

Equazioni Hartree-Fock-Bogolyubov

Cerchiamo una trasformazione unitaria dell'hamiltoniana (16) - (17) tale che sia diagonale rispetto al numero di particelle. In altre parole, tale che H e $N = \sum_k \alpha_k^\dagger \alpha_k$ abbiano autostati comuni.

Trascuriamo H_{int} in eq. (16). Il termine U è scalare quindi commuta con N .

Il termine H_1 commuta con N .

Della parte operatoriale consideriamo solo il termine $\alpha_k^\dagger \alpha_{k'}$

$$\begin{aligned}
 [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'}, \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''}] &= \underbrace{\alpha_k^\dagger \alpha_{k'} \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''}}_A - \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''} \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} \\
 &= A - [\alpha_{k''}^\dagger (\delta_{kk''} - \alpha_k^\dagger \alpha_{k''}) \alpha_{k'}] = A - [\alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''} \delta_{kk''} + \alpha_k^\dagger \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''} \alpha_{k'}] \\
 &= A - [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'} - \alpha_k^\dagger \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''} \alpha_{k'}] = A - [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'} - \alpha_k^\dagger (\delta_{k''k} - \alpha_{k'}^\dagger \alpha_{k''}) \alpha_{k''}] \\
 &= A - [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'} - \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} + \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} \alpha_{k''}^\dagger \alpha_{k''}] = 0 \quad (26)
 \end{aligned}$$

Analogamente per il termine $\alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k'}$.

Dato che H_{20} non commuta con N bisogna imporre che sia sempre nullo, quindi:

$$\begin{aligned}
 \langle k | t | k' \rangle &= \delta_{kk'} + \sum_{k'' > 0} [\langle k-k'' | \bar{V} | k-k'' \rangle + \langle k-k'' | \bar{V} | k-k'' \rangle \sigma_{k''}^z] \left(\frac{u_{k''} v_{k''}}{E_{k''}} + \frac{v_{k''} u_{k''}}{E_{k''}} \right) \\
 &+ \sum_{k'' > 0} \langle k-k' | \bar{V} | k-k'' \rangle \frac{u_{k''} v_{k''}}{E_{k''}} \left(\frac{u_{k''} v_{k''}}{E_{k''}} - \frac{v_{k''} u_{k''}}{E_{k''}} \right) = 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

queste sono le equazioni HFB.