

Quindi:

$$\delta \langle H - \lambda N \rangle = 4 v_k (\epsilon_k - \lambda) - \left[\Delta_k \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) + u_k v_k (-\langle v \rangle) \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) \right]$$

$$= 4 v_k (\epsilon_k - \lambda) - 2 \Delta_k \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) = 0$$

$$2 (\epsilon_k - \lambda) v_k u_k = \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) \quad (22)$$

Faccio il quadrato di entrambi i membri

$$4 (\epsilon_k - \lambda)^2 v_k^2 u_k^2 = \Delta_k^2 (u_k^2 - v_k^2)^2 = \Delta_k^2 (u_k^4 + v_k^4 - 2 u_k^2 v_k^2)$$

Perché $u_k^2 + v_k^2 = 1$ $(u_k^2 + v_k^2)^2 = u_k^4 + v_k^4 + 2 u_k^2 v_k^2 = 1$

quindi $u_k^4 + v_k^4 = 1 - 2 v_k^2 u_k^2$

da cui

$$4 (\epsilon_k - \lambda)^2 v_k^2 u_k^2 = \Delta_k^2 (1 - 4 u_k^2 v_k^2)$$

$$u_k^2 v_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{4 (\epsilon_k - \lambda)^2} (1 - 4 u_k^2 v_k^2) = \frac{\Delta_k^2}{4 (\epsilon_k - \lambda)^2} - \frac{v_k^2 v_k^2 \Delta_k^2}{(\epsilon_k - \lambda)^2}$$

$$\frac{\Delta_k^2}{4 (\epsilon_k - \lambda)^2} = u_k^2 v_k^2 \left[1 + \frac{\Delta_k^2}{(\epsilon_k - \lambda)^2} \right] = u_k^2 v_k^2 \left[\frac{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2}{(\epsilon_k - \lambda)^2} \right]$$

quindi

$$u_k^2 v_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{4 (\epsilon_k - \lambda)^2} \frac{(\epsilon_k - \lambda)^2}{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(\epsilon_k - \lambda)^2}{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_k - \lambda}{[(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{1/2}} \right] \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{[(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{1/2}} \right) \right]$$

In questa separazione consideriamo il segno positivo del denominatore