

- E' utile avere un'interazione che si annulli integrando su 4π . Per questo motivo calcolo questo integrale per 15)
Ricordo che in coordinate sferiche il prodotto scalare tra due vettori e' dato da:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_m (-1)^m \hat{v}_m \hat{w}_{-m}$$

Le coordinate sferiche del vettore unitario $\hat{r}$ possono essere espresse in termini di Y_{lm} .

Esercizio

Verificare che:

$$\hat{r}_m = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{Y_{1m}}{Y_{10}}(\hat{r})$$

- Calcolo l'integrale

$$\int d\hat{r} (\vec{\sigma}(1) \cdot \hat{r}) (\vec{\sigma}(2) \cdot \hat{r}) = \int d\hat{r} \sum_m \sigma_m(1) (-1)^m \frac{Y_{1m}}{Y_{10}}(\hat{r}) \sum_p \sigma_p(2) (-1)^p \frac{Y_{1-p}}{Y_{10}}(\hat{r}) \cdot \frac{4\pi}{3}$$

$$= \sum_{m,p} \sigma_m(1) \sigma_p(2) (-1)^p \int d\hat{r} \frac{Y_{1m}^*(\hat{r}) Y_{1-p}(\hat{r})}{Y_{10}^2} \cdot \frac{4\pi}{3} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \sum_p \sigma_p(1) (-1)^p \sigma_p(2) \delta_{m,-p} = \frac{4\pi}{3} \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)$$

- Per fare in modo che l'integrale sia zero si usa una interazione tensoriale del tipo:

$$S_{12} = 3 (\vec{\sigma}(1) \cdot \hat{r}) (\vec{\sigma}(2) \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)$$

ovviamente solo il primo termine e' tensore.