

INTRODUZIONE STORICA ALL'ELETTROMAGNETISMO

Marco Panareo

TERZA PARTE

Riepilogo

- Alla metà del XIX secolo attraverso i contributi di Ørsted e di Faraday si era identificata la simmetria tra i fenomeni elettrici e magnetici
- Tuttavia le interpretazioni proposte da Faraday determinavano profondi problemi, per cui era ragionevole cercare di dedurre la legge dell'induzione a partire da presupposti rigorosi e attraverso dimostrazioni matematiche
- Neumann aveva mostrato come adoperando la funzione potenziale si potesse identificare un'unica causa per l'induzione e le leggi dell'elettrodinamica
- Infine Weber, riconoscendo l'ampliamento delle conoscenze teoriche conseguito attraverso le ricerche di Faraday, Ampère, Gauss, Neumann e Lenz, aveva ricondotto la fenomenologia elettrodinamica a forze agenti tra cariche elettriche in moto, facendo dipendere tali forze dalle cariche, dalle velocità e dalle distanze
- La Fisica di Neumann e Weber era fortemente radicata nel principio dell'azione a distanza

- Nel 1855 Maxwell scrive:
 - *Esiste [...] una teoria dichiaratamente fisica dell'elettrodinamica, che è così elegante, così matematica [...] contenuta in Electro-dynamic Measurements di M. W. Weber.*
 - *Da [i suoi] assiomi sono deducibili le leggi di Ampère dell'attrazione tra i conduttori, e quella di Neumann e altri, per l'induzione di correnti.*
 - *Ecco allora una teoria realmente fisica, che soddisfa le condizioni richieste forse meglio di qualsiasi altra ancora inventata, ed è stata proposta da un ricercatore le cui ricerche sperimentali costituiscono un'ampia base per le sue indagini matematiche.*
 - *A che serve allora immaginare uno stato elettrotonico di cui non abbiamo una concezione distintamente fisica, invece di una formula di attrazione che possiamo facilmente comprendere? Risponderei che è una buona cosa avere due modi di guardare un argomento e ammettere che ci sono due modi di guardarlo.*

SCIENTIFIC MEMOIRS.

VOL. V.—PART XX.

ARTICLE XIV.

On the Measurement of Electro-dynamic Forces.
By W. WEBER.

[From Poggendorff's *Annalen*, vol. LVIII, p. 143, January 1848.]

A QUARTER of a century has elapsed since Ampère laid the foundation of electro-dynamics, a science which was to bring the laws of magnetism and electro-magnetism into their true connexion and refer them to a fundamental principle, as has been effected with Kepler's laws by Newton's theory of gravitation. But if we compare the further development which electro-dynamics have received with that of Newton's theory of gravitation, we find a great difference in the facility of these two fundamental principles. Newton's theory of gravitation has become the source of innumerable new resources in astronomy, by the splendid results of which all doubt and obscurity regarding the final principle of this science have been removed. Ampère's electro-dynamics have not led to any such result; it may rather be considered, that all the advances which have since been really made have been obtained independently of Ampère's theory,—as for instance the discovery of induction and its laws by Faraday. If the fundamental principle of electro-dynamics, like the law of gravitation, be a true law of nature, we might suppose that it would have proved serviceable as a guide to the discovery and investigation of the different classes of natural phenomena which are dependent upon or are connected with it; but if this principle is not a law of nature, we should expect that, considering its great interest and the manifold activity which during the space of the last twenty-five years that peculiar branch

VOL. V. PART XX.

2 L

Le analogie

- Con l'obiettivo di rendere fisicamente comprensibile il concetto di campo introdotto da Faraday, nella metà del XIX si svilupparono delle teorie interpretative meccanicistiche basate sulle analogie
- A partire da una osservazione espressa da Gauss in una lettera a Weber del 1845 circa l'esigenza di raggiungere una *rappresentazione formulabile* della propagazione, Maxwell sottolineò l'importanza di formulare una *rappresentazione coerente* del meccanismo del campo

ZUR ELEKTRODYNAMIK.

629

Um Missverständnisse zu verhüten, will ich noch bemerken, dass die obige Formel II auch so geschrieben werden kann

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \epsilon \right)$$

und dass ich nicht weiss, ob *Ambrose* (dessen Memoire ich wie gesagt nicht zur Hand habe) die erste oder zweite Schreibart gebraucht hat. Beide bedeuten nemlich dasselbe, und man schreibt die erste Form, wenn man die Winkel θ, θ' mit derselben (begrenzten) geraden Linie misst, also diese Linie bei dem zweiten Winkel im entgegengesetzten Sinn zum Schenkel wählt, die andere Form hingegen, wenn man eine gerade Linie von unbestimmter Länge betrachtet und zur Messung der Winkel θ, θ' , jene Linie beidermal in einseitigen Sinn auszieht. Und ebenso kann man der ganzen Formel anstatt des — Zeichens ein + Zeichen vorsezen, wenn man nicht Abtossung sondern Anziehung wie eine positive Wirkung betrachtet.

Vielleicht bin ich im Stande, mich etwas mehr wieder in diese mir jetzt so fremd gewordenen Sachen hineinzustudiren, bis Sie, wie Sie mir Hoffnung gemacht haben Ende April oder Anfang Mai mit einem Besuche erfreuen. Ich würde ohne Zweifel meine Untersuchungen längst bekannt gemacht haben, hätte nicht zu der Zeit, wo ich sie abbrach, das gefehlt, was ich wie den eigentlichen Schlussstein betrachtet hatte.

Nil actum reputans si quid supervenisset agendum
nemlich die Ableitung der Zusatzkräfte (die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Electricitätstheile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind) aus der nicht instantanen, sondern (auf ähnliche Weise wie beim Licht) in der Zeit sich fortplanzenden Wirkung. Mir hatte dies damals nicht gelingen wollen; ich verliess aber so viel ich mich erinnere die Untersuchung damals doch nicht ganz ohne Hoffnung, dass dies später vielleicht gelingen könnte, obwohl — erinnere ich mich recht — mit der subjectiven Überzeugung, dass es vorher nöthig sei, sich von der Art, wie die Fortpflanzung geschieht, eine construierbare Vorstellung zu machen.

Unter herzlichsten Grüßen an Ihre Geschwister und an Herrn Prof. Möbius
Göttingen, 19. März 1845. stets der Ihrige

C. F. GAUSS.

- Nel 1842, riflettendo sul problema di Faraday delle linee di forza curve, Thomson aveva pubblicato, in forma anonima, l'articolo dal titolo *On the Uniform Motion of Heat in Homogeneous Solid Bodies, and its connexion with the Mathematical Theory of Electricity*, poi ristampato nel 1854
- In questa memoria si proponeva di sviluppare un'analisi matematica della propagazione della forza elettrica generata da una sorgente, basata sulla teoria del calore formulata da Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1822 nella quale Thomson si era imbattuto quando aveva solo 15 anni
- Thomson comprese che le analogie tra i fenomeni termici ed elettrici gli avrebbero consentito di esplorare i processi elettrici



L.—ON THE UNIFORM MOTION OF HEAT IN HOMOGENEOUS SOLID BODIES, AND ITS CONNEXION WITH THE MATHEMATICAL THEORY OF ELECTRICITY.*

(Art. III. of complete list in *Mathematical and Physical Papers*, Vol. I.)

[From *Cambridge Mathematical Journal*, Feb. 1842. Reprinted *Philosophical Magazine* (1854, first half-year).]

[Since the following article was written,† the writer finds that most of his ideas have been anticipated by M. Chasles in two *Mémoires* in the *Journal de Mathématiques*; the first, in vol. III., on the Determination of the Value of a certain Definite Integral, and the second, in vol. V., on a new Method of Determining the Attraction of an Ellipsoid on a Point without it. In the latter of these *Mémoires*, M. Chasles refers to a paper, by himself, in the twenty-fifth *Cahier* of the *Journal de l'Ecole Polytechnique*, in which it is probable there are still further anticipations, though the writer of the present article

* [Note added June 1854].—This paper first appeared anonymously in the *Cambridge Mathematical Journal* in February 1842. The text is reprinted without alteration or addition. All the footnotes are of the present date (March 1854). The general conclusions established in it show that the laws of distribution of electric or magnetic forces in any case whatever must be identical with the laws of distribution of the lines of motion of heat in certain perfectly defined circumstances. With developments and applications contained in a subsequent paper (II. below) on the Elementary Laws of Statical Electricity (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Nov. 1845), they constitute a full theory of the characteristics of lines of force, which have been so admirably investigated experimentally by Faraday, and complete the analogy with the theory of the conduction of heat, of which such terms as "conducting power for lines of force" (*Exp. Res.* §§ 5797—5805) involve the idea.

† [Note added June 1854].—This preliminary notice was written some months later than the text which follows, and was communicated to the editor of the journal to be prefixed to the paper, which had been in his hands since the month of September 1841. The ideas in which the author had ascertained he had been anticipated by M. Chasles, were those by which he was led to the determination of the attraction of an ellipsoid given in the latter part of the paper. He found soon afterwards that he was anticipated by the same author in an enunciation of the general theorems regarding attraction; still later he found that both an enunciation and demonstration of the same general theorems had been given by Gauss, whose paper appeared in the *Monatsh.* for 1840.

T. E.

1

- Il modello fisico della diffusione del calore da una particella all'altra suggeriva un'analogia con la propagazione della forza elettrica attraverso l'azione di particelle contigue di qualche mezzo interposto, come nella teoria di Faraday della propagazione della forze elettrostatiche attraverso le particelle contigue di un dielettrico
- L'obiettivo di Thomson era quello di identificare delle relazioni tra le equazioni che potessero descrivere entrambi i fenomeni. Secondo Thomson, tali analogie matematiche costituivano punti di partenza verso analogie meccaniche più realistiche che avrebbero condotto ad una teoria fisica per la propagazione dei campi elettrici e magnetici

92 On the Elementary Laws of

Also $Q + Q' = q + q'$.
Hence we deduce $\sigma = \frac{k\rho + k'\rho'}{k + k'}$.

In the experiment described, one of the dielectrics is air. Hence, to obtain the required formula, we may put $k = 1$, in this equation, and then resolve for k .

Thus we find $k = \frac{\rho - \rho'}{\rho - \sigma}$.

If only one of the apparatus be originally charged, according as it is the first or the second, we shall have

$$k = \frac{\sigma}{\rho - \sigma},$$

or

$$k = \frac{\rho' - \sigma}{\sigma}.$$

If the substance examined (the dielectric of the first apparatus) be any gas, or air in a different state as to pressure or temperature from the air of the second apparatus, Faraday always finds the intensity after contact to be half the original intensity, and hence for every gaseous body $k = 1$.

If the dielectric of the first apparatus be solid, the intensity after contact is found to be greater than half the original intensity when the first, and less than half when the second is the apparatus originally charged. Hence for a solid dielectric, $k > 1$. For sulphur Faraday finds the value to be rather more than 2.2; for shell-lac, about 2; and for flint-glass, greater than 1.76.

The commonly received ideas of attraction and repulsion exercised at a distance, independently of any intervening medium, are quite consistent with all the phenomena of electrical action which have been here adduced. Thus we may consider the particles of air in the neighbourhood of electrified bodies to be entirely uninfluenced, and therefore to produce no effect in the resultant action on any point; but the particles of a solid non-conductor must be considered as assuming a polarized state when under the influence of free electricity, so as to exercise attractions or repulsions on points at a distance, which, with the action due to the charged surfaces, produce the resultant force at any point. It is, no doubt, possible that such forces at a distance may be discovered to be produced entirely by the action of contiguous particles of some intervening medium, and we have an analogy for this in the case of heat, where certain effects which follow the same laws are undoubtedly propagated

- Con questo programma, Thomson confrontò fenomeni fisici completamente diversi, come i problemi di diffusione di calore, di attrazione elettrostatica e di attrazione gravitazionale, rendendosi conto che tali fenomeni potevano essere descritti attraverso equazioni dello stesso tipo, semplicemente attribuendo i giusti significati a ciascun simbolo in ogni equazione.
- Ad esempio, posizionando delle sorgenti di calore puntuali con densità σ su una superficie ds , Thomson aveva trovato per la temperatura T ad una distanza r tra le sorgenti la relazione

$$T = \int_s \frac{\sigma ds}{r}$$

- che è analoga a quella che permette di stabilire il potenziale elettrostatico alla distanza r da una distribuzione superficiale di carica σ

- Gli elementi proposti da Thomson nella sua analogia sono:

Simbolo	Diffusione del calore	Attrazione elettrostatica
	Calore	Elettricità
T	Temperatura	Potenziale elettrico
σ	Sorgente di calore	Carica elettrica

- Thomson auspicava di poter sviluppare nuovi concetti per l'elettrostatica studiando equazioni che descrivevano la conduzione del calore e viceversa siccome, gli insiemi di equazioni descrittive di entrambe le discipline sono identici.
- Nel suo pensiero logico, il punto di partenza di una teoria (la legge di Coulomb) divenne il risultato dell'altra (distribuzione puntuale della temperatura della sorgente). Un'ovvia conseguenza di una teoria (il trasferimento di calore locale nella teoria di Fourier) diventava un principio essenziale dell'altra (flusso del campo attraverso una superficie)
- Quindi il contributo di Thomson consistette nel costruire un modello per l'elettrostatica, basato sul fenomeno allora già noto della diffusione di calore.

- Il programma fu ripreso nel 1845 nella memoria pubblicata l'anno successivo con il titolo *On the mathematical theory of electricity in equilibrium*
- Il tema principale di questa pubblicazione è la dimostrazione della validità della legge di Coulomb anche nell'ambito della teoria di Faraday, secondo cui la forza si trasmette attraverso il mezzo materiale e varia con la natura di tale mezzo
- Dalla sua analisi Thomson dedusse che per tenere conto del mezzo occorre dividere la forza per la costante dielettrica del materiale interposto tra i mezzi elettrizzati.
- Pertanto se nel vuoto la forza vale F_0 , in un mezzo di costante dielettrica ε si ha:

$$F = \frac{F_0}{\varepsilon}$$

- Successivamente per costruire un'immagine mentale dei fenomeni elettrici e magnetici, Thomson ipotizzò che i campi elettrici e magnetici si propagassero quasi allo stesso modo degli spostamenti in un mezzo elastico.
- Per coincidenza, nel 1845 George Gabriel Stokes aveva appena pubblicato la memoria *On the Theories of the internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids* sull'elasticità dei solidi e dei mezzi continui, presentando un nuovo approccio allo studio della dinamica dei mezzi continui.
- Stokes studiò matematicamente il moto più generale di un elemento fluido, interpretandolo come la sovrapposizione di una rotazione e tre dilatazioni o contrazioni attorno ai tre assi ortogonali x , y e z

IV. ON THE MATHEMATICAL THEORY OF ELECTRICITY IN EQUILIBRIUM.

(Art. XXXVIII. of complete list in *Mathematical and Physical Papers*, Vol. I.)

II.—A STATEMENT OF THE PRINCIPLES ON WHICH THE MATHEMATICAL THEORY OF ELECTRICITY IS FOUNDED.

[*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, March, 1848.]

57. This paper may be regarded as introductory to some others which will follow, containing various investigations in the Theory of Electricity. The fundamental mathematical principles of the phenomena of Electricity in Equilibrium are stated and explained in as concise a manner as seems consistent with clearness. To avoid lengthening the paper and unnecessarily distracting the attention of the reader, no details are given with reference to the experiments which have been, or which might be, made for establishing the various propositions asserted; and, for the same reasons, scarcely any allusion is made to the history of the subject. With regard to the nature of the evidence on which the mathematical theory of electricity rests, the reader is referred to the preceding paper "On the Elementary Laws of Static Electricity," where, besides some general explanations on the subject, the works containing accounts of the actual experimental researches of principal importance are indicated. That paper is marked as the first of a series which it was my intention to publish in this *Journal*, and of which the second now appears. In this series it will not be attempted to adhere to a systematic course of investigations such as might constitute a complete treatise on the subject; and my only reason for publishing this introductory article is for the sake of reference in other papers, there being no published work in which the principles are stated in a sufficiently concise and correct form, independently of any hypothesis, to be altogether satisfactory in the present state of science.

The Two Kinds of Electricity.

58. If a piece of glass and a piece of resin are rubbed together and then separated, it is found that they attract one another

XXII. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. By G. G. STOKES, M.A., Fellow of Pembroke College.

[Read April 14, 1845.]

The equations of Fluid Motion commonly employed depend upon the fundamental hypothesis that the mutual action of two adjacent elements of the fluid is normal to the surface which separates them. From this assumption the equality of pressure in all directions is easily deduced, and then the equations of motion are formed according to D'Alembert's principle. This appears to me the most natural light in which to view the subject; for the two principles of the absence of tangential action, and of the equality of pressure in all directions ought not to be assumed as independent hypotheses, as it sometimes does, inasmuch as the latter is a necessary consequence of the former*. The equations of motion so formed are very complicated, but yet they admit of solution in some instances, especially in the case of small oscillations. The results of the theory agree on the whole with observation, so far as the time of oscillation is concerned. But there is a whole class of motions of which the common theory takes no cognizance whatever, namely, those which depend on the tangential action called into play by the sliding of one portion of a fluid along another, or of a fluid along the surface of a solid, or of a different fluid, that action in fact which performs the same part with fluids that friction does with solids.

Thus, when a ball pendulum oscillates in an indefinitely extended fluid, the common theory gives the arc of oscillation constant. Observation however shows that it diminishes very rapidly in the case of a liquid, and diminishes, but less rapidly, in the case of an elastic fluid. It has indeed been attempted to explain this diminution by supposing a friction to act on the ball, and this hypothesis may be approximately true, but the imperfection of the theory is shown from the circumstance that no account is taken of the equal and opposite friction of the ball on the fluid.

Again, suppose that water is flowing down a straight aqueduct of uniform slope, what will be the discharge corresponding to a given slope, and a given form of the bed? Of what magnitude must an aqueduct be, in order to supply a given place with a given quantity of water? Of what form must it be, in order to ensure a given supply of water with the least expense of materials in the construction? These, and similar questions are wholly out of the reach of the common theory of Fluid Motion, since they entirely depend on the laws of the transmission of that tangential action which in it is wholly neglected. In fact, according to the common theory the water ought to flow on with uniformly accelerated velocity; for even the supposition of a certain friction against the bed would be of no avail, for such friction could not be transmitted through the mass. The practical importance of such questions as those above mentioned has made them the object of numerous experiments, from which empirical formulae have been constructed. But such formulae, although fulfilling well enough the purposes for which they were



- Nel suo articolo *On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces* pubblicato nel 1847, Thomson confrontò le equazioni che descrivevano alcuni fenomeni elettromagnetici con le equazioni per il moto generale (dilatazioni, contrazioni e rotazioni) di un elemento di un solido elastico.

[From the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. II, 1847.]

ART. XXVII. ON A MECHANICAL REPRESENTATION OF ELECTRIC, MAGNETIC, AND GALVANIC FORCES.

MR FARADAY, in the eleventh series of his *Experimental Researches in Electricity*, has set forth a theory of Electrostatic Induction, which suggests the idea that there may be a problem in the theory of elastic solids corresponding to every problem connected with the distribution of electricity on conductors, or with the forces of attraction and repulsion exercised by electrified bodies. The clue to a similar representation of magnetic and galvanic forces is afforded by Mr Faraday's recent discovery of the affection with reference to polarized light, of transparent solids subjected to magnetic or electromagnetic forces. I have thus been led to find three distinct particular solutions of the equations of equilibrium of an elastic solid, of which one expresses a state of distortion such that the absolute displacement of a particle, in any part of the solid, represents the resultant attraction at this point, produced by an electrified body; another gives a state of the solid in which each element has a certain resultant angular displacement, representing in magnitude and direction the force at this point, produced by a magnetic body; and the third represents in a similar manner the force produced by any portion of a galvanic wire; the directions of the forces in the latter cases being given by the axes of the resultant rotations impressed upon the elements of the solid.

The general equations of equilibrium of an elastic solid have

- Quindi interpretò le soluzioni delle equazioni di Stokes per le proiezioni α, β, γ sugli assi cartesiani di un piccolo spostamento del mezzo incompressibile in un punto di coordinate x, y, z ,

$$\alpha = \frac{x}{r^3}, \quad \beta = \frac{y}{r^3}, \quad \gamma = \frac{z}{r^3}$$

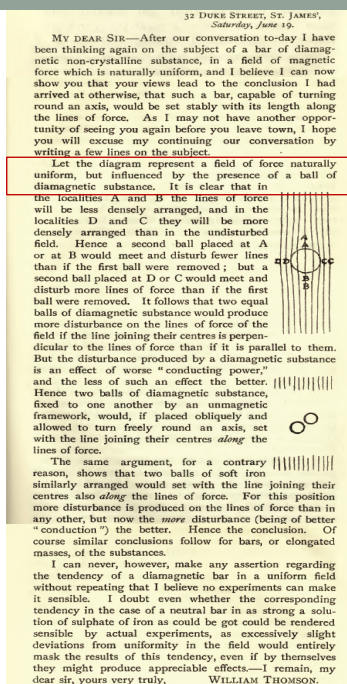
- come formalmente analoghe alle componenti del campo elettrico prodotto da una carica elettrica unitaria.

- Quindi Thomson, applicando le idee di Stokes, interpretò queste tre soluzioni delle equazioni per un solido incompressibile in analogia ai campi di una carica puntuale, di un dipolo magnetico e di un elemento di corrente.
- Confrontando le equazioni che descrivono questi fenomeni con quelle che descrivono il movimento generale di traslazione e rotazione di un elemento solido elastico, Thomson giunse alla conclusione che tali fenomeni non erano solo formalmente ma anche materialmente analoghi. L'analogia era tra il campo elettrico e lo spostamento elastico; e tra i campi elettromagnetici e magnetici e le rotazioni nell'etere con le stesse proprietà dei solidi elastici descritte da Stokes.
- Le analogie proposte da Thomson possono essere riassunte nella seguente tabella

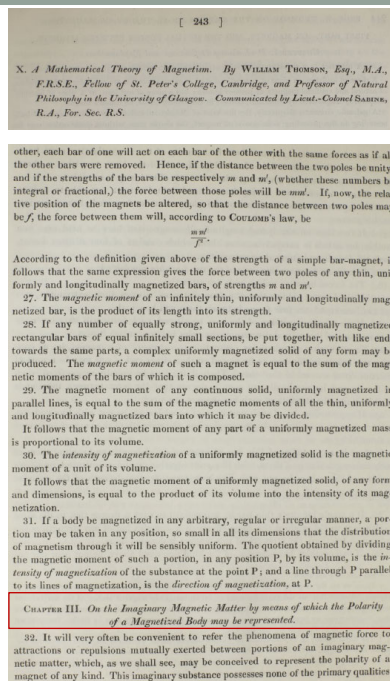
problema per i solidi elastici	problema elettromagnetico
Spostamento	Campo elettrico
Rotazione	Campo magnetico
Rotazione	Campo elettromagnetico

- Tali analogie suggeriscono in maniera esplicita la propagazione delle forze elettriche e magnetiche attraverso processi meccanici nell'etere (spostamenti, rotazioni, forze e altre grandezze meccaniche). Questo approccio influenzò notevolmente Maxwell.

- Successivamente Thomson intraprese un tentativo di formalizzazione matematica della teoria di Faraday delle linee di forza
- In una lettera a Faraday del 19 giugno 1849 abbozzò una rappresentazione delle linee di forza in un campo magnetico che chiamò *campo di forze* allo scopo di illustrare la permeabilità delle sostanze nei confronti delle linee di forza
- Questo concetto di campo magnetico fu sviluppato in una memoria pubblicata nel 1851



- Senza proporre alcun modello fisico per la trasmissione della forza magnetica tra le particelle costituenti una sostanza magnetica, nella memoria *A mathematical theory of magnetism*, Thomson rappresentò il campo magnetico come una distribuzione spaziale continua di una *materia magnetica immaginaria*
- La materia magnetica non era concepita come una sostanza materiale, ma come una sorta di incarnazione delle linee di forza della teoria di Faraday, un approccio alla rappresentazione della distribuzione spaziale del campo di forza, che consentisse l'espressione matematica della distribuzione delle linee di forza nello spazio.
- Thomson sottolineò il divario tra rappresentazione matematica e rappresentazione fisica; la sua teoria della deformazione di un solido elastico e la sua rappresentazione di linee di forza magnetica non erano da interpretare come modelli della costituzione fisica del campo, ma avevano semplicemente lo scopo di fornire illustrazioni o analogie fisiche per le teorie matematiche del campo.



- Malgrado le buone intenzioni, Thomson non riuscì nel compimento del suo programma volto a fornire una descrizione matematica completa delle linee di forza proposte da Faraday
- Quando nel 1890, dopo più di quattro decenni dall'inizio dei tentativi di formalizzazione di tali concetti, pensò di aver raggiunto questo obiettivo, lo fece con una memoria basata su un'esposizione poco comprensibile di liquidi viscosi, solidi elastici, etere e forze magnetiche:
 - *Motion of a Viscous Liquid; Equilibrium or Motion of an Elastic Solid; Equilibrium or Motion of an Ideal Substance Called for Brevity Ether; Mechanical Representation of Magnetic Force*
- Questo metteva fine alla prospettiva di formulare un'interpretazione ibrida tra magnetismo e meccanicismo delle linee di forza, per altro quando già da diversi anni l'applicazione dei modelli meccanici all'ambito elettromagnetico era ormai divenuta desueta tra i ricercatori europei

ART. XCIX. MOTION OF A VISCOUS LIQUID; EQUILIBRIUM OR MOTION OF AN ELASTIC SOLID; EQUILIBRIUM OR MOTION OF AN IDEAL SUBSTANCE CALLED FOR BREVIETY *ETHER*; MECHANICAL REPRESENTATION OF MAGNETIC FORCE.

[Now published for the first time, May, 1890.]

§§ 1—11. *Viscous liquid.*

1. *Stress required to produce change of shape.* Stokes assumed the stress to be in simple proportion to the speed of the change of shape, as basis for his mathematical theory. Poiseuille's experiments on the flow of water through capillary tubes amply confirm* this assumption, for water, and we have good reason for believing that it is very near to the truth for all ordinary fluids; with however possibly some need for correction to take into account residual effects of previous conditions, especially in the case of extremely viscous fluids such as treacle, or thick oil. But for our present purely mathematical analogy we shall, and without further question, use simply the law of simple proportionality, which implies of course undisturbed superposition of stresses and corresponding speeds and modes of change of shape.

2. (*Definitions.*) A simple shearing infinitesimal distortion, or as it is also called a simple distortion, is a distortion in which there are equal elongations and shortenings in two mutually perpendicular lines, and therefore, (the substance being incompressible) neither elongation nor shortening in the line perpendicular to both. The numerical reckoning of a simple distortion† is the difference from a right angle, reckoned in radian, which the distortion produces on the angle between lines bisecting the angles between the lines of greatest elongation and greatest shortening. This reckoning is easily proved to be equal to the greatest elongation, or equal to the greatest shortening. The *speed* of a simple distortional change of shape is the angular velocity at which the

* See Art. xcii. Part 1. above, p. 21, § 29, and insert Poiseuille's name there accordingly.

† See Art. xcii. Part 1. above, p. 33, § 43, and p. 91, example (4).

- Nel 1854 Maxwell inviò a Thomson una lettera in cui delineava le proprie idee sulle linee di forza e, in particolare, sul loro possibile impiego nell'analisi delle connessioni esistenti tra la forza magnetica e la corrente elettrica. Thomson non aveva trattato pubblicamente quest'ultimo argomento, sul quale Maxwell decise di elaborare una serie di idee geometriche.
- Nei mesi seguenti egli modificò e sviluppò le nozioni di base introdotte nella lettera a Thomson, rendendole note nella sua prima grande opera, *On Faraday's lines of force*, divisa in due parti e pubblicata nel 1856.
- In essa Maxwell ricorre al metodo dell'analogia usato da Thomson riconducendo le proprietà geometriche di un fluido viscoso e incompressibile a quelle dei campi elettrici, magnetici e delle correnti.
 - *Per ottenere idee fisiche senza adottare una teoria fisica, dobbiamo familiarizzare con l'esistenza delle analogie fisiche. Per analogia fisica intendo quella parziale somiglianza tra le leggi di una scienza e quelle di un'altra che fa sì che ciascuna di esse illustri l'altra. Così tutte le scienze matematiche sono fondate sulle relazioni tra leggi fisiche e leggi numeriche, cosicché lo scopo della scienza esatta è di ridurre i problemi della natura alla determinazione di quantità mediante operazioni numeriche*



LETTER TO WILLIAM THOMSON

13 NOVEMBER 1854

From the original in the University Library, Cambridge⁽¹⁾

Trin. Coll.
Nov 13/54

Dear Thomson

I have heard very little of you for some time except thro' Hopkins & Stokes, but I suppose you are at work in Glasgow as usual. Do you remember a long letter you wrote me about electricity, for wh: I forget if I thanked you?

I soon involved myself in that subject, thinking of every branch of it simultaneously, & have been rewarded of late by finding the whole mass of confusion beginning to clear up under the influence of a few simple ideas. As I wish to study the growth of ideas as well as the calculation of forces, and as I suspect from various statements of yours that you must have acquired your views by means of certain conceptions which I have found great help, I will set down for you the confessions of an electrical freshman.

I got up the fundamental principles of electricity of tension easily enough.⁽²⁾ I was greatly aided by the analogy of the conduction of heat, wh: I believe is your invention at least I never found it elsewhere.⁽³⁾ Then I tried to make out the theory of attractions of currents but tho' I could see how the effects could

(1) ULC Add. MSS 7362, M 89. Previously published in Larmor, 'Origins', 701-5.

(2) That is: 'potential'. See Number 50.

(3) [William Thomson,] 'On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity', *Cam. Math. J.* 3 (1862): 71-84, esp. 73-4 (= *Phil. Mag.*, ser. 4, 7 (1854): 302-15 [June 1854 Supplement]); *Electricity and Magnetism*: 1-14. Thomson's analogy is between temperature and potential, fluxes or forces flow continuously across isothermal or equipotential disjunct surfaces. He establishes that: 'the sole condition of equilibrium of electricity, distributed over the surface of a body, is, that it must be so distributed that the attraction on a point at the surface, oppositely electrified, may be perpendicular to the surface. Since, at any of the isothermal surfaces, t (temperature) is constant, it follows that $-d\phi/ds$, where s is the length of a curve which cuts all the surfaces perpendicularly, measured from a fixed point to the point attracted, is the total attraction on the latter point; and that this attraction is to a tangent to the curve, or is a normal to the isothermal surface passing through the point... $-d\phi/ds$ will be the total flux of heat at the variable extremity of s , and the direction of this flux will be along s , or perpendicular to the isothermal surface. Hence, if a surface in an infinite solid be retained at a constant temperature, and if a conducting body, bounded by a similar surface, be electrified, the flux of heat, at any point, in the first case, will be proportional to the attraction on an electrical point, similarly situated, in the second; and the direction of the flux will correspond to that of the attraction.' See note (13); and see M. N. Wise, 'The flow analogy to electricity and magnetism, Part I: William Thomson's reformulation of action at a distance', *Archiv für History of Exact Sciences*, 25 (1981): 19-70.

- Maxwell si spinse oltre Thomson non soltanto nell'uso dell'analogia ma anche nell'approfondire la fondamentale distinzione, introdotta da Faraday, tra quantità e intensità di un campo (in seguito denominati *flusso* e *forza*), cercando di sviluppare una serie di connessioni geometriche tra questi due aspetti del campo.
- Nel caso dell'elettricità, la struttura elaborata era identica a quella ideata da Faraday per i corpi dielettrici, dal momento che la quantità del campo elettrico, è proporzionale alla sua intensità o, più esattamente, all'intensità del campo, proprio come la portata di un liquido è proporzionale al gradiente di pressione che gli consente di vincere la resistenza.
- Allo stesso modo, nella magnetostatica vi era un rapporto di proporzionalità diretta tra una quantità magnetica (l'induzione) e l'intensità del campo magnetico. La quantità di corrente elettrica, infine, è a sua volta proporzionale alla sua intensità, ossia alla forza elettrica (il che equivaleva alla legge di Ohm).
- Maxwell illustra così i suoi obiettivi
 - *il mio intento è limitato a mostrare come, attraverso una stretta applicazione delle idee e dei metodi di Faraday, sia presentabile chiaramente, ad una mente matematica, il collegamento tra gli ordini fenomenici tra loro differenti che Faraday ha scoperto*

It is by the use of analogies of this kind that I have attempted to bring before the mind, in a convenient and manageable form, those mathematical ideas which are necessary to the study of the phenomena of electricity. The methods are generally those suggested by the processes of reasoning which are found in the resources of Faraday*, and which, though they have been interpreted mathematically by Prof. Thomson and others, are very generally supposed to be of an indefinite and unmathematical character, when compared with those employed by the professed mathematicians. By the method which I adopt, I hope to render it evident that I am not attempting to establish any physical theory of a science in which I have hardly made a single experiment, and that the limits of my design is to show how, by a strict application of the ideas and methods of Faraday, the connexion of the very different orders of phenomena which he has discovered may be clearly placed before the mathematical mind.

I shall therefore avoid as much as I can the introduction of anything which does not serve as a direct illustration of Faraday's methods, or of the mathematical deductions which may be made from them. In treating the simpler parts of the subject I shall use Faraday's mathematical methods as well as his ideas. When the complexity of the subject requires it, I shall use analytical notation, still confining myself to the development of ideas originated by the same philosopher.

I have in the first place to explain and illustrate the idea of "lines of force."

When a body is electrified in any manner, a small body charged with positive electricity, and placed in any given position, will experience a force urging it in a certain direction. If the small body be now negatively electrified, it will be urged by an equal force in a direction exactly opposite.

The same relations hold between a magnetic body and the north or south poles of a small magnet. If the north pole is urged in one direction, the south pole is urged in the opposite direction.

In this way we might find a line passing through any point of space, such that it represents the direction of the force acting on a positively electrified particle, or on an elementary north pole, and the reverse direction of the force on a negatively electrified particle or an elementary south pole. Since at every point of space such a direction may be found, if we commence at any point and draw a line so that, as we go along it, its direction at any point shall always coincide with that of the resultant force at that point, this curve will indicate the direction of that force for every point through which it passes, and might be called on that account a *line of force*. We might in the same way draw other lines of force, till we had filled all space with curves indicating by their direction that of the force at any assigned point.

- Nella prima parte della memoria, Maxwell, adoperando la tecnica dell'analogia, mise in luce la connessione tra il flusso di un fluido incompressibile e le linee di forza magnetiche
- Con riferimento ad un volume V circoscritto da una superficie S , il flusso di massa per unità di tempo attraverso un elemento di superficie $d\vec{s}$ è $\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$, in cui $\vec{v}$ è la velocità del fluido e ρ la densità. Pertanto la massa totale che attraversa la superficie chiusa S è pari all'integrale attraverso S di $\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$. Tale quantità è uguale al tasso di diminuzione della massa contenuta nel volume V

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

- Quindi:

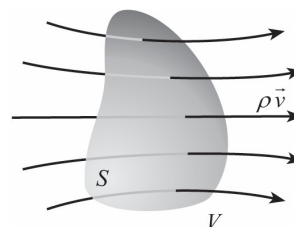
$$\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau$$

- Attraverso l'applicazione del teorema della divergenza all'integrale al secondo membro si trova

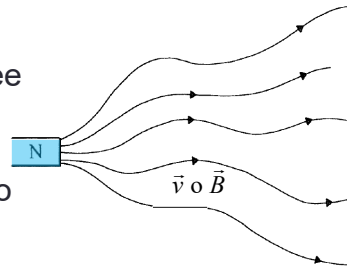
$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Se il fluido è incompressibile, ρ non dipende dal tempo e dalle coordinate spaziali, pertanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$



- A partire da tale considerazione Maxwell, stimolato dai concetti di linee e tubi di forza introdotti da Faraday, tracciò un'analogia tra il comportamento delle linee del campo magnetico e le linee di flusso di un fluido incompressibile.



- Osservando che, ad esempio, se i tubi o le linee di flusso, divergono, l'intensità del campo diminuisce, così come la velocità del fluido, Maxwell fece corrispondere alla velocità $\vec{v}$ la densità di flusso magnetico $\vec{B}$.
- Ciò suggerisce che il campo magnetico può essere caratterizzato dalla relazione analoga a quella soddisfatta dalla velocità del fluido incompressibile:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Con un approccio analogo Maxwell dedusse che nello spazio libero, in assenza di cariche elettriche, deve risultare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

- D'altra parte conoscendo l'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- e il legame tra il potenziale elettrostatico ed il campo elettrico, formalizzò la legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

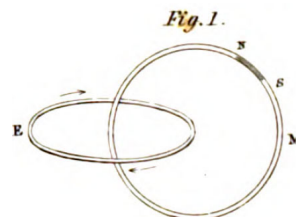
I vettori

- Nella memoria *On Faraday's lines of force* Maxwell riconobbe la distinzione tra i vettori $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ già introdotti da Thomson, associando $\vec{B}$ al flusso magnetico e riferendosi ad esso come *l'induzione magnetica*, e $\vec{H}$ alle forze, chiamandola *intensità magnetica*.
- La velocità $\vec{v}$ è associata alla densità di flusso di un fluido incompressibile attraverso una superficie unitaria, così come $\vec{B}$, la densità di flusso magnetico, è il flusso di un campo vettoriale;
- $\vec{H}$, l'intensità del campo magnetico, è associata alla forza su un polo magnetico unitario
- Sebbene esprimessero grandezze fisiche ancora non aderenti al concetto di campo elettromagnetico, in questa memoria Maxwell utilizzò questi vettori magnetici e il vettore elettrico $\vec{E}$ per ottenere due risultati notevoli:
 - La legge di Ampère, basata sui risultati sperimentali ottenuti da Ampère e da Faraday
 - La formalizzazione del fenomeno dell'induzione attraverso il concetto di stato elettrotonico introdotto da Faraday e che Maxwell inizialmente denominò *intensità elettrotonica*

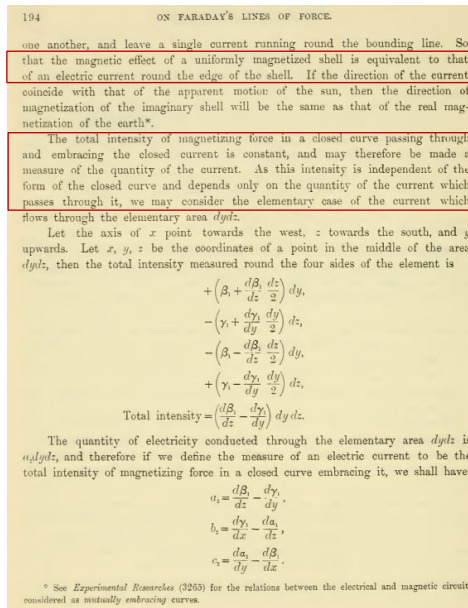
La legge di Ampère

- Maxwell fu guidato nella formulazione della legge di Ampère dalla correlazione fra corrente elettrica e forza magnetica espressa da Faraday nella memoria *On the physical character of the lines of force*, in cui viene espressa la relazione tra linee di forza del campo elettrico e del campo magnetico intese quali curve mutuamente intersecante
- Faraday specifica inoltre la corrispondenza tra la direzione della corrente e la relativa orientazione del campo magnetico

3265. The well-known relation of the electric and magnetic forces may be thus stated. Let two rings, in planes at right angles to each other, represent them, as in Plate X. fig. 1. If a current of electricity be sent round the ring E in the direction marked, then lines of magnetic force will be produced, correspondent to the polarity indicated by a supposed magnetic needle placed at NS, or in any other part of the ring M to which such a needle may be supposed to be shifted. As these rings represent the lines of electro-dynamic force and of magnetic force respectively, they will serve for a standard of comparison. I have elsewhere called the electric current, or the line of electro-dynamic force, "an axis of power having contrary forces exactly equal in amount in contrary directions" (517.). The line of magnetic force may be described in *precisely the same terms*; and these two axes of power, considered as right lines, are perpendicular to each other; with this additional condition, which determines their mutual direction, that they are separated by a right line perpendicular to both. The meaning of the words above, when applied to the electric current, is precise, and does not imply that the forces are contrary because they are in reverse directions, but are *contrary in nature*; the turning one round, end for end, would not at all make it resemble the other; a consideration which may have influence with those who admit electric fluids, and endeavour to decide whether there are one or two electricities.



- Inoltre Maxwell interpretò il principio di equivalenza espresso da Ampère per il quale
 - ... *l'effetto magnetico di uno strato uniformemente magnetizzato è equivalente a quello di una corrente elettrica attorno al bordo dello strato.*
- Concludendo che
 - *L'intensità totale della forza magnetizzante che circola in una curva chiusa attorno ad una corrente chiusa è costante, e può quindi fornire una misura della corrente. Questa intensità è indipendente dalla forma della curva chiusa e dipende solo dalla corrente che la attraversa...*
- Maxwell specifica che la legge è limitata a correnti chiuse. Quelle che si sviluppano tra le armature dei condensatori, che definisce *correnti aperte*, le tratterà successivamente



- Maxwell esprime la legge di Ampère in forma differenziale come

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy},$$

$$b_2 = \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{da_1}{dz},$$

$$c_2 = \frac{da_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dx}$$

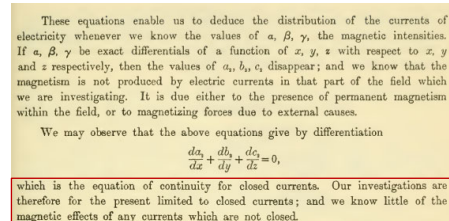
- a_2, b_2 e c_2 rappresentano le componenti del vettore densità di corrente $\vec{J}$, α_1, β_1 e γ_1 sono le componenti del vettore $\vec{H}$
- In termini moderni scriviamo la legge di Ampère come

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

- Inoltre Maxwell osserva che se si derivano ambo i membri dell'espressione precedente, si trova l'equazione di continuità nel caso stazionario $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0$$

- Confermando così che lo studio è limitato alle [sole] correnti chiuse [e che ancora] si conosce poco degli effetti magnetici relativi alle correnti aperte



L'induzione

- Senza proporre un'analogia fisica dell'idea di Faraday dello stato elettrotonico, Maxwell si persuase che al *cambiamento delle linee di forza attraverso un circuito* corrispondesse un *cambiamento di qualcosa come lo stato elettrotonico*
- Maxwell scrive:
 - *Faraday ha mostrato [...] come le forze elettromotrici dipendono dal numero di linee che vengono tagliate dal conduttore durante il moto. [...] L'effetto è lo stesso in qualsiasi maniera il numero di linee di induzione magnetica passanti attraverso il circuito aumenti. Esso non cambia se l'aumento ha luogo col moto del conduttore stesso, o di altri conduttori, o di magneti, o col cambiamento di intensità di altre correnti, o con la magnetizzazione o smagnetizzazione di magneti vicini, o infine, con la variazione di intensità della corrente stessa*
 - *In tutti questi casi la forza elettromotrice [il campo elettrico] dipende dalla variazione del numero di linee di azione magnetica induttiva che attraversano il circuito. È naturale supporre che una forza di questo tipo, che dipende da un cambiamento del numero di linee, sia dovuta a un cambiamento di stato che si misura dal numero di queste linee. Si può supporre che un conduttore chiuso in un campo magnetico si trovi in un certo stato derivante dall'azione magnetica. Finché questo stato rimane invariato non si verifica alcun effetto, ma, quando lo stato cambia, sorgono forze elettromotrici, a seconda della loro intensità e direzione da questo cambiamento di stato*
- Con l'obiettivo di attribuire significato fisico al concetto di stato elettrotonico, Maxwell ritenne opportuno precisare:
 - *Abbiamo ora ottenuto nelle funzioni [che descrivono lo stato elettrotonico] il mezzo per evitare di considerare la quantità di induzione magnetica che attraversa il circuito. Al posto di questo metodo artificiale abbiamo quello naturale di considerare la corrente con riferimento a grandezze [...] alle quali do il nome di funzioni Elettrotoniche, o componenti dell'intensità Elettrotonica*

- Quindi Maxwell pur facendo riferimento al concetto di stato elettrotonico si rimetteva alla variazione delle linee di forza magnetiche

- Operando in tale direzione ottenne l'espressione che collega il campo elettrico allo stato elettrotonico, nella forma

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha_0}{dt},$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\beta_0}{dt},$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma_0}{dt}$$

- aggiungendo:

- *Dall'esperimento risulta che [ciascuna di queste espressioni] si riferisce al cambiamento di stato elettrotonico di una data particella del conduttore, se dovuta al cambiamento delle funzioni elettrotoniche stesse o al moto della particella*

- In termini moderni scriviamo

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

204 ON FARADAY'S LINES OF FORCE.

Let us now consider the conditions of the conduction of the electric currents within the medium during changes in the electro-tonic state. The method which we shall adopt is an application of that given by Helmholtz in his memoir on the Conservation of Force*.

Let there be some external source of electric currents which would generate in the conducting mass currents whose quantity is measured by a, b, c , and their intensity by α, β, γ .

Then the amount of work due to this cause in the time dt is

$$dt \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz$$

in the form of resistance overcome, and

$$\frac{dt}{4\pi} \frac{d}{dt} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz$$

in the form of work done mechanically by the electro-magnetic action of these currents. If there be no external cause producing currents, then the quantity representing the whole work done by the external cause must vanish, and we have

$$dt \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz + \frac{dt}{4\pi} \frac{d}{dt} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz,$$

where the integrals are taken through any arbitrary space. We must therefore have

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} (a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

for every point of space; and it must be remembered that the variation of Q is supposed due to variations of a, β, γ , and not of a, b, c . We must therefore treat a, b, c as constants, and the equation becomes

$$a\left(\alpha + \frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt}\right) + b\left(\beta + \frac{1}{4\pi} \frac{d\beta}{dt}\right) + c\left(\gamma + \frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma}{dt}\right) = 0.$$

In order that this equation may be independent of the values of a, b, c , each of these coefficients must = 0; and therefore we have the following expressions for the electro-motive forces due to the action of magnets and currents at a distance in terms of the electro-tonic functions,

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi} \frac{da}{dt}, \quad \beta = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\beta}{dt}, \quad \gamma = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma}{dt}.$$

* Translated in Taylor's *New Scientific Memoirs*, Part II.

- Nella seconda parte della memoria Maxwell, sfruttando i risultati dell'analisi vettoriale, enuncia, in parole secondo lo stile di Faraday, le leggi dell'elettromagnetismo e dell'induzione elettromagnetica per correnti chiuse

1. L'intensità elettrotonica attorno al confine di un elemento di superficie misura la quantità di induzione magnetica che attraversa quella superficie, o, in altre parole, il numero di linee di forza magnetica che attraversano quella superficie.	$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$
2. L'intensità magnetica in ogni punto è connessa con la quantità di induzione magnetica da un insieme di equazioni lineari, dette equazioni di conduzione.	$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$
3. L'intensità magnetica attraverso il confine di qualsiasi superficie misura la quantità di corrente elettrica che passa attraverso quella superficie.	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
4. La quantità e l'intensità delle correnti elettriche sono collegate da un sistema di equazioni di conduzione.	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

- Queste leggi permettono di dedurre la quantità e l'intensità magnetica ed elettrica dalla funzione elettrotonica. Le unità di misura non sono prese in considerazione
- Veniamo poi alle forze e all'induzione nei conduttori.

5. Il potenziale elettromagnetico totale di una corrente chiusa si misura dal prodotto della quantità della corrente moltiplicata per l'intera intensità elettrotonica stimata nella stessa direzione attorno al circuito. Qualsiasi spostamento dei conduttori che provocherebbe un aumento del potenziale sarà [...] misurato dall'aumento del potenziale.	$U = -i \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -i \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$
6. La forza elettromotrice su qualsiasi elemento di un conduttore è misurata dalla velocità di variazione istantanea dell'intensità elettrotonica su quell'elemento, sia in grandezza che in direzione.	$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- A commento di queste leggi Maxwell scrive
 - In queste sei leggi ho cercato di esprimere l'idea che credo sia il fondamento matematico dei modi di pensare dedotti dalle Ricerche Sperimentali. Non credo che [questa formulazione] contenga neppure l'ombra di una vera teoria fisica; infatti, il suo pregio principale come strumento temporaneo di ricerca è quello di non rendere conto, nemmeno in apparenza, di alcunché.*
- Quindi fa cenno alla teoria elettrodinamica proposta da Weber notando che da essa sono altrettanto deducibili le leggi di Ampere dell'attrazione dei conduttori e quelle di Neumann e altri relative all'induzione delle correnti.
- Infine giustifica l'introduzione del concetto dello stato elettrotonico quale approccio alternativo alla descrizione dei fenomeni aggiungendo
 - ... non credo che al momento abbiamo alcun diritto di comprendere l'azione dell'elettricità, e ritengo che il merito principale di una teoria temporanea sia quello di guidare l'esperimento, senza impedire il progresso della vera teoria quando sarà sviluppata*

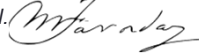
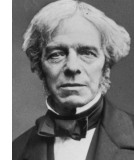
- Dopo aver ricevuto una copia della memoria *On Faraday's lines of force*, Faraday (66) scrisse a Maxwell (26) la seguente lettera

• *Albemarle Street, W.,
25 marzo 1857.*

MIO CARO SIGNORE Ho ricevuto il suo documento e la ringrazio molto. Non dico che mi permetto di ringraziarla per quello che ha detto circa le "Linee di forza", perché so che lo ha fatto per l'interesse della verità filosofica; ma deve immaginare quanto sia grato a questo lavoro che mi dà molto incoraggiamento su cosa riflettere. All'inizio ero quasi spaventato quando ho visto una tale forza matematica esercitata sull'argomento, e mi sono meravigliato di vedere quanto l'argomento fosse sostenuto così bene. Le invio con questa lettera un altro foglio; Sono curioso di conoscere la sua opinione in merito. Spero tuttavia che, per quanto audaci possano essere i pensieri che vi sono espressi, lei possa forse trovare un argomento per avvalorarli. Spero quest'estate di fare qualche esperimento sul tempo dell'azione magnetica, o meglio sul tempo necessario per l'assunzione dello stato elettrotonico attorno ad un filo percorso da una corrente, che possa aiutare il soggetto. Il tempo deve probabilmente essere breve come il tempo di propagazione della luce; ma la grandezza del risultato, se affermativo, non mi fa disperare. Forse avrei fatto meglio a non parlarne, perché spesso ci metto molto a realizzare le mie intenzioni, e la mancanza di memoria è contro di me.

Con la massima sincerità,

M. FARADAY. Prof. C. Maxwell.

La teoria dei vortici molecolari

- Durante gli anni che seguirono la compilazione della memoria *On Faraday's lines of force* Maxwell sviluppò la teoria cinetica dei gas e si occupò di vari problemi di ottica e di meccanica
- Contemporaneamente meditava su come approfondire il tema dell'elettromagnetismo, consapevole che malgrado avesse stabilito una teoria formalmente coerente, mancava ancora un modello fisico per la descrizione dei fenomeni
- Con tale obiettivo, assumendo una azione mediata da un mezzo, nella memoria *On physical lines of force*, pubblicata tra il 1861 e il 1862 Maxwell rivolse l'attenzione *certi stati di tensione e di moto presenti in un mezzo confrontandoli con i fenomeni elettrici e magnetici*

452

ON PHYSICAL LINES OF FORCE.

at all until a magnet is placed in that part of the field. We are dissatisfied with the explanation founded on the hypothesis of attractive and repellant forces directed towards the magnetic poles, even though we may have satisfied ourselves that the phenomenon is in strict accordance with that hypothesis, and we cannot help thinking that in every place where we find these lines of force, some physical state or action must exist in sufficient energy to produce the actual phenomena.

My object in this paper is to clear the way for speculation in this direction, by investigating the mechanical results of certain states of tension and motion in a medium, and comparing these with the observed phenomena of magnetism and electricity. By pointing out the mechanical consequences of such hypotheses, I hope to be of some use to those who consider the phenomena as due to the action of a medium, but are in doubt as to the relation of this hypothesis to the experimental laws already established, which have generally been expressed in the language of other hypotheses.

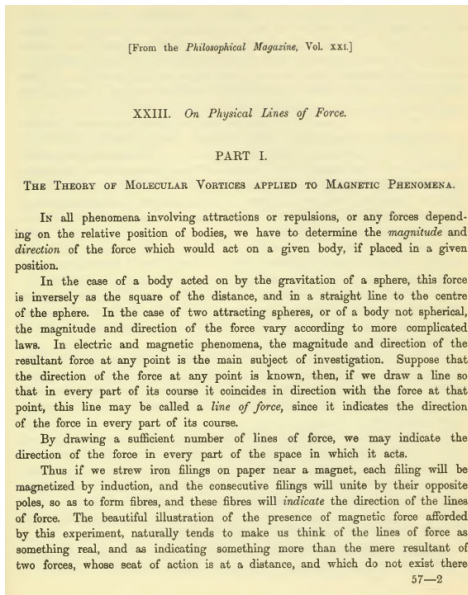
I have in a former paper* endeavoured to lay before the mind of the geometer a clear conception of the relation of the lines of force to the space in which they are traced. By making use of the conception of currents in a fluid, I shewed how to draw lines of force, which should indicate by their number the amount of force, so that each line may be called a unit-line of force (see Faraday's *Researches*, 3122); and I have investigated the path of the lines where they pass from one medium to another.

In the same paper I have found the geometrical significance of the "Electrotonic State," and have shewn how to deduce the mathematical relations between the electrotonic state, magnetism, electric currents, and the electromotive force, using mechanical illustrations to assist the imagination, but not to account for the phenomena.

I propose now to examine magnetic phenomena from a mechanical point of view, and to determine what tensions in, or motions of, a medium are capable of producing the mechanical phenomena observed. If, by the same hypothesis, we can connect the phenomena of magnetic attraction with electromagnetic phenomena and with those of induced currents, we shall have found a theory which, if not true, can only be proved to be erroneous by experiments which will greatly enlarge our knowledge of this part of physics.

* See a paper "On Faraday's Lines of Force," *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. x. Part i. Page 155 of this volume.

- Nella prima parte della memoria, *The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena*, Maxwell, nell'ottica dell'impiego delle analogie fisiche, si propose di sviluppare delle *illustrazioni meccaniche per aiutare l'immaginazione* [nell'analizzare le condizioni] *meccaniche di un mezzo sottoposto all'influenza magnetica*
- Nel 1857 Thomson aveva ipotizzato che la rotazione del piano di polarizzazione della luce indotta dall'azione di una elettrocalamita, osservata da Faraday nel 1845 fosse causata dall'accoppiamento tra le vibrazioni dell'etere luminoso e le rotazioni di vortici molecolari in un mezzo materiale, nel quale gli assi di rotazione dei vortici si allineano alla direzione delle linee di forza del campo magnetico
- Maxwell, che condivideva tale ipotesi, come risulta da una lettera inviata a Faraday nel 1857, fu indotto a descrivere il magnetismo attraverso un sistema di vortici molecolari



- Maxwell postulò l'esistenza di un mezzo, nel quale, in presenza di un campo magnetico si creino
 - ... *innumerevoli vortici di materia in rotazione, i cui assi coincidono con la direzione della forza magnetica in ogni punto del campo.*
- La forza centrifuga determinata dalla rotazione provoca una pressione equatoriale dipendente dalla velocità di rotazione ed una tensione lungo le linee di forza, che indicheranno quindi la direzione di minima pressione nel mezzo. Faraday, nella memoria *On the Physical Lines of Magnetic Force* del 1852 aveva già proposto una descrizione qualitativa dei fenomeni magnetici ed elettromagnetici, ipotizzando un accorciamento longitudinale delle linee di forza e una repulsione reciproca laterale
- Il modello presentava tuttavia due problemi:
 - L'origine del moto dei vortici
 - La compatibilità del moto dei vortici disposti lungo una linea di forza col moto dei vortici situati lungo le linee di forza adiacenti
- Maxwell identificò un'unica soluzione per entrambi i problemi.
 - Per consentire che due vortici contigui ruotassero nello stesso senso e non in senso opposto come succede per due ruote che ingranano, inserì tra i vortici uno strato di particelle sferiche più piccole dei vortici. Tali particelle agirebbero come i cuscinetti a sfera o le *ruote folli* poste tra due ruote dentate che devono ruotare nella stessa direzione
 - Inoltre Maxwell assunse che la materia dell'elettricità fosse costituita proprio da tali particelle, per cui, in presenza di un campo elettrico tenderebbero a muoversi lungo i canali tra i vortici, costituendo in un conduttore una corrente elettrica, e sarebbe questo movimento ad originare il moto dei vortici.



- Naturalmente le correnti possono prodursi nei soli conduttori, così Maxwell propose un modo attraverso il quale il comportamento dei vortici sarebbe stato modificato in relazione al tipo di sostanza in cui si originano:
 - In un isolante i vortici, o gruppi di vortici, manterrebbero adese le particelle in modo che queste possano ruotare senza traslare.
 - In un conduttore le particelle potrebbero traslare con poco attrito, dando luogo ad una corrente. In generale, minore è la resistenza elettrica della sostanza, più liberamente le particelle possono muoversi.
- Una caratteristica essenziale delle particelle è che si mantengono in contatto coi vortici. Dove il campo magnetico è uniforme le particelle ruotano semplicemente, insieme ai vortici.
- Ma se le particelle in un conduttore traslano senza ruotare, determinerebbero la rotazione dei vortici su entrambi i lati della corrente in direzioni opposte, cioè esattamente la condizione per creare un campo magnetico circolare attorno a un filo percorso da corrente.

- Maxwell formulò quest'ipotesi sul ruolo delle particelle, poiché studiando la cinematica dei vortici trovò la relazione tra la densità di flusso delle particelle $\vec{i}$ e la velocità angolare dei vortici $\vec{\omega}$, giungendo alla relazione (espressa in termini moderni):

$$\vec{i} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$$

- Cogliendo la similitudine con l'equazione [...] che fornisce la relazione tra la quantità di una corrente elettrica e l'intensità delle linee di forza che la circondano. Cioè la legge di Ampère

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

- Concludendo, come anticipato:
 - *Sembra quindi che, secondo la nostra ipotesi, una corrente elettrica sia rappresentata dal trasferimento delle particelle mobili interposte tra i vortici vicini. Possiamo immaginare che queste particelle siano molto piccole rispetto alla dimensione di un vortice, e che la massa di tutte le particelle insieme sia inapprezzabile rispetto a quella dei vortici, e che in una singola molecola del mezzo siano contenuti un gran numero di vortici, con le particelle che li circondano. Le particelle devono essere concepite per rotolare senza scivolare tra i vortici che separano, e per non toccarsi, in modo che, finché rimangono all'interno della stessa molecola, non vi sia perdita di energia per resistenza. Quando, invece, c'è un trasferimento generale di particelle in una direzione, esse devono passare da una molecola all'altra, e così facendo possono incontrare resistenza, così da dissipare energia elettrica e generare calore*

- Dopo questa analisi puramente cinematica dei moti nel mezzo ipotizzato, Maxwell ne esaminò la dinamica, considerando la circostanza in cui la velocità angolare dei vortici è soggetta ad una variazione
- Tali cambiamenti sarebbero generati da forze tangenziali esercitate dalle particelle sulle superfici dei vortici, e queste sarebbero naturalmente accompagnate da forze di reazione inerziale esercitate dai vortici sulle stesse particelle.
- Da tale considerazione Maxwell dedusse la relazione tra la forza di reazione $\vec{F}$ e la velocità angolare $\vec{\omega}$ attraverso la densità del mezzo ρ_m :

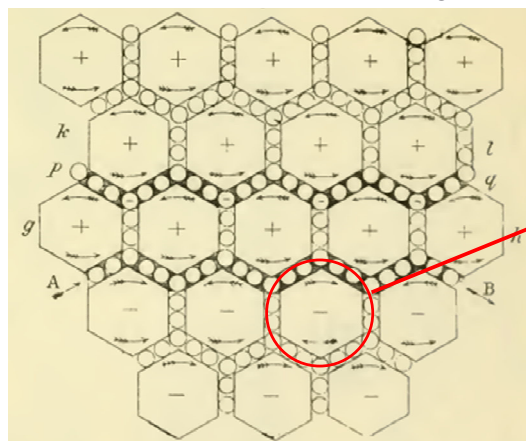
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\pi\rho_m \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$$

- Cogliendo l'analogia con [...] *la relazione tra le variazioni di stato del campo magnetico e le forze elettromotrici così messe in gioco*
- Cioè la legge di Faraday dell'induzione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

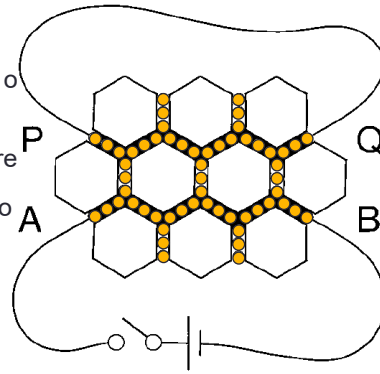
- Dove $\vec{E}$ rappresenta *la forza elettromotrice* [...] *messa in gioco dalle variazioni* [...] *del campo magnetico* μH . Nella precedente memoria Maxwell aveva espresso tale campo attraverso la variazione dell'intensità elettrotonica, cioè il potenziale vettore
- La corrispondenza tra la densità del mezzo e la permeabilità magnetica del materiale permetteva quindi attraverso questo modello di descrivere materiali con differenti caratteristiche magnetiche

- Il modello proposto era anche in grado di giustificare il fenomeno della mutua induzione tra due circuiti, cioè il fenomeno secondo cui il passaggio di una corrente variabile attraverso un circuito induce un impulso di corrente in un circuito vicino ma separato
- Allo scopo Maxwell disegnò uno schema del mezzo ipotizzato, rappresentando la sezione trasversale dei vortici utilizzando *puramente per motivi artistici* una forma esagonale

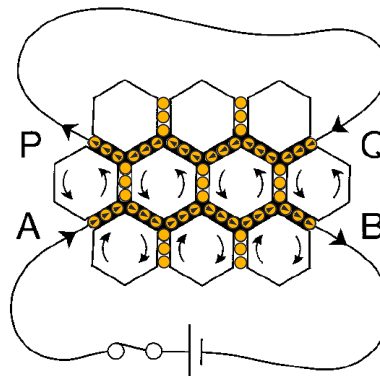


qui
commette
un piccolo
errore

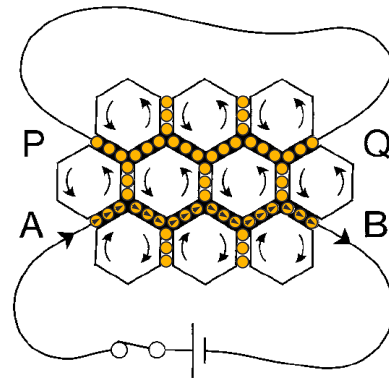
- Il diagramma mostra una sezione trasversale di una piccola regione di spazio.
- Le particelle lungo AB sono in un filo conduttore che fa parte di un circuito che comprende una batteria e un interruttore, inizialmente aperto.
- Quelle lungo PQ sono in un altro filo che fa parte di un circuito separato senza batteria o interruttore.
- Le particelle lungo AB e PQ sono libere di muoversi perché sono in conduttori, ma altre nelle vicinanze sono in materiale non conduttore e possono solo ruotare nelle loro posizioni fisse.
- Nello schema i percorsi AB e PQ sono evidentemente fili molto sottili e vicini tra loro, ma questo serve solo a mantenere compatto il diagramma; il ragionamento proposto da Maxwell si applicherebbe altrettanto bene a fili di dimensioni normali e normalmente distanziati contenenti molte file vortici e di particelle.
- Supponiamo che il campo magnetico sia inizialmente zero e l'interruttore aperto, in modo che sia i vortici che le particelle risultino a riposo



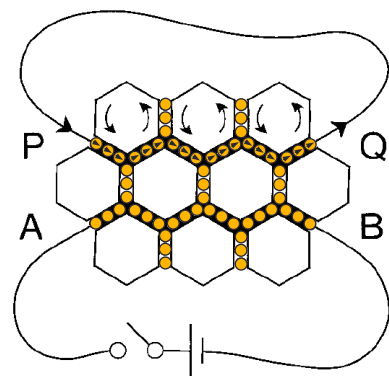
- Alla chiusura dell'interruttore, le particelle lungo il percorso AB si spostano da sinistra a destra senza ruotare.
- Ciò fa sì che le file di vortici disposti su entrambi i lati del tratto AB ruotino in direzioni opposte, creando così un campo magnetico circolare attorno al filo.
- Le particelle situate lungo il tratto PQ sono ora comprese tra i vortici rotanti del lato AB e quelli fissi sull'altro, quindi iniziano a ruotare (in senso orario) e anche a muoversi da destra a sinistra, nella direzione opposta rispetto a quelle in AB.

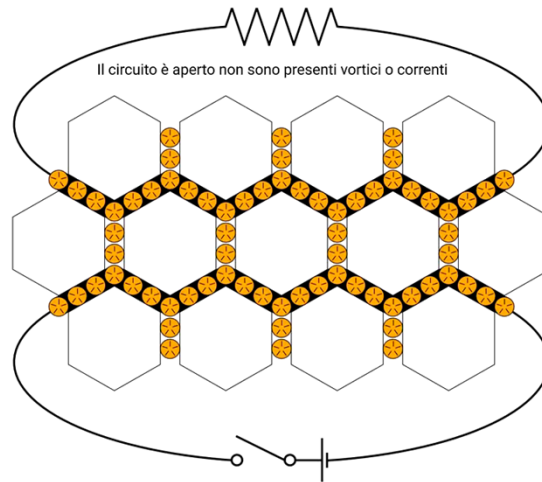


- Il circuito contenente il filo nel percorso PQ presenta, in generale, una certa resistenza quindi le particelle disposte lungo tale tratto, rallenteranno dopo il loro picco iniziale di velocità, facendo sì che i vortici situati sopra PQ inizino a ruotare in senso antiorario.
- Quindi il movimento delle particelle progressivamente si arresterà, sebbene continueranno a ruotare.
- A questo punto i vortici posti sopra il tratto PQ ruoteranno alla stessa velocità di quelli sotto tale tratto



- Quando l'interruttore viene riaperto, scollegando la batteria, le particelle lungo AB smettono di muoversi ed i vortici posti su entrambi i lati di AB smetteranno di ruotare.
- Le particelle lungo il tratto PQ sono ora comprese tra le i vortici fissi sul lato AB e quelli rotanti sull'altro, quindi inizieranno a muoversi da sinistra a destra, nella stessa direzione della corrente AB originale.
- Tuttavia la resistenza del circuito contenente PQ fa rallentare le particelle fino a determinarne il completo arresto ed il ritorno alla condizione descritta all'inizio.

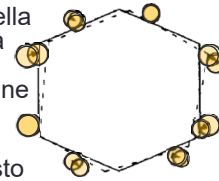




La corrente di spostamento

- A dispetto da come ci è stato insegnato, la corrente di spostamento non fu introdotta da Maxwell siccome aveva percepito un'incoerenza matematica nelle equazioni del campo, delle quali disponeva già all'inizio degli anni Sessanta del XIX secolo.
- In particolare, la relazione differenziale parziale che lega la corrente di conduzione alla forza magnetica (la legge di Ampère) implica che tutte le correnti di quel tipo siano chiuse, cosa che ovviamente non si verifica in generale. Si sarebbe potuto risolvere tale problema inserendo nella versione della legge di Ampère un termine aggiuntivo rispetto alla corrente di conduzione che consistesse nel tasso di variazione in funzione del tempo della quantità elettrica: ciò equivale ad aggiungere la corrente di spostamento a quella di conduzione.
- Maxwell, tuttavia, pervenne alla nozione di corrente di spostamento non tanto attraverso la matematica o più ampie concezioni della teoria di campo, quanto grazie ad una generalizzazione del suo modello dei vortici.

- Alcuni mesi dopo la pubblicazione della prime due parti della memoria *On physical lines of force* che comprendevano la teoria dei vortici molecolari, Maxwell capì che assumendo che i vortici fossero elastici poteva stabilire una connessione tra l'elettrodinamica e l'elettrostatica
- Il punto di partenza fu costituito dal modello della polarizzazione dielettrica. Rifacendosi allo schema proposto da Mossotti e da Faraday, Maxwell assunse che
 - La forza elettromotrice che agisce su un dielettrico produce uno stato di polarizzazione delle sue parti simile per distribuzione alla polarità delle particelle di ferro sotto l'influenza di un magnete e, come la polarizzazione magnetica, descrivibile come uno stato in cui ogni particella ha i suoi poli in condizioni opposte.
 - In un dielettrico sotto induzione, possiamo concepire che l'elettricità in ciascuna molecola sia spostata in modo tale che un lato sia reso elettricamente positivo e l'altro negativo, ma che l'elettricità rimanga interamente connessa con la molecola e non passi da una molecola all'altra.
 - L'effetto di questa azione sull'intera massa dielettrica è quello di produrre uno spostamento generale dell'elettricità in una certa direzione. Questo spostamento non equivale a una corrente, perché quando ha raggiunto un certo valore rimane costante, ma è l'inizio di una corrente, e le sue variazioni costituiscono correnti in direzione positiva o negativa, a seconda che lo spostamento sia crescente o decrescente.
- Maxwell inoltre, rispetto a questa interpretazione, aggiunse
 - Un corpo conduttore può essere paragonato ad una membrana porosa che oppone più o meno resistenza al passaggio di un fluido, mentre un dielettrico è come una membrana elastica che può essere impermeabile al fluido, ma in grado di trasmettere la pressione del fluido da una parte all'altra.



- Nell'ottica della rappresentazione del fenomeno come quello di un corpo elastico sottoposto ad una pressione che recupera la sua forma quando la pressione viene rimossa, Maxwell formalizzò la relazione di proporzionalità tra lo spostamento h in una direzione e la forza elettromotrice R lungo tale direzione attraverso la relazione

$$R = -4\pi E^2 h$$

- in cui E è un coefficiente dipendente dalla natura del dielettrico e indicò la corrente r dovuta a tale spostamento come:

$$r = \frac{dh}{dt}$$
- In termini moderni scriveremmo lo spostamento come $D = -\epsilon E$
- Il segno meno era ispirato dal carattere elastico della polarizzazione elettrica, dal momento che nei corpi materiali sollecitati da una causa si sviluppa una forza elastica uguale e contraria alla forza deformante.
- Successivamente Maxwell riconobbe che il modello delle forze elastiche era errato e rimosse tale segno

while a dielectric is like an elastic membrane which may be impervious to the fluid, but transmits the pressure of the fluid on one side to that on the other.

As long as electromotive force acts on a conductor, it produces a current which, as it meets with resistance, occasions a continual transformation of electrical energy into heat, which is incapable of being restored again as electrical energy by any reversion of the process.

Electromotive force acting on a dielectric produces a state of polarization of its parts similar in distribution to the polarity of the particles of iron under the influence of a magnet*, and, like the magnetic polarization, capable of being described as a state in which every particle has its poles in opposite conditions.

In a dielectric under induction, we may conceive that the electricity in each molecule is so displaced that one side is rendered positively, and the other negatively electrical, but that the electricity remains entirely connected with the molecule, and does not pass from one molecule to another.

The effect of this action on the whole dielectric mass is to produce a general displacement of the electricity in a certain direction. This displacement does not amount to a current, because when it has attained a certain value it remains constant, but it is the commencement of a current, and its variations constitute currents in the positive or negative direction, according as the displacement is increasing or diminishing. The amount of the displacement depends on the nature of the body, and on the electromotive force; so that if h is the displacement, R the electromotive force, and E a coefficient depending on the nature of the dielectric,

$$R = -4\pi E^2 h;$$

and if r is the value of the electric current due to displacement,

$$r = \frac{dh}{dt}$$

These relations are independent of any theory about the internal mechanism of dielectrics; but when we find electromotive force producing electric displacement in a dielectric, and when we find the dielectric recovering from its state of electric displacement with an equal electromotive force, we cannot help

* See Prof. Mossotti, "Discussione Analitica," *Memorie della Soc. Italiana (Modena)*, Vol. xxiv. Part 2, p. 43.

- Riconoscendo che tale quantità fosse una corrente a tutti gli effetti ritenne di dover *correggere* [la legge di Ampère] *per l'effetto dovuto all'elasticità del mezzo*.
- Differenziando la precedente relazione si trova

$$\frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt}$$

- *dimostrando che al variare della forza elettromotrice varia anche lo spostamento elettrico. Ma una variazione di spostamento equivale a una corrente, e questa corrente deve essere presa in considerazione [nella legge di Ampère] e aggiunta:*

$$p = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2} \frac{dP}{dt} \right)$$

$$q = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2} \frac{dQ}{dt} \right)$$

$$r = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2} \frac{dR}{dt} \right)$$

- dove p, q, r sono le correnti elettriche nelle direzioni x, y e z ; α, β, γ sono le componenti dell'intensità magnetica; e P, Q, R sono le forze elettromotrici.
- In termini moderni

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Utilizzando il concetto di spostamento e quello dell'energia associata al campo, Maxwell fu in grado di dedurre l'espressione della forza esercitata tra due cariche puntiformi
- In pratica dopo aver espresso l'energia elettrostatica come

$$U = -\sum \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh) \delta V$$

- dove P, Q, R sono le forze e f, g, h gli spostamenti, equivalente all'espressione moderna $U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dv$, adoperando il

procedimento inverso a quello che attualmente seguiamo per determinare l'energia elettrostatica in un mezzo materiale, giunse a ricavare la legge di Coulomb per due cariche elettriche e_1 e e_2 poste alla distanza relativa r :

$$F = E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

PROV. XV.—To find the force acting between two electrified bodies. The energy in the medium arising from the electric displacements is $U = -\frac{1}{2} \int (Pf + Qg + Rh) \delta V$ (110), where P, Q, R are the forces, and f, g, h the displacements. Now when there is no motion of the bodies or alteration of forces, it appears from equations (77)* that $P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ (111); and we know by (105) that $P = -4\pi E f, Q = -4\pi E g, R = -4\pi E h$ (112); whence $U = \frac{1}{8\pi E} \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z}^2 \right) \delta V$ (113). Integrating by parts throughout all space, and remembering that Ψ vanishes at an infinite distance, $U = -\frac{1}{8\pi E} \int \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \delta V$ (121); or by (115), $U = \frac{1}{2} \int \Psi (\Psi_v) \delta V$ (122). Now let there be two electrified bodies, and let ϵ_1 be the distribution of electricity in the first, and Ψ_1 the electric tension due to it, and let $\epsilon_2 = \frac{1}{4\pi E} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right)$ (123). Let ϵ_2 be the distribution of electricity in the second body, and Ψ_2 the tension due to it; then the whole tension at any point will be $\Psi_1 + \Psi_2$, and the expansion for U will become $U = \frac{1}{2} \int (\Psi_1 \epsilon_2 + \Psi_2 \epsilon_1 + \Psi_1 \epsilon_1 + \Psi_2 \epsilon_2) \delta V$ (124). Let the body whose electricity is ϵ_2 be moved in any way, the electricity moving along with the body, then since the distribution of tension Ψ_1 moves with the body, the value of $\Psi_1 \epsilon_2$ remains the same. $\Psi_2 \epsilon_1$ also remains the same; and Green has shown (Essay on Electricity, p. 10) that $\Psi_2 \epsilon_2 = \Psi_2 \epsilon_2$, so that the work done by moving the body against electric forces $W = 2U = \int \Psi_2 (\Psi_1 \epsilon_2) \delta V$ (125). And if ϵ_2 is confined to a small body, $W = \epsilon_2 \Psi_2$, or $F dr = \epsilon_2 \frac{d\Psi_2}{dr} dr$ (126), where F is the resistance and dr the motion. If the body ϵ_2 be small, then if r is the distance from ϵ_2 , equation (123) gives $\Psi_2 = E \frac{\epsilon_2}{r}$; whence $F = -E^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{r^2}$ (127); or the force is a repulsion varying inversely as the square of the distance. Now let η_1 and η_2 be the same quantities of electricity measured statically, then we know by definition of electrical quantity $F = -\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2}$ (128); and this will be satisfied provided $\eta_1 = E \epsilon_1$, and $\eta_2 = E \epsilon_2$ (129); so that the quantity E previously determined in Prop. XIII. is the number by which the electrodynamic measure of any quantity of electricity must be multiplied to obtain its electrostatic measure.

Prodromi della teoria elettromagnetica della luce

- L'idea dell'elasticità del mezzo ebbe un ruolo rilevante in questa fase; oltre ad aver aperto la strada al concetto di corrente di spostamento costituì la premessa alla teoria elettromagnetica della luce
- Ai tempi di Maxwell la propagazione delle onde luminose era ricondotta alla propagazione di vibrazioni meccaniche attraverso un mezzo di tipo elastico. Nel 1826 Fresnel aveva introdotto il modello di un etere elastico e particellare tale da consentire il trasporto delle onde luminose nello spazio, attraverso onde trasversali
- La velocità della luce v era calcolata in funzione del modulo di elasticità m e della densità ρ del mezzo che le trasmette, cioè dell'etere, mediante la relazione

$$v = \sqrt{\frac{m}{\rho}}$$

- Maxwell aveva stabilito nel suo modello la corrispondenza tra la densità del mezzo costituente i vortici ρ ed il coefficiente di induzione magnetica μ' con la relazione:

$$\mu' = \pi\rho$$

- e la corrispondenza tra la costante E che compare nell'espressione della legge di Coulomb ed il modulo di elasticità del mezzo m con la relazione

$$E^2 = \pi m$$

- Pertanto, considerando che il coefficiente di induzione magnetica è pari a $\mu/4\pi$ e E^2 è pari a $1/(4\pi\epsilon)$, sostituendo nell'espressione della velocità di propagazione in un mezzo elastico, si ottiene

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}} = \sqrt{\frac{E^2}{\pi} \frac{\pi}{\mu'}} = \sqrt{\frac{E^2}{\mu'}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu} \frac{1}{4\pi\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- Da cui Maxwell dedusse

$$V = 310,740,000,000 \frac{mm}{s}$$

- Cioè 3.107×10^8 m/s. Nel 1851 Hippolyte Fizeau aveva misurato la velocità della luce nell'aria trovando per tale quantità

$$V = 314,858,000,000 \frac{mm}{s}$$

- Un valore superiore di poco più dell'1% rispetto a quello stabilito da Maxwell



- Da tale coincidenza, Maxwell concluse
 - *La velocità delle oscillazioni trasversali nel nostro ipotetico mezzo, calcolata dagli esperimenti elettromagnetici di MM. Kohlrausch e Weber, concorda così esattamente con la velocità della luce calcolata dagli esperimenti ottici di M. Fizeau, che difficilmente possiamo esimerci dall'inferire che la "luce consiste nelle ondulazioni trasversali dello stesso mezzo che è la causa dei fenomeni elettrici e magnetici".*
- Maxwell cita la determinazione fatta da R.H. Kohlrausch e Weber mediante il rapporto tra la carica elettrica in unità di misura elettrostatiche e di una stessa quantità di elettricità misurata in unità elettromagnetiche

PROP. XVI.—To find the rate of propagation of transverse vibrations through the elastic medium of which the cells are composed, on the supposition that its elasticity is due entirely to forces acting between pairs of particles.

By the ordinary method of investigation we know that

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}} \dots\dots\dots (132),$$

where m is the coefficient of transverse elasticity, and ρ is the density. By referring to the equations of Part I., it will be seen that if ρ is the density of the matter of the vortices, and μ is the "coefficient of magnetic induction,"

$$\mu = \pi \rho \dots\dots\dots (133);$$

whence

$$\pi m = V^2 \mu \dots\dots\dots (134);$$

and by (108),

$$E = V \sqrt{\mu} \dots\dots\dots (135).$$

In air or vacuum $\mu = 1$, and therefore

$$\begin{aligned} V &= E \\ &= 310,740,000,000 \text{ millimetres per second} \\ &= 193,088 \text{ miles per second} \end{aligned} \dots\dots\dots (136).$$

The velocity of light in air, as determined by M. Fizeau, is 70,843 leagues per second (25 leagues to a degree) which gives

$$\begin{aligned} V &= 314,858,000,000 \text{ millimetres} \\ &= 195,647 \text{ miles per second} \dots\dots\dots (137). \end{aligned}$$

The velocity of transverse undulations in our hypothetical medium, calculated from the electro-magnetic experiments of MM. Kohlrausch and Weber, agrees so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau, that we can scarcely avoid the inference that *light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena.*



- Nella memoria del 1868 *On a Method of Making a Direct Comparison of Electrostatic with Electromagnetic Force: With a Note on the Electromagnetic Theory of Light* Maxwell spiega questo approccio non ottico alla misura della velocità della luce:
 - *Esistono due metodi distinti e indipendenti per misurare le grandezze elettriche con riferimento agli standard di lunghezza, tempo e massa.*
 - *Il metodo elettrostatico si fonda sulle attrazioni e repulsioni tra corpi elettrizzati separati da un mezzo dielettrico fluido, come l'aria; e le unità elettriche sono determinate in modo che la repulsione tra due piccoli corpi elettrizzati a considerevole distanza possa essere rappresentata numericamente dal prodotto delle quantità di elettricità, diviso per il quadrato della distanza.*
 - *Il metodo elettromagnetico si fonda sulle attrazioni e sulle repulsioni osservate tra conduttori percorsi da correnti elettriche e separati dall'aria; e le unità elettriche sono determinate in modo che se due conduttori rettilinei tra loro uguali sono posti parallelamente uno all'altro, e ad una distanza molto piccola rispetto alla loro lunghezza, l'attrazione che si esercita tra loro può essere rappresentata numericamente dal prodotto delle correnti e della somma delle lunghezze dei conduttori e diviso per la distanza tra i conduttori stessi.*
 - *Questi due metodi portano a due diverse unità di misura della quantità di elettricità. Il rapporto tra le due unità è una grandezza fisica importante, che ci proponiamo di misurare. Consideriamo la relazione di queste unità con quelle di spazio, tempo e forza (quella della forza è una funzione di spazio, tempo e massa).*

- In unità elettrostatiche la forza che si esplica tra due uguali cariche puntiformi q poste alla distanza r vale

$$F = \frac{q^2}{r^2}$$

- e, dimensionalmente si esprime come

$$[q] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$$

- Come legge fondamentale che definisce le cariche elettromagnetiche è possibile adoperare l'espressione della forza che si esplica tra due conduttori rettilinei paralleli situati a distanza r e percorsi dalla stessa corrente i :

$$F = \frac{i^2}{2r} = \frac{1}{2r} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

- In questo caso, dimensionalmente risulta

$$[q] = L^{1/2} M^{1/2}$$

- La dimensione del rapporto tra le cariche dedotte da queste due relazioni è LT^{-1} , cioè:
 - *Il rapporto tra l'unità elettromagnetica e l'unità elettrostatica è quindi quello tra una certa distanza e un certo tempo, o, in altre parole, questo rapporto è una velocità; e questa velocità sarà della stessa grandezza assoluta, qualunque standard di lunghezza, tempo e massa adottiamo.*

- Maxwell scrive:

- *È evidente l'importanza della determinazione di questo rapporto in tutti i casi in cui si combinano azioni elettrostatiche ed elettromagnetiche.*
- *Tali casi si verificano nel funzionamento ordinario di tutti i cavi telegrafici sottomarini, nelle bobine di induzione e in molti altri dispositivi artificiali.*
- *Ma la conoscenza di questo rapporto è, credo, di importanza scientifica ancora maggiore se consideriamo che la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche attraverso un mezzo dielettrico dipende da questo rapporto e, secondo i miei calcoli, è espressa dallo stesso numero.*

XXVI. *On a Method of making a Direct Comparison of Electrostatic with Electromagnetic Force; with a Note on the Electromagnetic Theory of Light.* By J. CLERK MAXWELL, F.R.SS. L. & E.

Received June 10.—Read June 18, 1868.

THERE are two distinct and independent methods of measuring electrical quantities with reference to received standards of length, time, and mass.

The electrostatic method is founded on the attractions and repulsions between electrified bodies separated by a fluid dielectric medium, such as air; and the electrical units are determined so that the repulsion between two small electrified bodies at a considerable distance may be represented numerically by the product of the quantities of electricity, divided by the square of the distance.

The electromagnetic method is founded on the attractions and repulsions observed between conductors carrying electric currents, and separated by air; and the electrical units are determined so that if two equal straight conductors are placed parallel to each other, and at a very small distance compared with their length, the attraction between them may be represented numerically by the product of the currents multiplied by the sum of the lengths of the conductors, and divided by the distance between them.

These two methods lead to two different units by which the quantity of electricity is to be measured. The ratio of the two units is an important physical quantity, which we propose to measure. Let us consider the relation of these units to those of space, time, and force (that of force being a function of space, time, and mass).

In the electrostatic system we have a force equal to the product of two quantities of electricity divided by the square of the distance. The unit of electricity will therefore vary directly as the unit of length, and as the square root of the unit of force.

In the electromagnetic system we have a force equal to the product of two currents multiplied by the ratio of two lines. The unit of current in this system therefore varies as the square root of the unit of force; and the unit of electrical quantity, which is that which is transmitted by the unit current in unit of time, varies as the unit of time and as the square root of the unit of force.

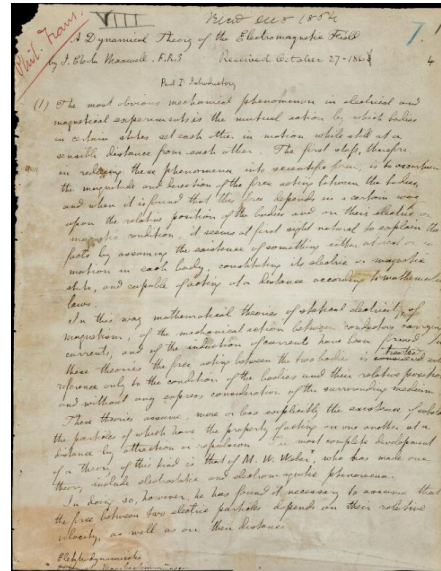
The ratio of the electromagnetic unit to the electrostatic unit is therefore that of a certain distance to a certain time, or, in other words, this ratio is a *velocity*; and this velocity will be of the same absolute magnitude, whatever standards of length, time, and mass we adopt.

The electromagnetic value of the resistance of a conductor is also a quantity of the nature of a velocity, and therefore we may express the ratio of the two electrical units

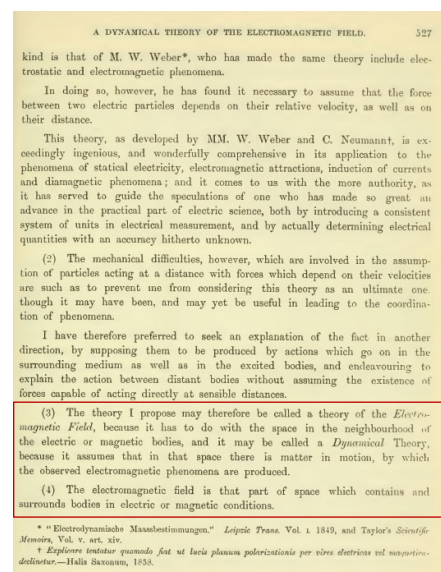
MDCCCLXVIII.

4 T

- Maxwell era ben consapevole del fatto che la teoria proposta nel suo articolo *On physical lines of force* conteneva aspetti problematici e la considerava solo una *ipotesi provvisoria e temporanea*.
- La base meccanica delle sue intuizioni poteva essere fraintesa, o addirittura ridicolizzata, sebbene lo avessero avviato sulla strada corretta verso la teoria definitiva del campo elettromagnetico.
- Si accinse quindi a riformulare la teoria su una base molto più astratta, senza particolari assunzioni circa la natura del mezzo attraverso il quale si propagano i fenomeni elettromagnetici.
- Così nel 1865 pubblicò una estesa memoria intitolata *A dynamical theory of the electromagnetic field*



- Nell'introduzione Maxwell spiega gli obiettivi della memoria:
 - *La teoria che propongo può essere chiamata teoria del Campo Elettromagnetico, perché ha a che fare con lo spazio in prossimità dei corpi elettrici o magnetici, e può essere chiamata Teoria Dinamica, perché presuppone che in quello spazio ci sia materia in movimento, dalla quale si producono i fenomeni elettromagnetici osservati.*
 - *Il campo elettromagnetico è quella parte dello spazio che contiene e circonda corpi in condizioni elettriche o magnetiche.*
- Nella trattazione non si fanno ipotesi sui moti e non si specificano le tensioni del mezzo, cioè non si propone alcun modello meccanico



- Infatti Maxwell, riferendosi alla memoria *On physical lines of force*, Maxwell scrive:
 - *In una precedente occasione ho tentato di descrivere un particolare tipo di movimento e un particolare tipo di tensione, disposti in modo tale da spiegare i fenomeni. Nel presente scritto evito qualsiasi ipotesi di questo genere; e nell'usare parole come momento elettrico ed elasticità elettrica in riferimento ai fenomeni noti dell'induzione di correnti e della polarizzazione dei dielettrici, desidero semplicemente dirigere la mente del lettore verso fenomeni meccanici che lo aiuteranno a comprendere quelli elettrici. Tutte queste frasi nel presente documento devono essere considerate illustrative, non esplicative.*
- Nella terza parte della memoria Maxwell scrive le equazioni del campo elettromagnetico specificando il significato delle variabili adoperate

For Electromagnetic Momentum	F	G	H
„ Magnetic Intensity	α	β	γ
„ Electromotive Force	P	Q	R
„ Current due to true Conduction	p	q	r
„ Electric Displacement	f	g	h
„ Total Current (including variation of displacement)	p'	q'	r'
„ Quantity of Free Electricity	e		
„ Electric Potential.....	Ψ		

La corrente elettrica

- Per corrente elettrica Maxwell intende il vettore densità di corrente $\vec{J}$:
 - *Una corrente elettrica consiste nella trasmissione di elettricità da una parte all'altra di un corpo.*
 - *Sia p la quantità di elettricità trasmessa nell'unità di tempo attraverso l'unità di area perpendicolare all'asse di x , quindi p è la componente della corrente in quel punto nella direzione di x .*
 - *Useremo le lettere p, q, r per indicare le componenti della corrente per unità di area nelle direzioni di x, y, z .*

Spostamento elettrico

- Maxwell ripropone il concetto di vettore spostamento come introdotto nella memoria *On physical lines of force*:
 - Lo spostamento elettrico consiste nell'elettrificazione opposta dei lati di una molecola o particella di un corpo che può o meno essere accompagnata dalla trasmissione attraverso il corpo. Sia $f \cdot dy \cdot dz$ la quantità di elettricità che apparirebbe sulle facce $dy \cdot dz$ di un elemento dx, dy, dz , tagliato dal corpo, allora f è la componente dello spostamento elettrico parallelo a x . Indicheremo con f, g, h gli spostamenti elettrici paralleli rispettivamente a x, y, z .
 - Le variazioni dello spostamento elettrico devono essere aggiunte alle correnti per ottenere il moto totale dell'elettricità, che possiamo chiamare p', q', r' , così che

$$\left. \begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \vec{J}_{tot} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

La forza elettromotrice

- Per forza elettromotrice Maxwell intende il campo elettrico $\vec{E}$ definito come segue
 - Siano P, Q, R le componenti della forza elettromotrice in ogni punto. Allora P rappresenta la differenza di potenziale per unità di lunghezza in un conduttore posto nella direzione di x nel punto dato. Possiamo supporre un filo indefinitamente corto posto parallelamente a x in un dato punto e toccato, durante l'azione della forza P , da due piccoli conduttori, che vengono poi isolati e sottratti all'influenza della forza elettromotrice. Il valore di P potrebbe quindi essere accertato misurando la carica dei conduttori.

Il momento elettromagnetico

- In questa memoria Maxwell chiama *momento elettromagnetico* il potenziale vettore
 - Siano F, G, H le componenti del momento elettromagnetico in un punto generico, dovuto ad un qualsiasi sistema di magneti o correnti.
 - Allora F è l'impulso totale della forza elettromotrice nella direzione x che verrebbe generato dalla rimozione di questi magneti o correnti dal campo, cioè se P è la forza elettromotrice in qualsiasi istante durante la rimozione del sistema risulta

$$F = \int P dt.$$

- Quindi la parte della forza elettromotrice che dipende dal moto dei magneti o delle correnti nel campo, o dalla loro alterazione di intensità, è

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- Inoltre, riprendendo la prima delle leggi enunciate nella memoria *On physical lines of force* Maxwell aggiunge
 - Sia s la lunghezza del circuito, se integriamo attorno al circuito:

$$\int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

- si otterrà il momento elettromagnetico totale del circuito, ovvero il numero di linee di forza magnetiche che lo attraversano, le cui variazioni misurano la forza elettromotrice totale nel circuito [cioè il flusso di $\vec{B}$]. Questo momento elettromagnetico è la stessa cosa a cui il professor Faraday ha attribuito il nome di Stato Elettrotonico.
- Se il circuito è il contorno dell'area elementare $dydz$, allora il suo momento elettromagnetico è

$$\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dy dz.$$

- e questo è il numero di linee di forza magnetica che attraversano l'area elementare $dydz$.

Forza magnetica

- Siano α, β, γ [le componenti de] la forza che agisce su un polo magnetico unitario posto nel punto x, y, z .
- Sia μ il rapporto tra l'induzione magnetica in un dato mezzo e quella nell'aria sotto una forza magnetizzante uguale, quindi il numero di linee di forza nell'unità di area perpendicolare a x sarà $\mu\alpha$ (μ è una quantità che dipende dalla natura del mezzo, dalla sua temperatura, dalla quantità di magnetizzazione già prodotta, e nei corpi cristallini varia con la direzione).
- Esprimendo in questa notazione il momento elettrico di piccoli circuiti perpendicolari ai tre assi, si ottiene il seguente

$$\left. \begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right\} \quad \mu\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Equazioni delle correnti

- La legge di Ampère è formalmente espressa come nella memoria *On Faraday's lines of force*, con la fondamentale differenza che la densità di corrente è quella totale che include anche la corrente di spostamento

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned} \right\} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J}_{tot}$$

Equazioni per il campo elettrico

- Maxwell distingue due casi, quello in cui il circuito soggetto all'induzione è in quiete e quello in cui è posto in movimento
- Nel primo caso scrive

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right\} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \psi$$

- Aggiungendo
 - dove ψ è una funzione di x, y, z e t , che è indeterminata per quanto riguarda la soluzione delle equazioni di cui sopra, perché i termini dipendenti da essa scompariranno integrando attorno al circuito. La quantità ψ può sempre, comunque, essere determinata in ogni caso particolare quando conosciamo le effettive condizioni della questione. L'interpretazione fisica di ψ è che rappresenta il potenziale elettrico in ogni punto dello spazio.
- Ciò in quanto la circuitazione di $\vec{E}$ può esprimersi attraverso $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ che non dipende dalla funzione ψ

- Nel secondo caso, quello in cui il circuito soggetto all'induzione è in movimento Maxwell scrive l'espressione del campo elettrico come

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{v} \times (\mu \vec{H}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \psi = \\ &= \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \psi \end{aligned}$$

- e descrive tali equazioni come:
 - I primo termine a destra di ciascuna equazione rappresenta la forza elettromotrice derivante dal moto del conduttore stesso. Questa forza elettromotrice è perpendicolare alla direzione del moto e alle linee di forza magnetica; e se si disegna un parallelogramma i cui lati rappresentano in direzione e grandezza la velocità del conduttore e l'induzione magnetica in quel punto del campo, allora l'area del parallelogramma rappresenterà la forza elettromotrice dovuta al moto del conduttore, e la direzione della forza è perpendicolare al piano del parallelogramma.
 - Il secondo termine in ciascuna equazione indica l'effetto dei cambiamenti nella posizione o nella forza dei magneti o delle correnti nel campo.
 - Il terzo termine mostra l'effetto del potenziale elettrico. Non ha alcun effetto nel provocare una corrente circolante in un circuito chiuso. Indica l'esistenza di una forza che spinge l'elettricità verso o da certi punti definiti nel campo.

Elasticità elettrica

- Rappresentano il legame tra il campo elettrico ed il vettore spostamento, Maxwell scrive
 - *Quando una forza elettromotrice agisce su un dielettrico, pone ogni parte del dielettrico in una condizione polarizzata, in cui i suoi lati opposti sono elettrizzati in modo opposto. L'entità di questa elettrificazione dipende dalla forza elettromotrice e dalla natura della sostanza e, nei solidi aventi una struttura definita da assi, dalla direzione della forza elettromotrice rispetto a questi assi. Nelle sostanze isotrope, se k è il rapporto tra la forza elettromotrice e lo spostamento elettrico, possiamo scrivere*

$$\left. \begin{array}{l} P = kf \\ Q = kg \\ R = kh \end{array} \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$$

Equazione dell'elasticità elettrica

- Rappresenta la legge di Gauss per il vettore spostamento, Maxwell premette:
 - *Sia e la quantità di elettricità positiva libera contenuta in unità di volume in una qualsiasi parte del campo, allora, poiché questa nasce dall'elettrificazione delle diverse parti del campo che non si neutralizzano a vicenda, possiamo scrivere:*

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

$$\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

- Successivamente Maxwell scriverà tale legge nella forma a noi consueta

Equazioni della resistenza elettrica

- Rappresentano la legge di Ohm in forma puntuale. Maxwell scrive:
 - *Quando una forza elettromotrice agisce su un conduttore produce attraverso di esso una corrente elettrica. Questo effetto si aggiunge allo spostamento elettrico già considerato. Nei solidi di struttura complessa, la relazione tra la forza elettromotrice e la corrente dipende dalla loro direzione attraverso il solido. Nelle sostanze isotrope, le sole che qui considereremo, se ρ è la resistenza specifica riferita all'unità di volume, possiamo scrivere*

$$\left. \begin{array}{l} P = -\rho p \\ Q = -\rho q \\ R = -\rho r \end{array} \right\} \quad \vec{E} = -\frac{1}{\sigma} \vec{J}$$

- Maxwell si vede costretto a introdurre questo segno nella legge di Ohm perché altrimenti, avendo assunto, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\rho$, la densità di corrente totale $\vec{J}_{tot}$ non risulterebbe solenoidale

Equazione di Continuità

- Rappresenta l'equazione di continuità della carica e ne formalizza la sua conservazione. Maxwell scrive:
 - *Se il mezzo conduce elettricità, allora avremo un'altra condizione, che può essere chiamata, come in idrodinamica, equazione di continuità:*

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Energia del Campo Elettromagnetico

- Infine Maxwell scrive l'espressione dell'energia associata al campo elettromagnetico

$$E = \sum \left\{ \frac{1}{8\pi} (\alpha\mu\alpha + \beta\mu\beta + \gamma\mu\gamma) + \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh) \right\} dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) d\zeta$$

- Specificando
 - *Il primo termine di questa espressione dipende dalla magnetizzazione del campo, ed è spiegato nella teoria proposta da un movimento effettivo di qualche tipo. Il secondo termine dipende dalla polarizzazione elettrica del campo, ed è spiegato nella teoria proposta da deformazioni di qualche tipo in un mezzo elastico.*

- Inoltre puntualizza la sua opinione sul concetto di energia associata ai fenomeni elettrici e magnetici:
 - *Nel parlare dell'Energia del campo, tuttavia, desidero essere inteso alla lettera. Tutta l'energia è uguale all'energia meccanica, sia che esista sotto forma di movimento o di elasticità, o in qualsiasi altra forma. L'energia nei fenomeni elettromagnetici è energia meccanica. L'unica domanda è: dove risiede? Nelle vecchie teorie risiede nei corpi elettrizzati, nei circuiti conduttori e nei magneti, sotto forma di una qualità sconosciuta chiamata energia potenziale, ovvero il potere di produrre certi effetti a distanza. Secondo la teoria proposta risiede nel campo elettromagnetico, nello spazio che circonda i corpi elettrificati e magnetici, nonché in quei corpi stessi, ed è in due forme diverse, che possono essere descritte senza ipotesi come polarizzazione magnetica e polarizzazione elettrica, oppure, secondo un'ipotesi molto probabile, come il moto e la tensione di uno stesso mezzo.*
- Comunque, scrive Maxwell, le equazioni ottenute risultano indipendenti da tali ipotesi siccome sono dedotte da fatti sperimentali, quali
 - *L'induzione di correnti elettriche mediante l'aumento o la diminuzione delle correnti vicine secondo i cambiamenti nelle linee di forza che passano attraverso il circuito.*
 - *La distribuzione dell'intensità magnetica secondo le variazioni di un potenziale magnetico.*
 - *L'induzione (o influenza) dell'elettricità statica attraverso i dielettrici.*

Teoria elettromagnetica della luce

- La teoria elettromagnetica della luce, che in *On physical lines of force* è solo abbozzata, nella memoria *A dynamical theory of the electromagnetic field*, viene formalizzata.
- Adoperando le sue equazioni, Maxwell deduce un insieme di relazioni che mostrano come sia le componenti del campo magnetico soddisfino l'equazione delle onde di d'Alembert
 - *All'inizio di questo lavoro ci siamo serviti dell'ipotesi ottica di un mezzo elastico attraverso il quale si propagano le vibrazioni della luce, per mostrare che abbiamo validi motivi per cercare, nello stesso mezzo, la causa anche di altri fenomeni come quelli della luce. Abbiamo quindi esaminato i fenomeni elettromagnetici, cercandone la spiegazione nelle proprietà del campo che circonda i corpi elettrizzati o magnetici. In questo modo siamo arrivati a certe equazioni che esprimono certe proprietà del campo elettromagnetico. Procediamo ora ad indagare se queste proprietà di ciò che costituisce il campo elettromagnetico, dedotte dai soli fenomeni elettromagnetici, siano sufficienti a spiegare la propagazione della luce attraverso la stessa sostanza.*

- Esprimiamo il vettore spostamento attraverso il campo elettrico dedotto dai potenziali

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \psi \right) = -\epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon \vec{\nabla} \psi$$

- Calcoliamo la corrente totale in assenza di correnti libere (la sola corrente di spostamento), adoperando questa espressione del vettore spostamento

$$\vec{J}_{tot} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon \vec{\nabla} \psi \right) = -\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- Sostituiamo la corrente nell'espressione della legge di Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J}_{tot} = -4\pi\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - 4\pi\epsilon \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- Esprimiamo il rotore del campo magnetico attraverso il potenziale vettore come

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu'} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu'} \left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right]$$

- (come già visto Maxwell indica con μ il rapporto $\mu/4\pi$, che qui è indicato con μ') Sostituiamolo nella precedente equazione

$$\frac{1}{\epsilon} \left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right] + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0$$

- Espressa in termini di componenti, la precedente relazione diventa

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 A_x \right) + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 A_y \right) + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 A_z \right) + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} \right) = 0$$

- Deriviamo la seconda equazione rispetto x e la terza rispetto z :

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 A_y \right) + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^3 A_y}{\partial z \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial y \partial t} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 A_z \right) + 4\pi\mu' \left(\frac{\partial^3 A_z}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial z \partial t} \right) = 0$$

- Sottraiamo la seconda equazione alla prima

$$-\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + 4\pi\mu' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = 0$$

- Poiché

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = \mu' H_x$$

- La relazione precedente può essere espressa come

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \mu' H_x = 4\pi\mu' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu H_x$$

- In maniera analoga è possibile dedurre delle relazioni di questo tipo per le altre componenti del campo magnetico

$$\left. \begin{aligned} k \nabla^2 \mu \alpha &= 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \alpha \\ k \nabla^2 \mu \beta &= 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \beta \\ k \nabla^2 \mu \gamma &= 4\pi\mu \frac{d^2}{dt^2} \mu \gamma \end{aligned} \right\}$$

- Inoltre, seguendo lo stesso procedimento si possono trovare relazioni di questo tipo anche per le componenti del campo elettrico (Maxwell non lo fa)

- Utilizzando questo approccio è possibile ottenere le equazioni delle onde soddisfatte da ciascuna componente del campo magnetico

$$\nabla^2 \vec{H} = 4\pi\epsilon\mu' \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

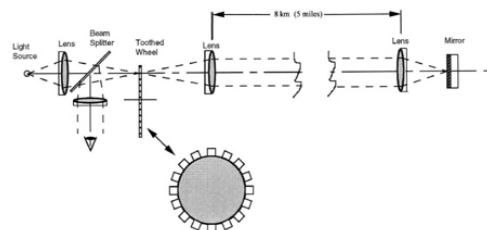
- Maxwell per la velocità dell'onda deduce l'espressione

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu'\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

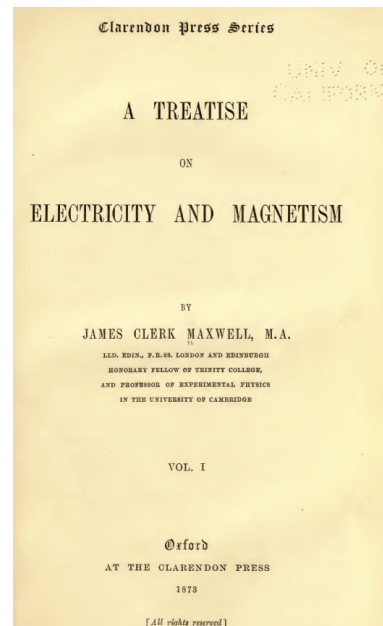
- Concludendo:

- *Quest'onda consiste interamente di disturbi magnetici, la direzione della magnetizzazione essendo nel piano dell'onda. Nessun disturbo magnetico la cui direzione di magnetizzazione non è nel piano dell'onda può essere propagato come un'onda piana.*
- *Quindi le perturbazioni magnetiche propagate attraverso il campo elettromagnetico concordano con la luce in questo, che la perturbazione in ogni punto è trasversale alla direzione di propagazione, e tali onde possono avere tutte le proprietà della luce polarizzata.*

- Dopo aver confrontato le determinazioni di Weber e Kohlrausch con la misura di Fizeau e la misura di Jean Bernard Léon Foucault, Maxwell conclude
 - *Quindi la velocità della luce dedotta dall'esperimento concorda sufficientemente bene con il valore di v dedotto dall'unico insieme di esperimenti che possediamo. Il valore di v è stato determinato misurando la forza elettromotrice con cui è stato caricato un condensatore di capacità nota, e poi scaricando il condensatore attraverso un galvanometro, in modo da misurare la quantità di elettricità in esso contenuta in misura elettromagnetica. L'unico uso fatto della luce nell'esperimento era l'osservazione degli strumenti. Il valore di v trovato da M. Foucault è stato ottenuto determinando l'angolo di rotazione di uno specchio rotante, mentre la luce riflessa da esso andava e veniva lungo un percorso misurato. Non si faceva alcun uso dell'elettricità o del magnetismo.*
 - *L'accordo dei risultati sembra mostrare che la luce e il magnetismo siano manifestazioni della stessa sostanza, e che la luce è un disturbo elettromagnetico propagato attraverso il campo secondo le leggi elettromagnetiche.*



- La formulazione dell'elettromagnetismo esposta nella memoria *A dynamical theory of the electromagnetic field*, compresa la Teoria elettromagnetica della luce fu trasferita con insignificanti variazioni nell'opera in due volumi *A Treatise on Electricity and Magnetism*, pubblicata in prima edizione nel 1873 e in seconda edizione nel 1881 rielaborata limitatamente ai primi nove dei trentacinque capitoli complessivi siccome la prematura scomparsa dell'autore ne precluse la completa revisione
- Quest'opera non costituisce un trattato sistematico e risulta piuttosto arduo studiarlo dall'inizio alla fine, tuttavia è ricco di materiale e di idee originali sebbene disperse. Alcuni capitoli sono dedicati a calcoli matematici o a soluzioni di specifici problemi o dettagli di natura sperimentale e le equazioni del campo elettromagnetico sono presentata nella parte finale del secondo volume



Definizione dell'operatore ∇ e uso

Let σ be a vector function of ρ , the vector of a variable point. Let us suppose, as usual, that

$$\rho = ix + jy + kz,$$

$$\text{and} \quad \sigma = iX + jY + kZ;$$

where X, Y, Z are the components of σ in the directions of the axes.

We have to perform on σ the operation

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}.$$

Performing this operation, and remembering the rules for the multiplication of i, j, k , we find that $\nabla \sigma$ consists of two parts, one scalar and the other vector.

The scalar part is

$$S \nabla \sigma = - \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right), \text{ see Theorem III, } \leftarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}$$

and the vector part is

$$V \nabla \sigma = i \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + j \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + k \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right). \leftarrow \vec{\nabla} \times \vec{\sigma}$$

If the relation between X, Y, Z and ξ, η, ζ is that given by equation (1) of the last theorem, we may write

$$F \nabla \sigma = i \xi + j \eta + k \zeta. \text{ See Theorem IV.}$$

- Oltre ad esprimere i campi nella maniera usuale attraverso le componenti, nel trattato Maxwell adopera sia il formalismo vettoriale che la rappresentazione in termini di quaternioni (qui non riportata)
- I simboli impiegati sono

	Symbol of Vector.	Constituents.
The radius vector of a point.....	ρ	$x \ y \ z$
The electromagnetic momentum at a point	$\mathfrak{A}$	$F \ G \ H$
The magnetic induction	$\mathfrak{B}$	$a \ b \ c$
The (total) electric current	$\mathfrak{C}$	$u \ v \ w$
The electric displacement.....	$\mathfrak{D}$	$f \ g \ h$
The electromotive force	$\mathfrak{E}$	$P \ Q \ R$
The mechanical force	$\mathfrak{F}$	$X \ Y \ Z$
The velocity of a point.....	$\mathfrak{G}$ or $\dot{\rho}$	$\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}$
The magnetic force	$\mathfrak{H}$	$\alpha \ \beta \ \gamma$
The intensity of magnetization	$\mathfrak{I}$	$A \ B \ C$
The current of conduction	$\mathfrak{K}$	$p \ q \ r$

We have also the following scalar functions :—

The electric potential Ψ .

The magnetic potential (where it exists) Ω .

The electric density e .

The density of magnetic 'matter' m .

- Nel formato vettoriale, le equazioni dei campi sono:

$$e = \nabla \cdot \mathfrak{D}$$

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\mathfrak{E} = \nabla \mathfrak{A} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Psi$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$4\pi \mathfrak{C} = \nabla \times \mathfrak{H}$$

$$4\pi \vec{J}_{tot} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

- Inoltre Maxwell aggiunse le equazioni costitutive:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\mathfrak{K} = C \mathfrak{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- Complessivamente il trattato fu accolto con una certa diffidenza dai ricercatori dell'epoca ed anche alle successive generazioni parve come un grande, quanto inaccessibile monumento
- Infine, consapevole delle perplessità suscitate dall'ipotesi circa un mezzo indispensabile a sostenere l'azione elettromagnetica, a conclusione del suo trattato Maxwell scrive
 - *Sembra esserci, nella mente di eminenti uomini, qualche pregiudizio, o obiezione a priori, contro l'ipotesi di un mezzo in cui si svolgono i fenomeni di irraggiamento della luce e del calore e le azioni elettriche a distanza. È vero che un tempo coloro che speculavano sulle cause dei fenomeni fisici avevano l'abitudine di rendere conto di ogni tipo di azione a distanza per mezzo di uno speciale fluido etereo, la cui funzione e proprietà era quella di produrre queste azioni. Riempirono tutto lo spazio tre e quattro volte con eteri di tipi diversi, le cui proprietà furono inventate semplicemente per "salvare le apparenze", così che ricercatori più razionali erano piuttosto disposti ad accettare non solo la precisa legge di attrazione di Newton a distanza, ma anche il dogma di Cotes, secondo cui l'azione a distanza è una delle proprietà primarie della materia, e che nessuna spiegazione può essere più intelligibile di questo fatto. Quindi la teoria ondulatoria della luce ha incontrato molta opposizione, diretta non contro la sua incapacità di spiegare i fenomeni, ma contro la sua assunzione dell'esistenza di un mezzo in cui la luce si propaga*
- Quindi, una volta prese in esame le teorie alternative sull'elettromagnetismo, termina con le parole
 - *In conclusione tutte queste teorie portano alla concezione di un mezzo in cui avviene la propagazione, e se ammettiamo questo mezzo come ipotesi, penso che dovrebbe occupare un posto preminente nelle nostre indagini, e che dovremmo sforzarci di costruire un rappresentazione mentale di tutti i dettagli della sua azione, e questo è stato il mio obiettivo costante in tutto questo Trattato.*