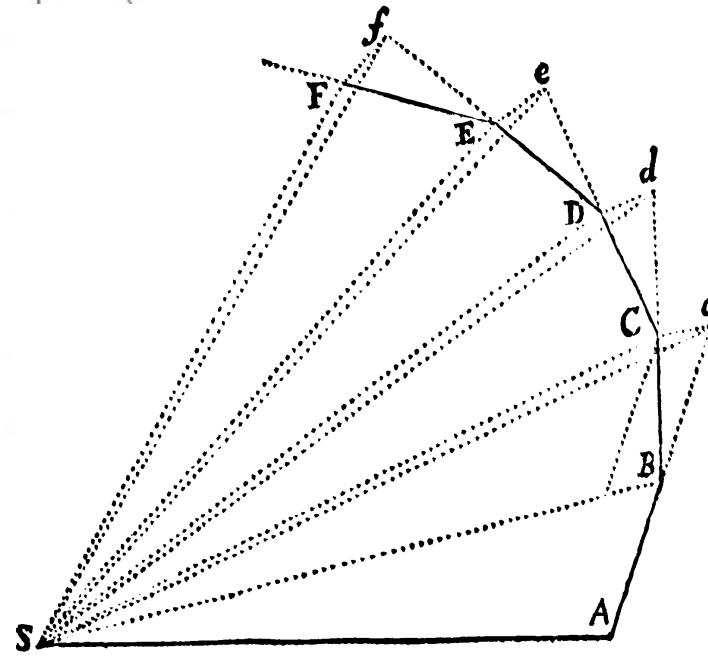
A black and white caricature of a man with a large head, smiling, wearing a light-colored button-down shirt with a dark pocket. The text "have" and "den" is visible in the upper right corner.



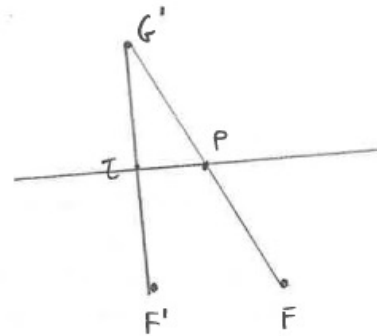
I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero (o Legge delle Aree: il raggio vettore congiungente Sole e un –generico- Pianeta spazza aree uguali in tempi uguali)

I. Newton, Principia Mathematica, Sect. III, «De Inventione Virium Centripetarum»



"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{costante}$$

La II legge di Keplero è una conseguenza della conservazione del momento angolare perché, si scoprirà, l'area spazzata dal raggio vettore è proporzionale a questa quantità.

Anche se Newton non lo chiamava «momento angolare» era sicuramente conscio di questa grandezza.

Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

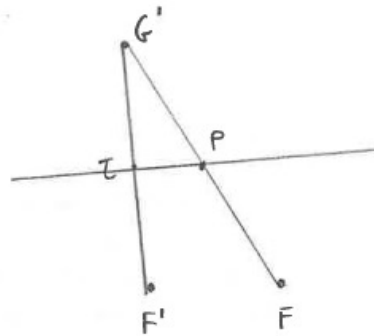
II) La seconda Legge di Keplero (o Legge delle Aree: il raggio vettore congiungente Sole e un –generico- Pianeta spazza aree uguali in tempi uguali)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{l_0}{\mu} = \text{costante}$$

$$l_0 = \|l_0\| = \|r \times \mu \dot{r}\| = \mu r^2 \dot{\theta}.$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{GM_T \mu^2 a}}.$$

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

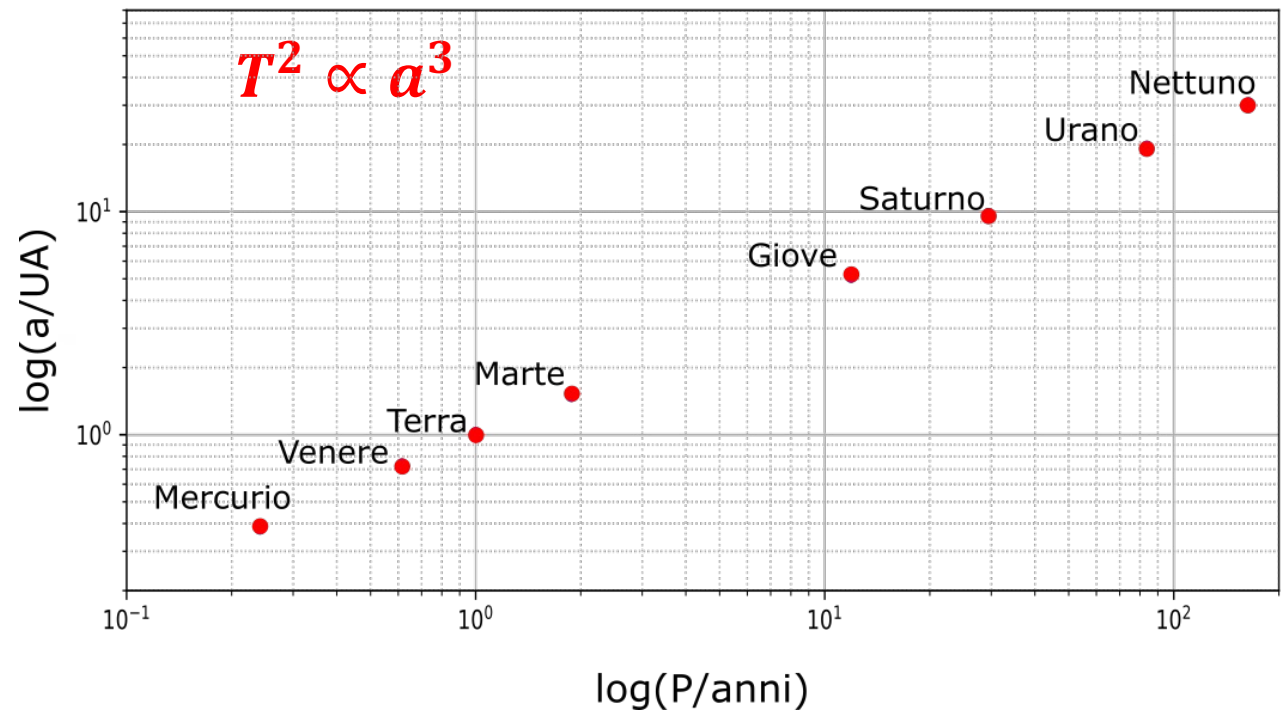


Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero

III) La terza Legge di Keplero



"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

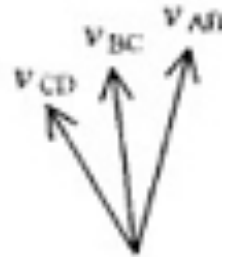
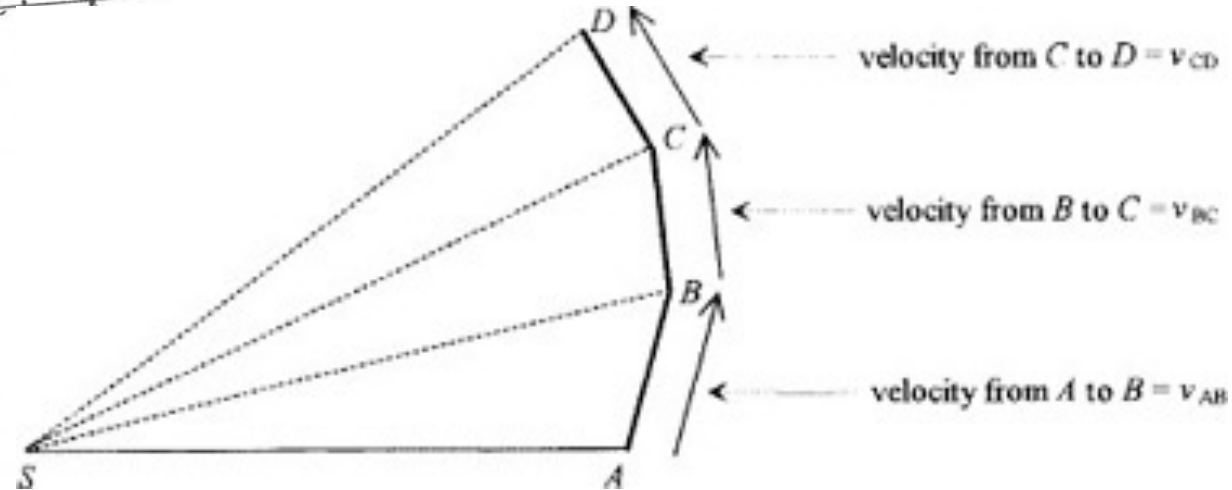
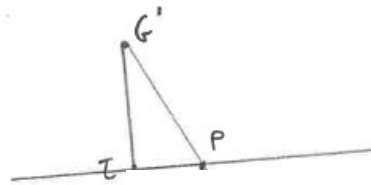


Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero

III) La terza Legge di Keplero



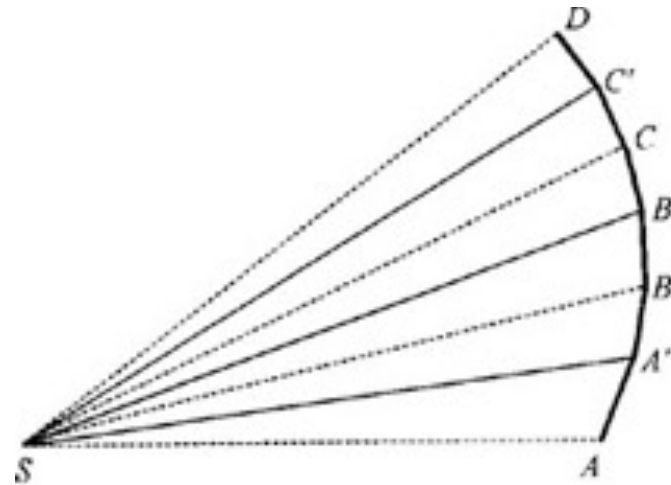
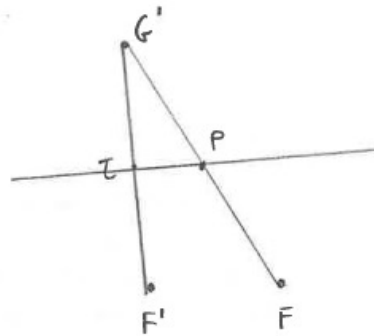
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

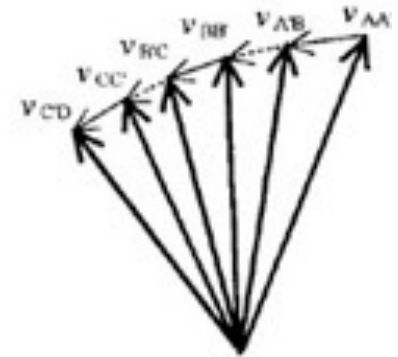
I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero

III) La terza Legge di Keplero



(position diagram)



(velocity diagram)

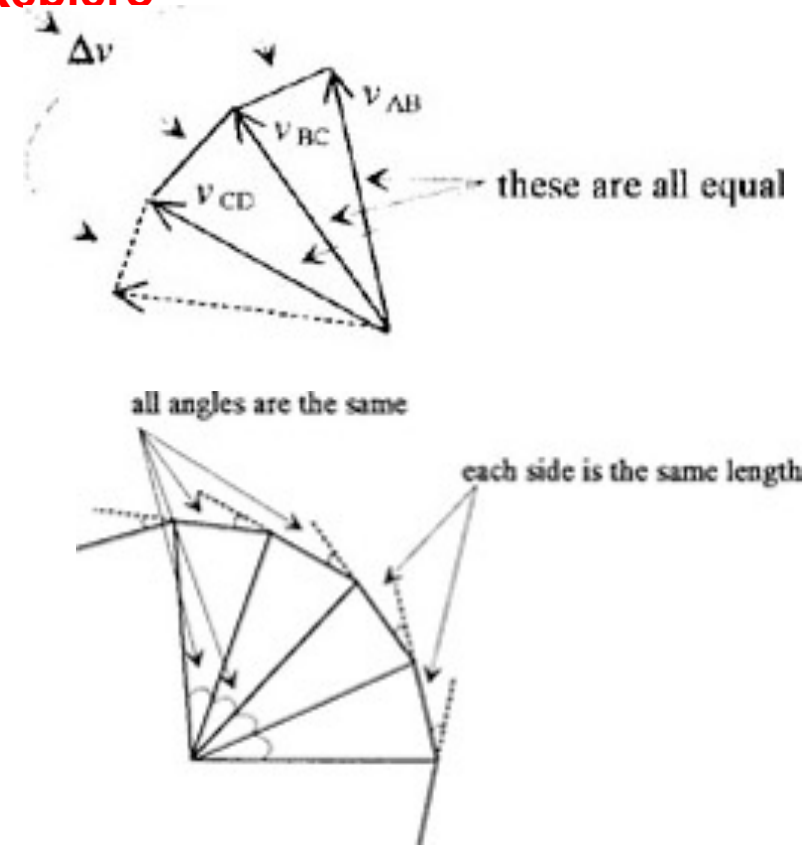
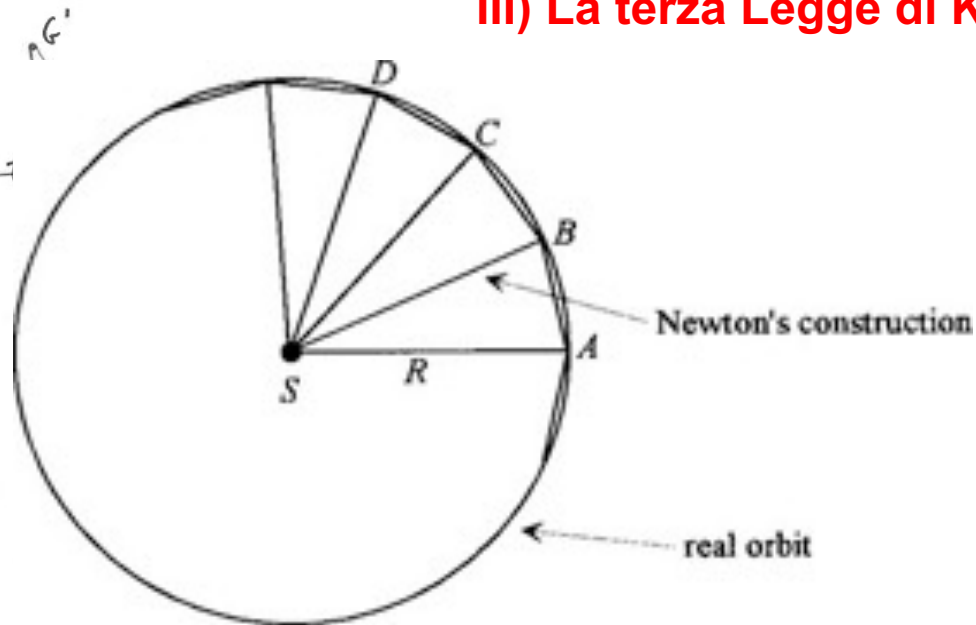
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

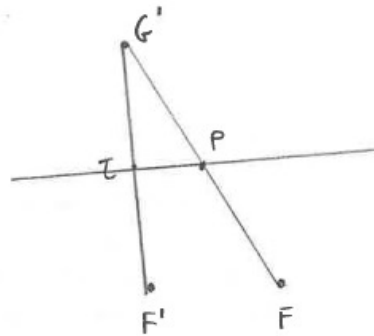
I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero

III) La terza Legge di Keplero



"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



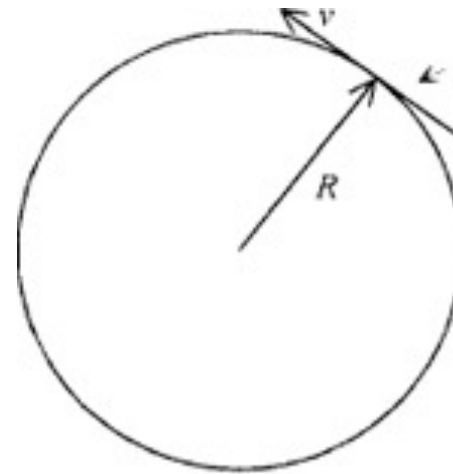
Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)

II) La seconda Legge di Keplero

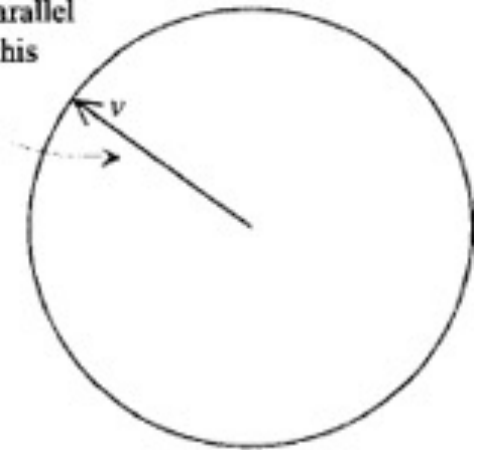
III) La terza Legge di Keplero

$$T^2 \propto R^3$$



(circular orbit)

this is parallel
to this



(circular velocity diagram)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta T} = \frac{2\pi R}{T}$$

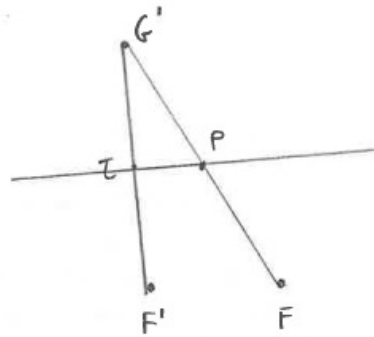
$$F \propto \frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{2\pi v}{T}$$

$$F \propto \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$F \propto 1/R^2$$

La strada di Newton

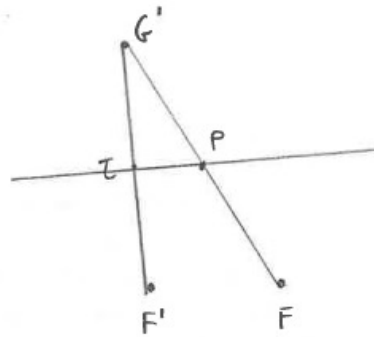
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

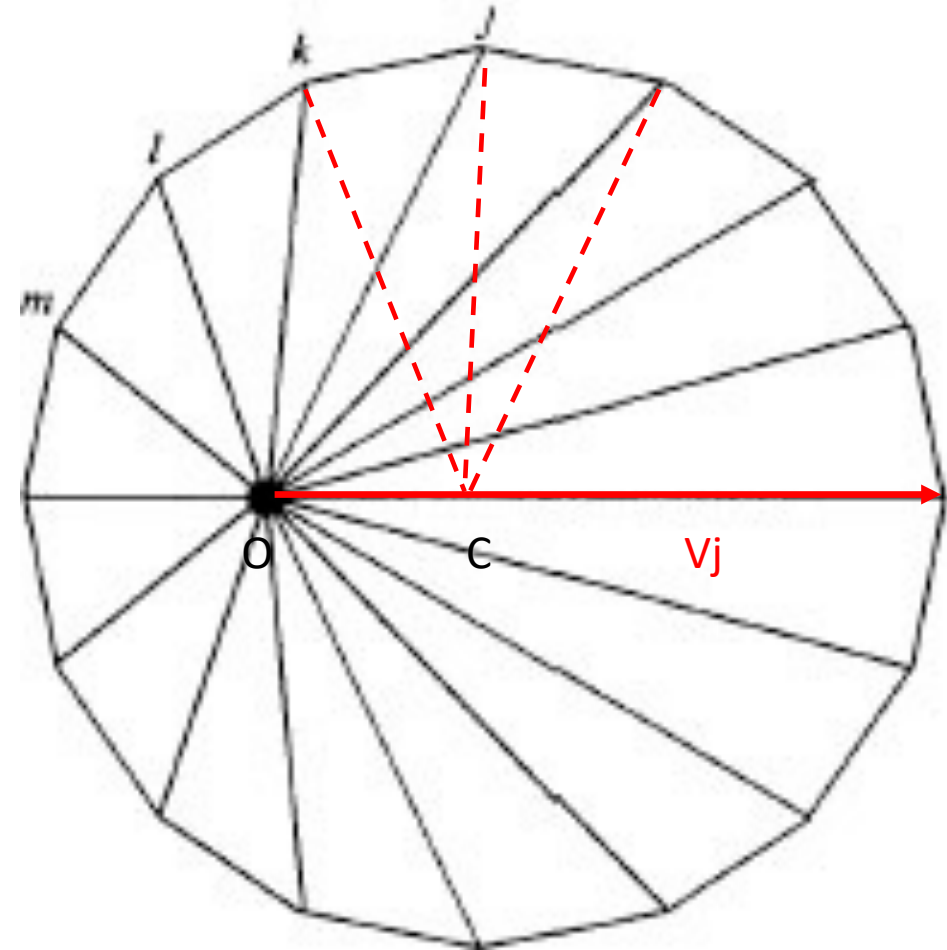
- I) Una nuova costruzione geometrica (a la Feynman)
- II) La seconda Legge di Keplero
- III) La terza Legge di Keplero
- IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero**

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero

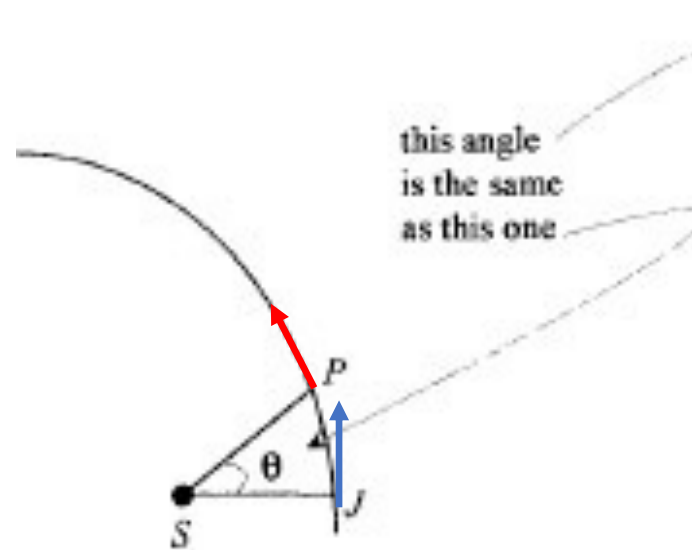
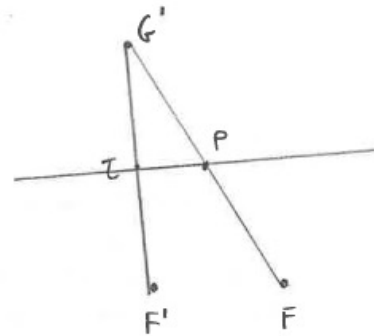


"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

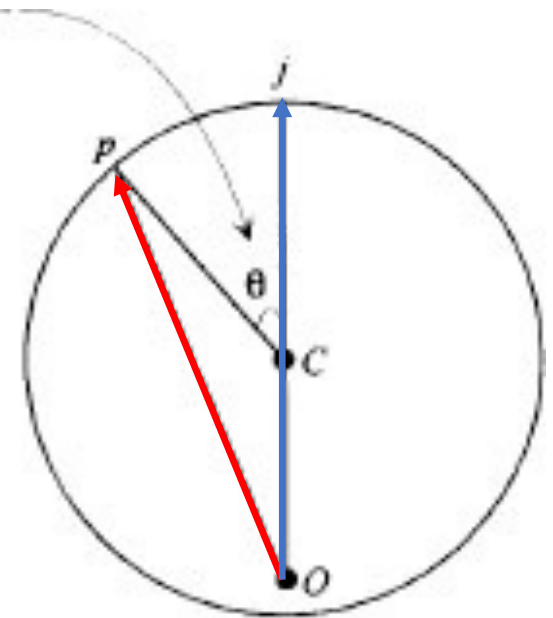


Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero



(orbit diagram)



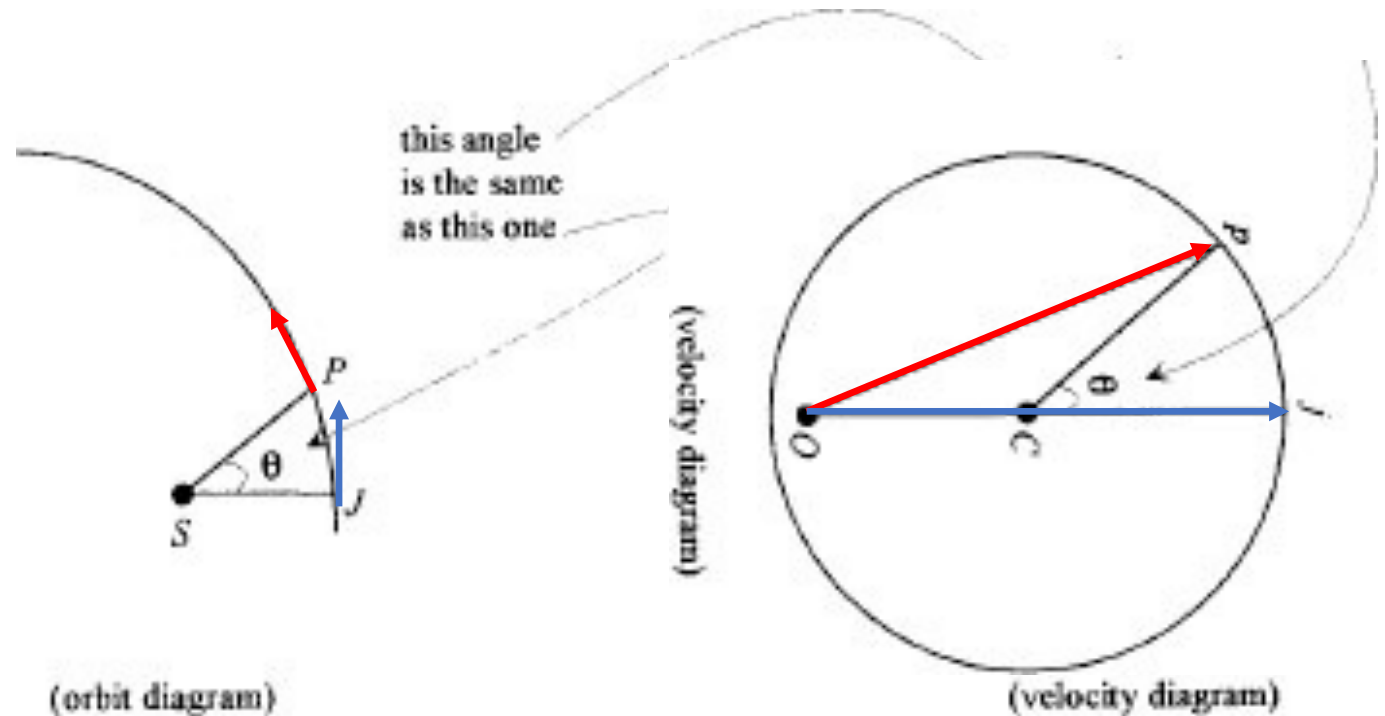
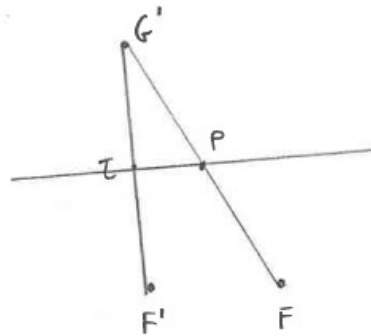
(velocity diagram)

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"

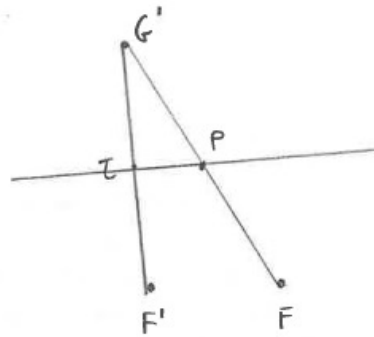


Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero



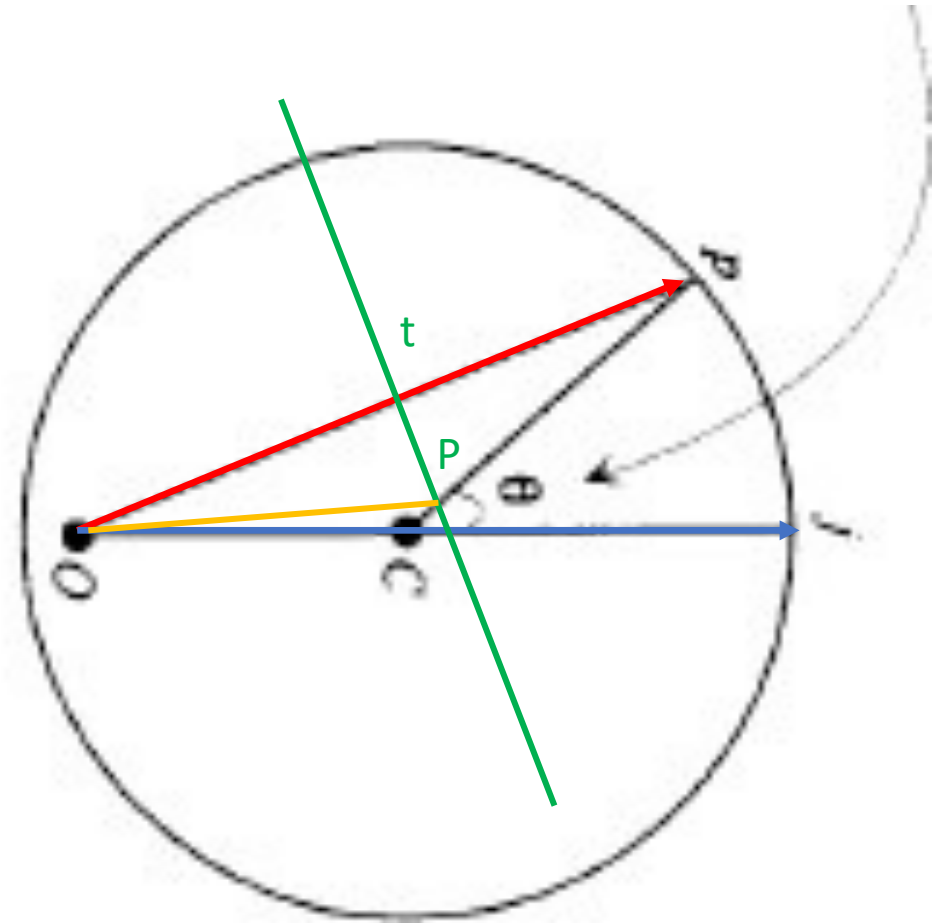
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

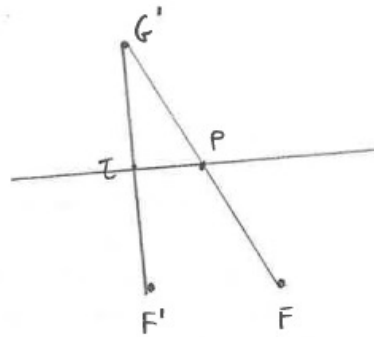
IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero

(velocity diagram)



L'ELLISSE E' UNA POSSIBILE SOLUZIONE DEL PROBLEMA! ELEMENTARE MA NON SEMPLICE

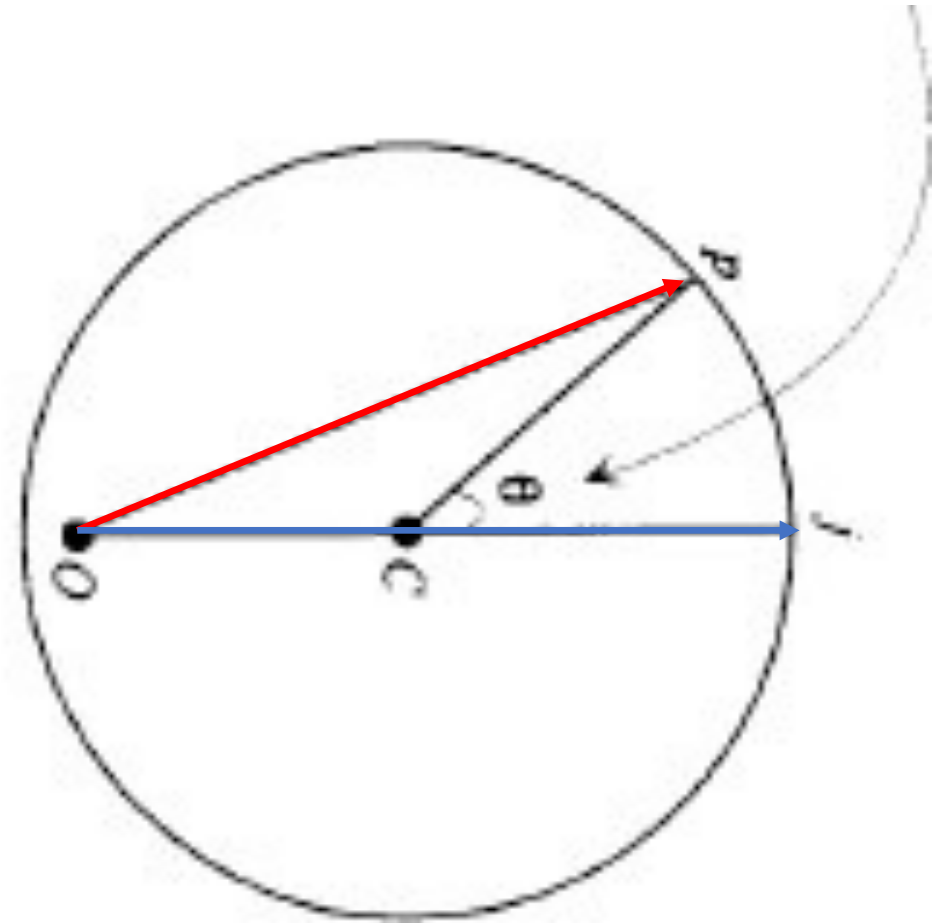
"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



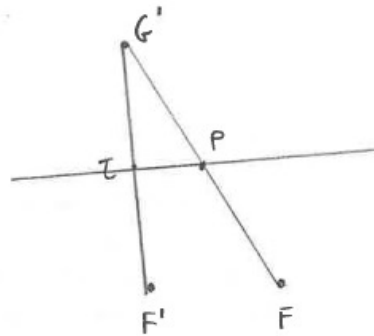
Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero

(velocity diagram)

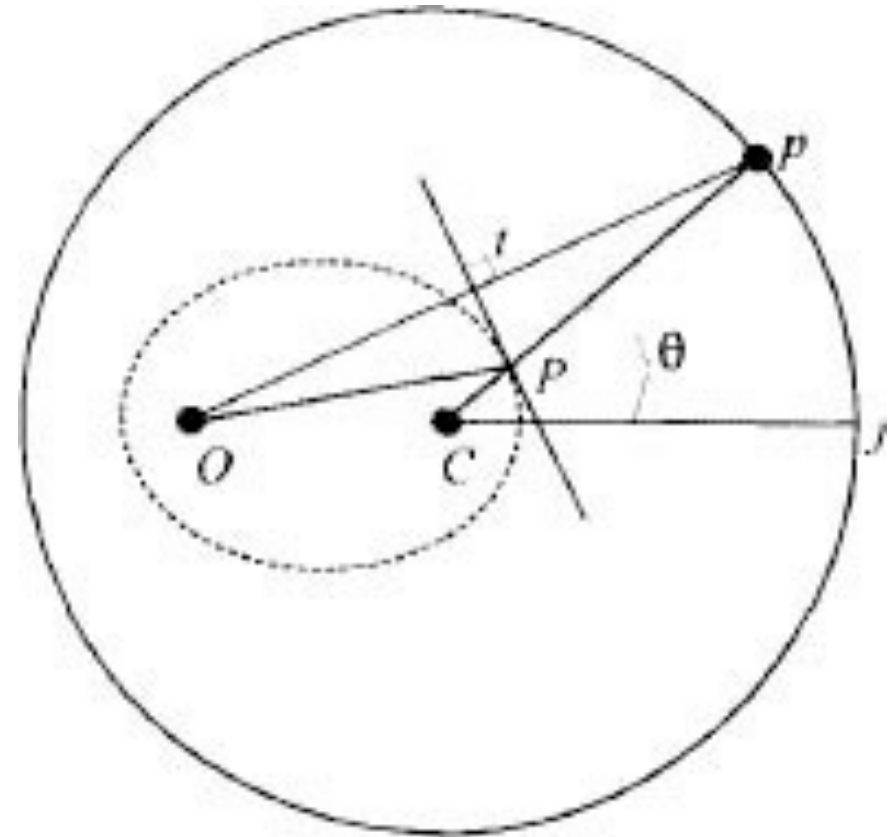


"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



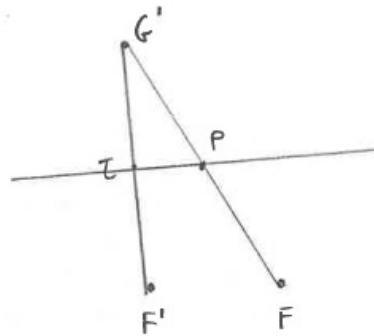
Il moto dei pianeti intorno al Sole:
una lezione di Richard Feynman

IV) Le grand final: La prima Legge di Keplero



L'ELLISSE E' UNA POSSIBILE SOLUZIONE DEL PROBLEMA! ELEMENTARE MA NON SEMPLICE

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}_0 + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{l}}_0 - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{l}_0 - \mu k \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} - \mu k \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mu k \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mu k \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = A \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}_0) - \mu k r = \mathbf{l}_0 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mu k r$$

Semplice ma ... se nasconde la natura fisica delle cose!

Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

Per i frettolosi...

Per tutti i campi centrali ai quali si associa una forza del tipo

$$\mathbf{F} = -k \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Si puo' definire una nuova costante del moto
(vettore di Laplace-Runge-Lenz)

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l}_0 - \mu k \hat{\mathbf{r}}$$

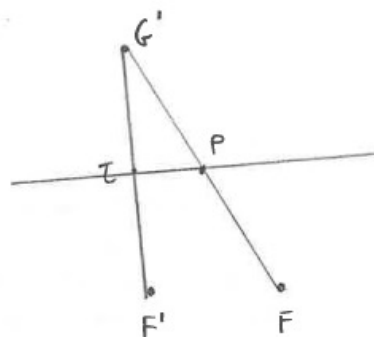
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{l}_0 = (\mathbf{p} \times \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{l}_0 - (\mu k \hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{l}_0 = 0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l_0^2} \left(1 + \frac{A}{\mu k} \cos \theta \right)$$

$$r(1 + e \cos \theta) = \frac{b^2}{a}$$

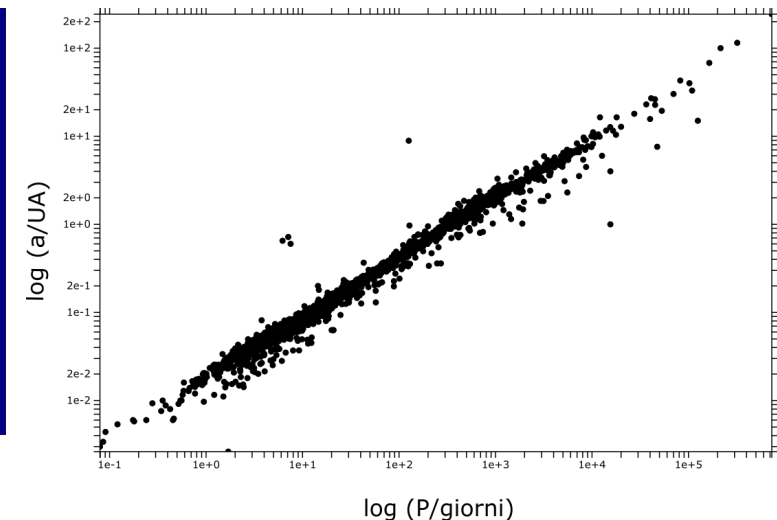
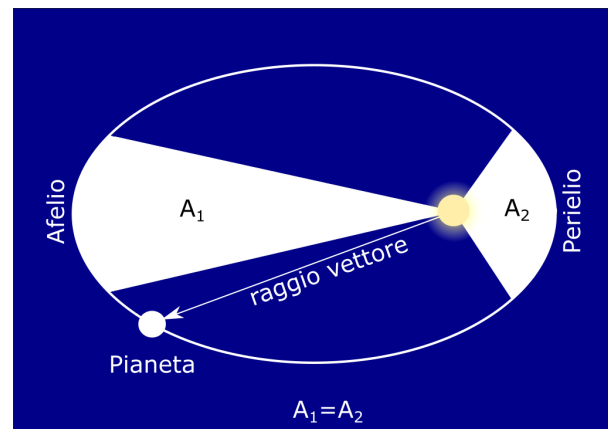


"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Il moto dei pianeti intorno al Sole: una lezione di Richard Feynman

V) Applicazioni astrofisiche



• I Legge di Keplero

La traiettoria percorsa da un pianeta attorno al Sole è un'ellisse giacente in un piano con il Sole in uno dei due fuochi.

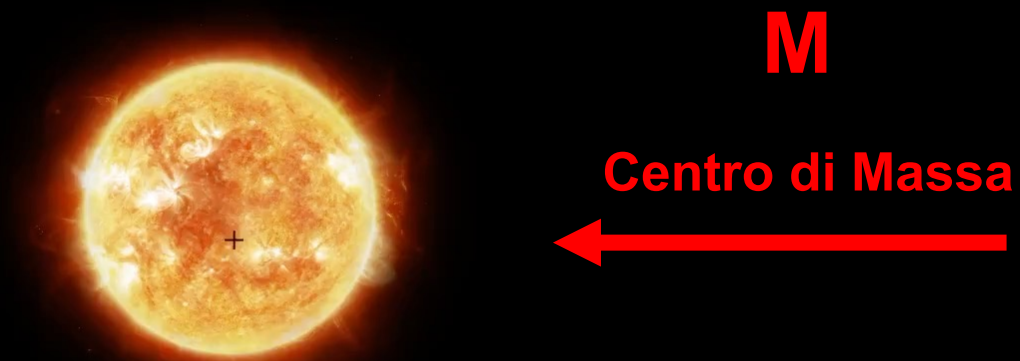
• II Legge di Keplero

Il moto di un pianeta sulla sua orbita non è uniforme. Il moto è tale che il raggio vettore che unisce il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali.

• III Legge di Keplero

Il quadrato del periodo impiegato da un pianeta a completare la sua orbita è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita stessa.

Le stelle non “danzano” da sole!



LEGGI DI KEPLERO



m

I sistemi binari costituiscono una grande risorsa dell'astrofisica in quanto è solo grazie ad essi che è possibile stimare la massa delle stelle.

I sistemi binari si dividono in sistemi *visuali*, in cui è possibile distinguere le componenti come separate, e sistemi *spettroscopici* per i quali i corpi non possono essere distinti l'uno dall'altro.

Nei sistemi binari visuali il periodo di rivoluzione e la separazione orbitale possono essere misurati direttamente, permettendo quindi di stimare la massa totale del sistema attraverso la terza legge di Keplero¹ cioè

$$G(m_1 + m_2)P^2 = 4\pi^2 a_s^3, \tag{1.73}$$

dove a_s è il semiasse maggiore dell'ellisse relativa spazzata dal vettore di posizione tra i corpi (Bradt, 2010). In Figura, s rappresenta il vettore di posizione relativo

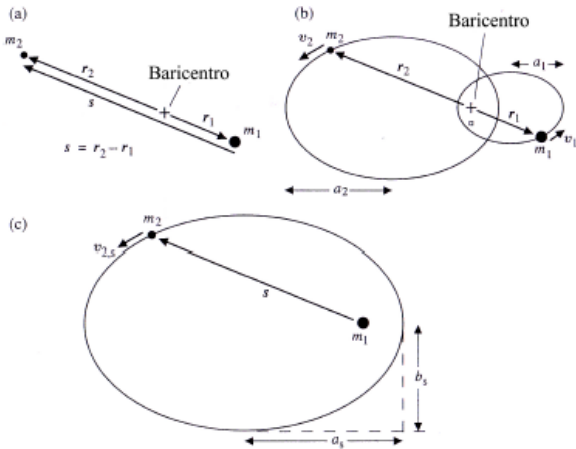


Figura 1.6: Vettori di posizione delle componenti di un sistema binario rispetto al centro di massa e rispetto ad uno dei due oggetti.

della massa m_2 rispetto alla massa m_1 , ciascuna delle quali in moto intorno al comune centro di massa su ellissi di semiassi maggiori a_2 e a_1 . In particolare, per la massa m_1 si ha

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_s. \tag{1.74}$$

Il periodo kepleriano della massa m_1 attorno al centro di massa è quindi ottenuto dalla definizione stessa di baricentro ($m_1 r_1 = -m_2 r_2$) e da $s = r_1 - r_2$. Sostituendo la (1.74) nella (1.73) (Bradt, 2010)

$$GP^2 \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = 4\pi^2 a_1^3. \tag{1.75}$$

Quello che si osserva in realtà non è il semiasse maggiore a_1 ma la sua proiezione sulla sfera celeste, in quanto il sistema binario risulta avere un'inclinazione di un angolo i rispetto al piano di vista (Figura 1.7). Per questo motivo moltiplichiamo ambo i membri per $\sin^3 i$, ottenendo così al secondo membro esattamente la proiezione sulla sfera celeste di a_1

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GP^2} (a_1 \sin i)^3.$$

←

$$v_x = \frac{2\pi a}{P} \sin i, \tag{1.76}$$

↓

$$f_1 = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_{x1}^3 P}{2\pi G}, \tag{1.80}$$

dove le grandezze misurabili sono v_{x1} e P , le quali permettono di stimare la funzione di massa f_1 . Analogamente per la funzione di massa f_2 si ha

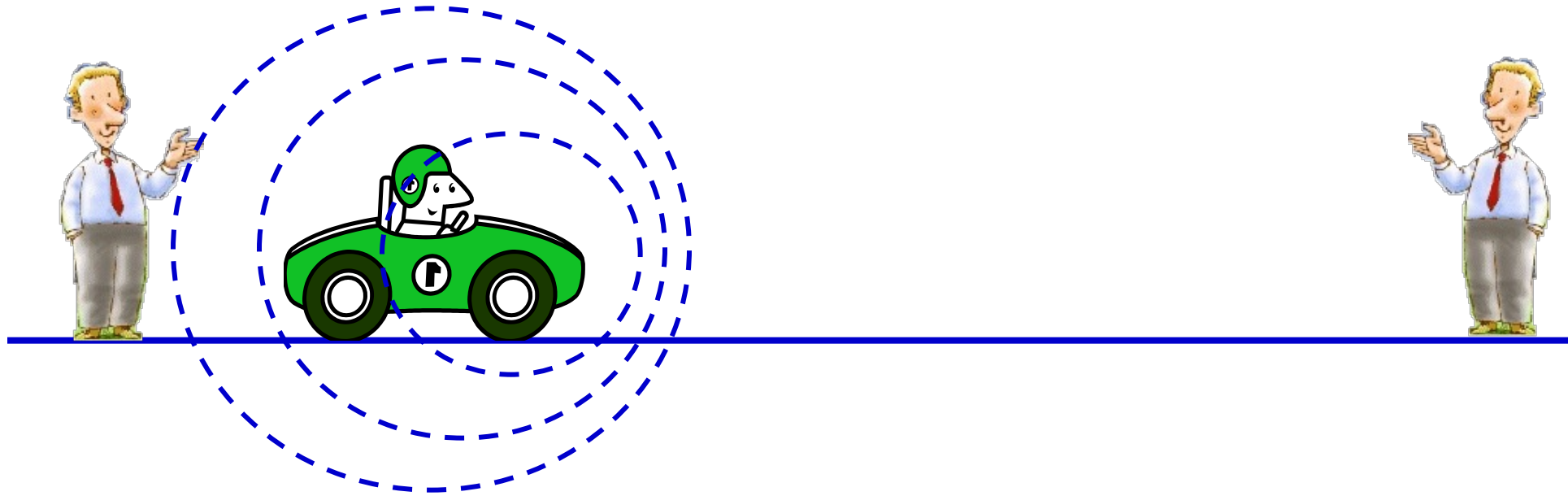
$$f_2 = \frac{m_1^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_{x2}^3 P}{2\pi G}. \tag{1.81}$$

Una volta noti i valori delle funzioni di massa f_1 ed f_2 si può ottenere il rapporto tra le due masse interagenti

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1^3}{m_2^3}. \tag{1.82}$$



P si misura facilmente: basta osservare qualcosa che si ripete “periodicamente”! Ma v ?
Fortunatamente c'è l'effetto Doppler!



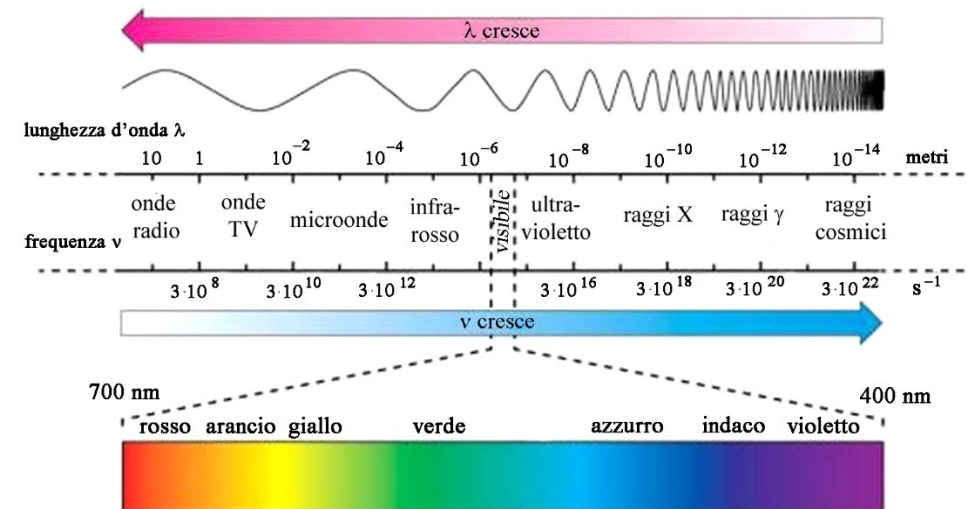
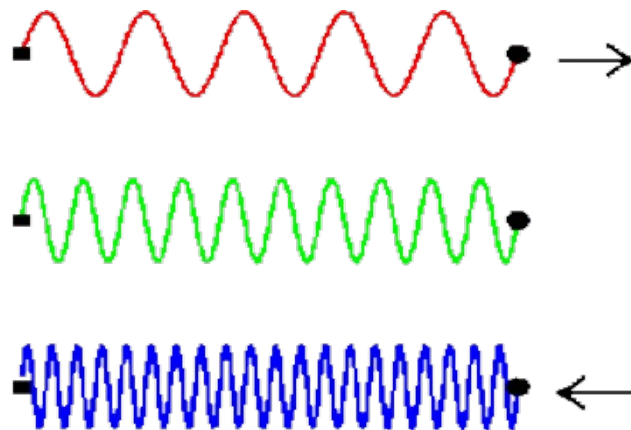
L'effetto Doppler è quel fenomeno per cui sentiamo un suono più acuto quando la sorgente si avvicina e più grave quando si allontana!



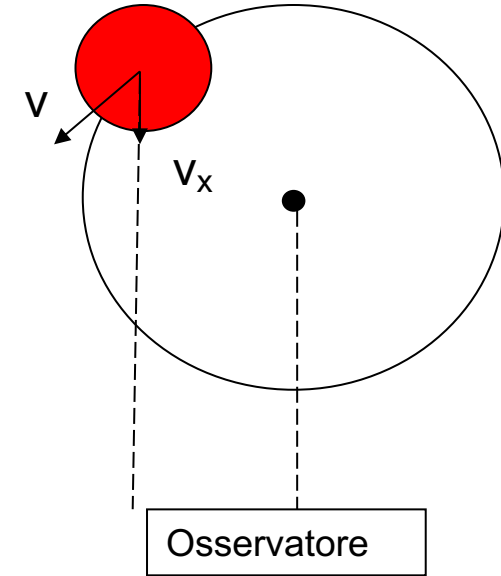
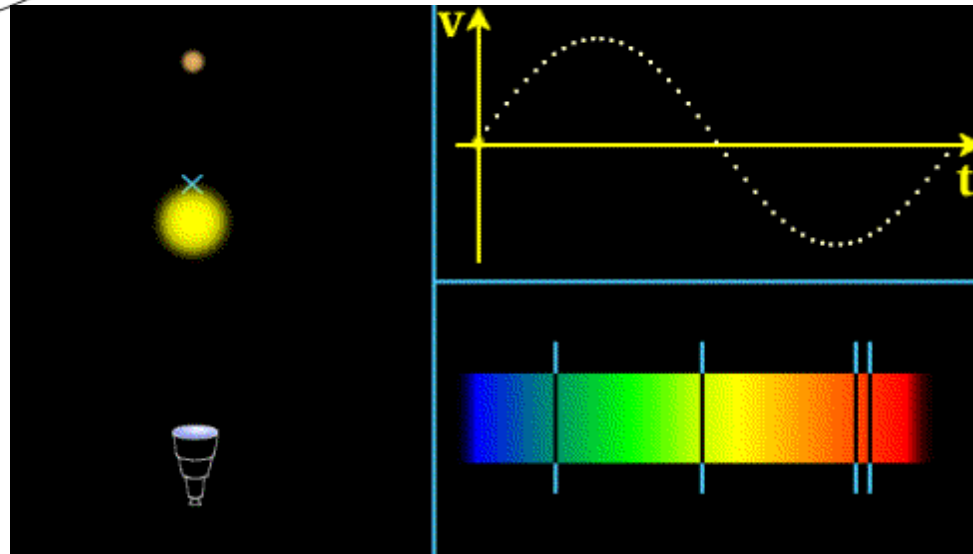
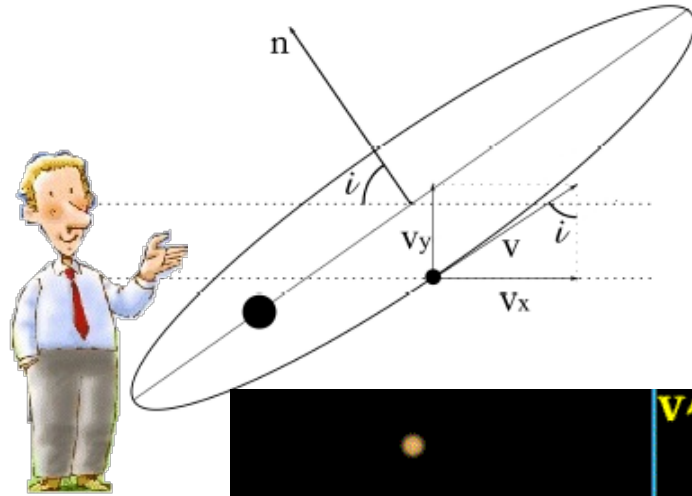
Effetto Doppler: Velocità di un oggetto (quale una galassia)!



Analogamente...una sorgente apparirà più rossa se in allontanamento e più blu se in avvicinamento ad un osservatore!



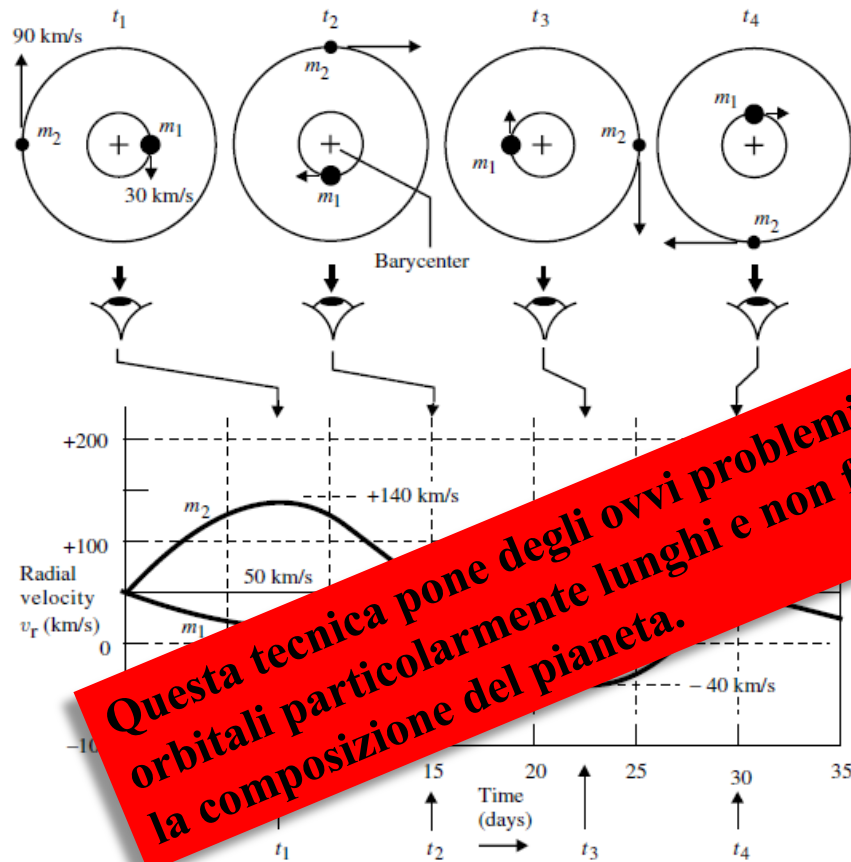
Velocità radiali



$$v_x = \frac{2\pi a}{P} \sin i,$$

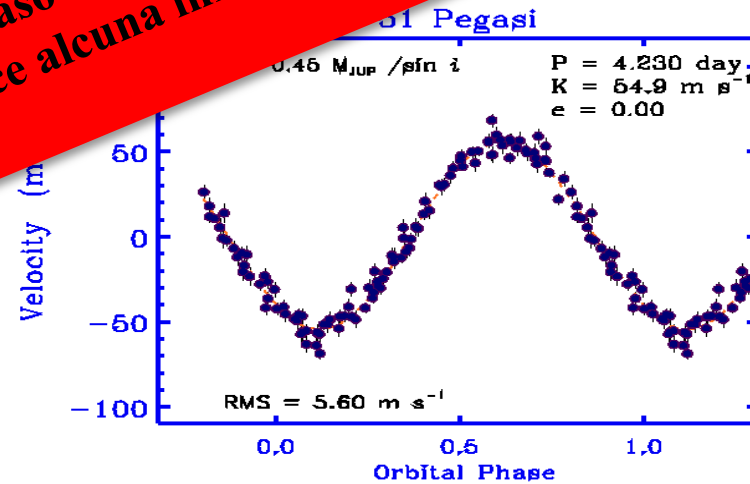
$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c.$$

Velocità radiali



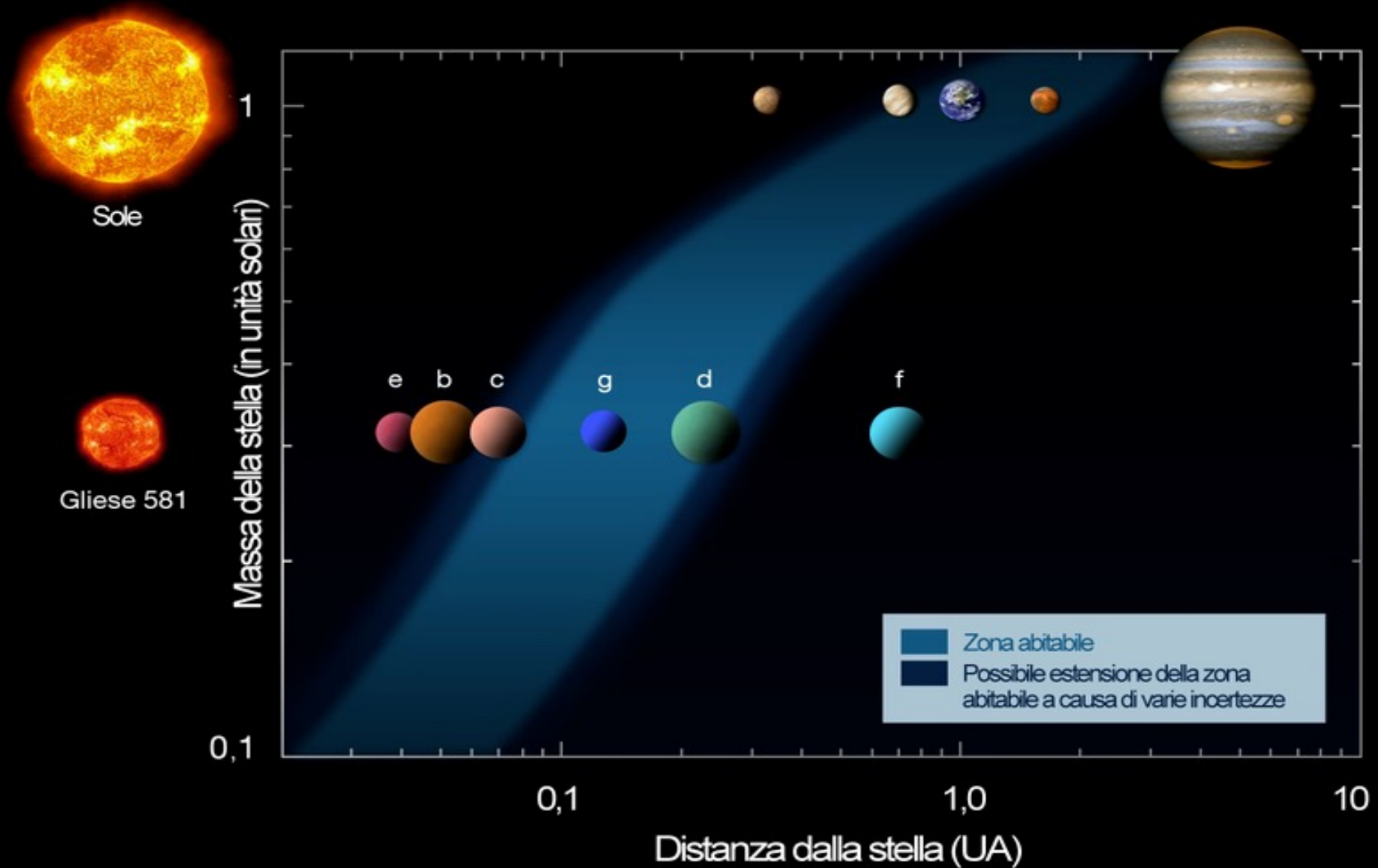
Questa tecnica pone degli ovvi problemi nel caso di pianeti poco massivi con periodi orbitali particolarmente lunghi e non fornisce alcuna informazione circa le dimensioni e la composizione del pianeta.

Se l'asse di rivoluzione del sistema coincide con la linea di vista, lo spostamento dovuto all'assorbimento della stella...

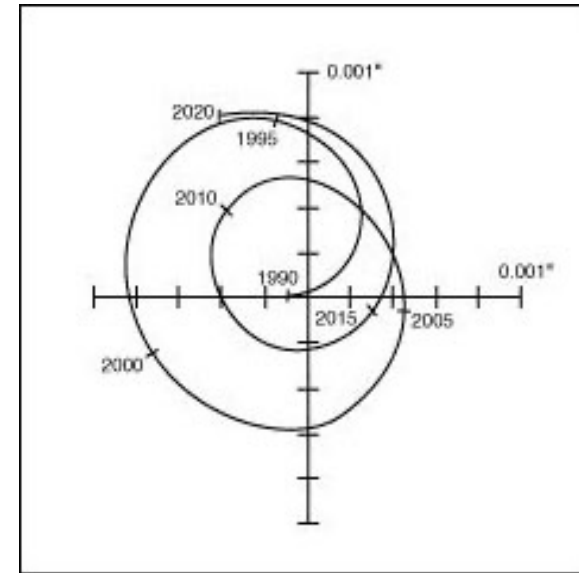


$$V = \frac{m \sin \theta}{m+M} \sqrt{G \frac{m+M}{a}} \simeq \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{m \sin \theta}{M^{2/3}}$$

I limiti delle velocità radiali: sensibilità attuale del m/s $\rightarrow$ cm/s



A causa dell'interazione esopianeta-stella, quest'ultima può variare la sua posizione rispetto alle stelle più lontane, che perciò risultano “fisse”. Dalla misura della variazione periodica della posizione relativa degli astri si possono ottenere delle utili informazioni sul pianeta che orbita attorno alla sua stella genitrice. Naturalmente lo spostamento della posizione della stella è tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto delle masse e la distanza dell'esopianeta dalla stella, secondo la relazione a lato. Nel caso del sistema Sole/Giove, visto da una distanza di 15 anni luce, $d=1$ mas (10 volte inferiore della massima risoluzione di HST).



$$d_{Stella-CM} = \frac{m}{M + m} a$$

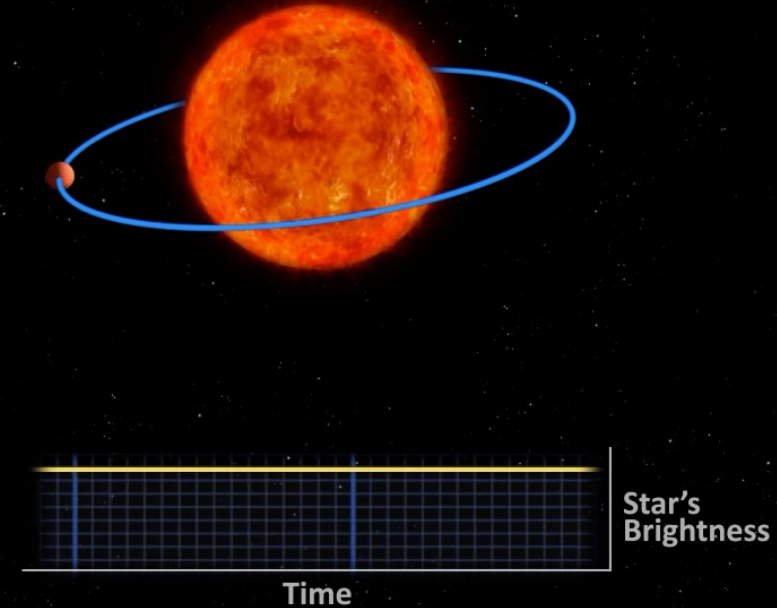
Transiti planetari

Il passaggio del pianeta davanti alla stella compagna produce una diminuzione della luminosità osservata.

L'effetto è simile ad osservare la luce di un faro lontano intorno al quale vola una falena!

La forma precisa della curva di luce dipende dalla forma e grandezza della falena (Pianeta), da dove si osserva il faro (Stella) e da quanto tempo abbiamo a disposizione!

Image:M. Weiss/CfA



Kepler's Small Habitable Zone Planets

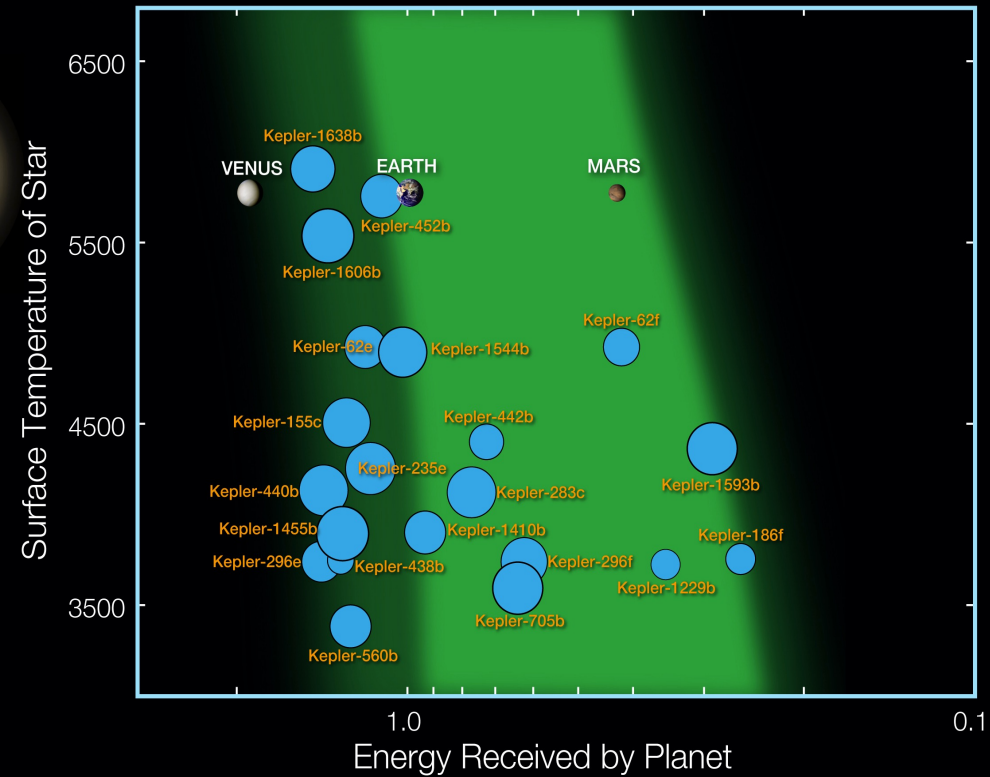
As of May 10, 2016

Ad oggi (4281)

Candidati: 2,245

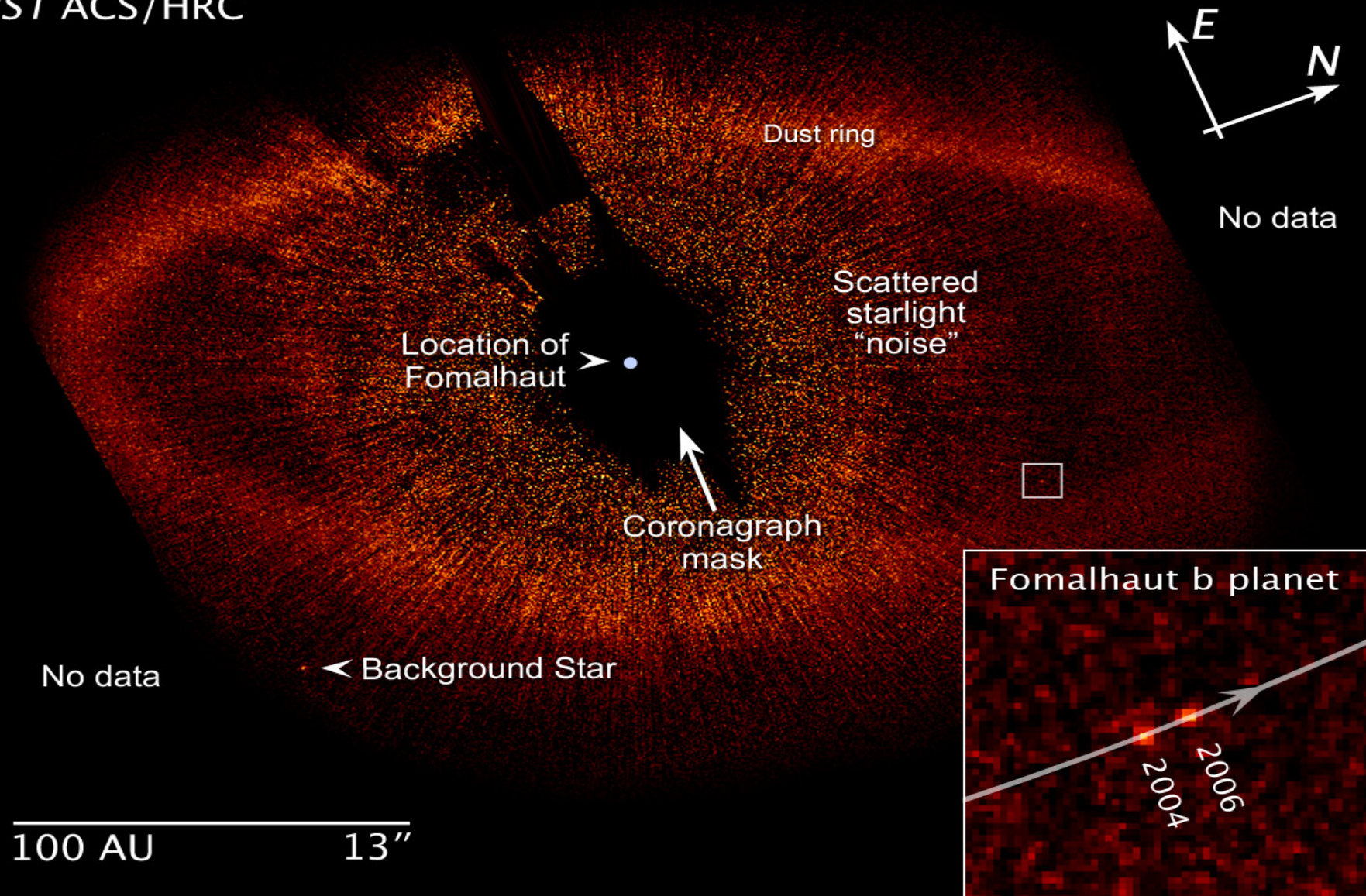
Confermati: 2,342

NELLA ZONA
ABITABILE (FORSE)
30



Immagini dirette

Fomalhaut
HST ACS/HRC



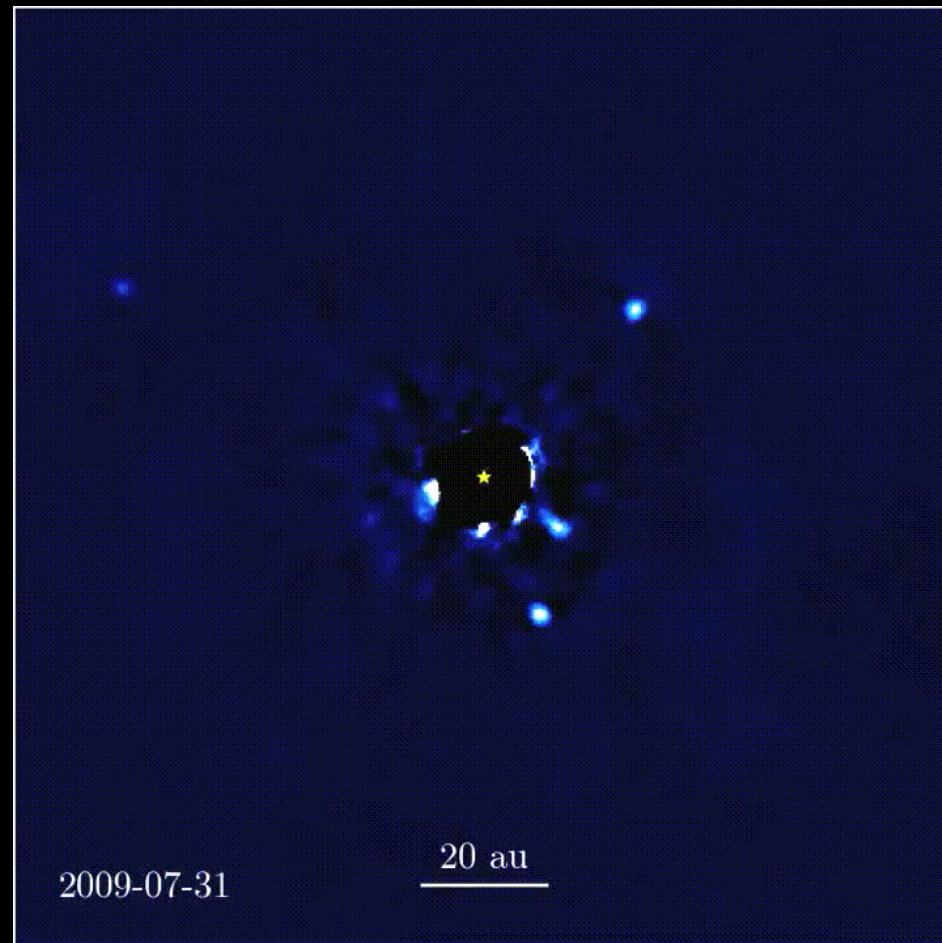
Planets Orbiting HR 8799 (Sept. 2008)

July 2004
+

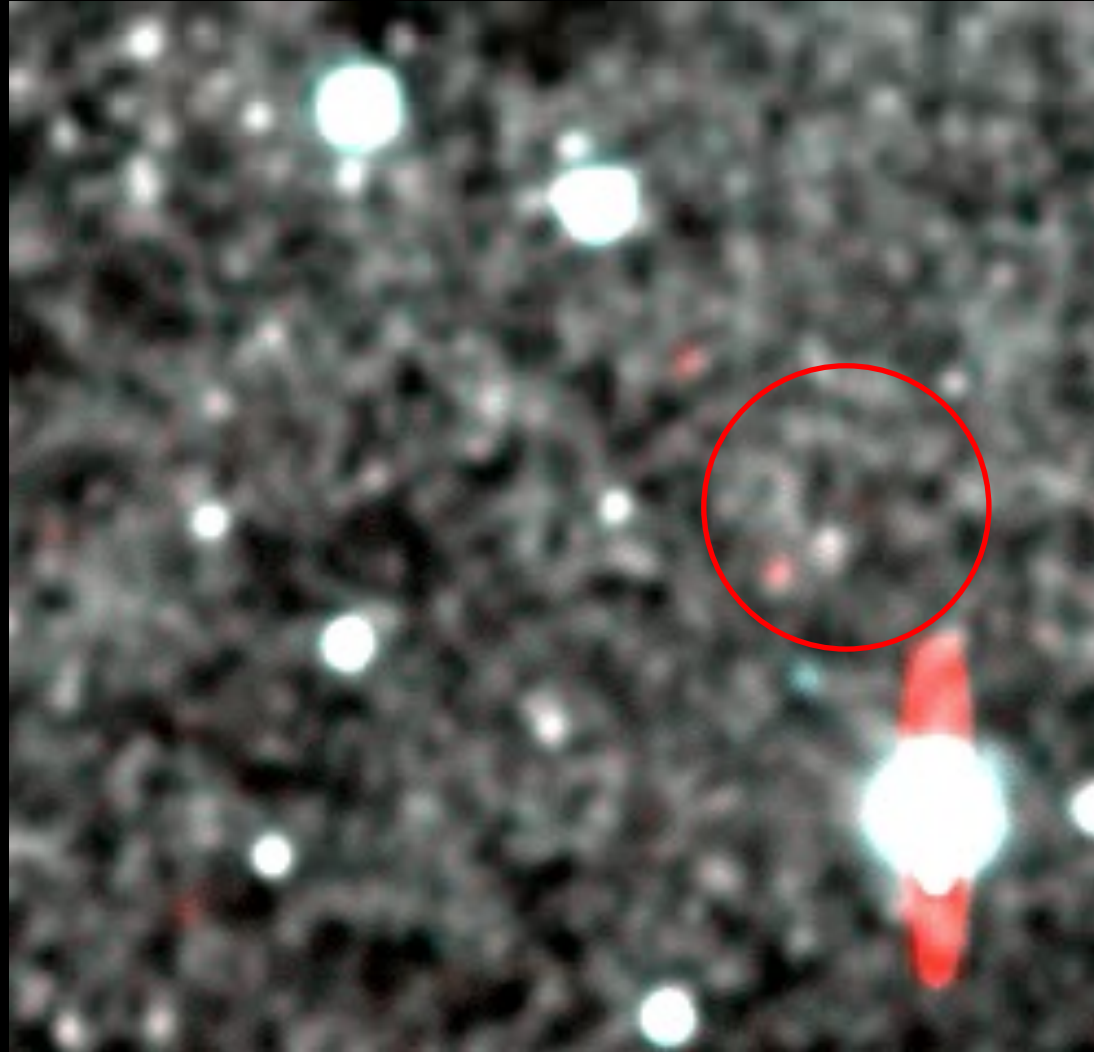
July 2004
+

July 2008
+

0.5 arcsec
20 AU

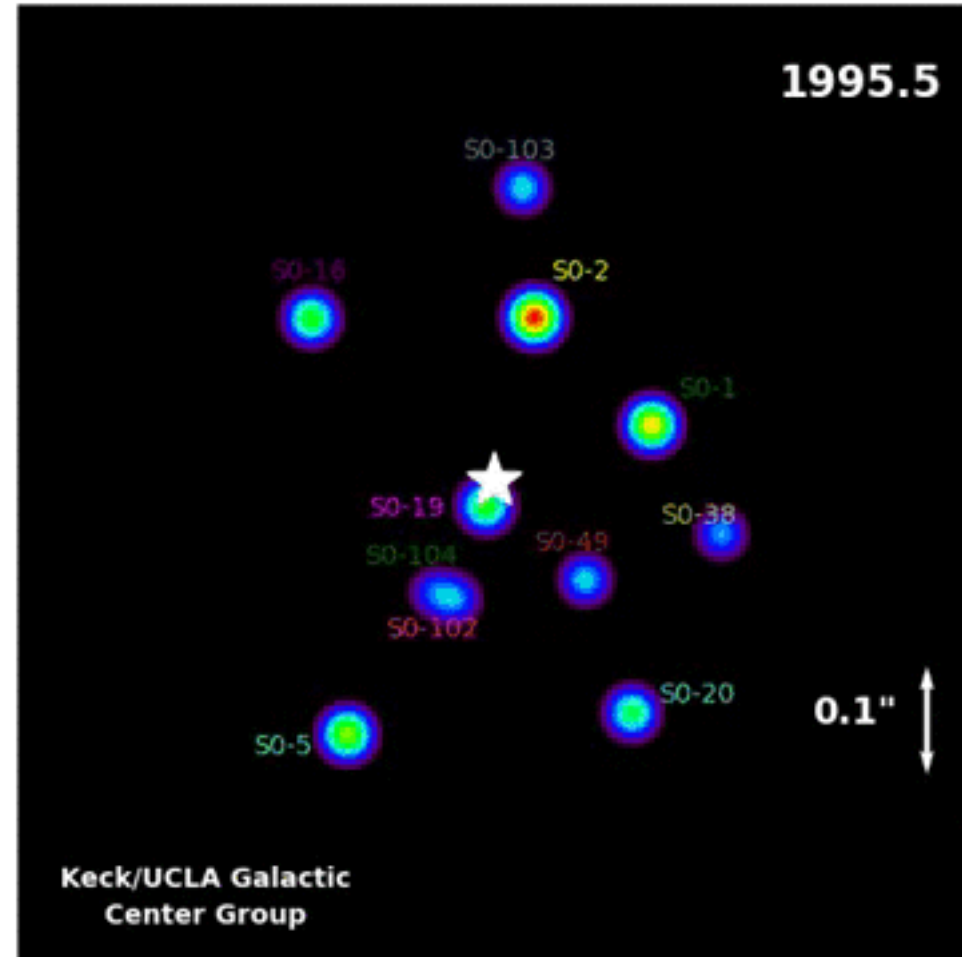
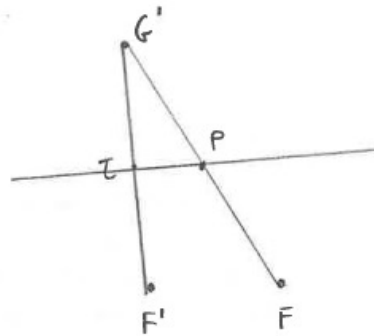


Microlensing



- **Individuato il primo candidato come pianeta extra-galattico in M31**
(Ingrosso et al., 2009)

"Simple things
have ~~simple~~
elementary
demonstration"



Grandezza	Valore
R_0	7.96 kpc
P	15.86 y
a	126.5 mas
e	0.8904
$R_{\min}$	0.535 mpc
M_{S2}	$15 M_{\odot}$

LEGGI

DI

KEPLERO

$$M_{\text{BH}} \approx M_{\text{T}} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 4.06 \times 10^6 M_{\odot}.$$

"Simple things

have ~~simple~~
elementary

demonstration"

