

Trasformazioni inverse

$$a_k^\dagger = u_k \alpha_k^\dagger + v_k \alpha_{-k}$$

$$a_{-k}^\dagger = u_k \alpha_{-k}^\dagger - v_k \alpha_k$$

$$a_k = u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^\dagger$$

$$a_{-k} = u_k \alpha_{-k} - v_k \alpha_k^\dagger$$

3)

Per interpretare v_k^2 e u_k^2 come probabilità di occupazione e non-occupazione rispettivamente si impone

$$v_k^2 + u_k^2 = 1$$

4)

Quindi

$$\begin{aligned} \{\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger\} &= \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger + \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k \\ &= (u_k a_k - v_k a_{-k}^\dagger)(u_{k'} a_{k'}^\dagger - v_{k'} a_{-k'}) + (u_{k'} a_{k'}^\dagger - v_{k'} a_{-k'})(u_k a_k - v_k a_{-k}^\dagger) \\ &= u_k u_{k'} a_k a_{k'}^\dagger - u_k v_{k'} a_k a_{-k'} + v_k u_{k'} a_{-k}^\dagger a_{k'}^\dagger + v_k v_{k'} a_{-k}^\dagger a_{-k'} \\ &\quad - [u_{k'} u_k a_{k'}^\dagger a_k - u_{k'} v_k a_{k'}^\dagger a_{-k}^\dagger + v_{k'} u_k a_{-k'} a_k + v_{k'} v_k a_{-k'} a_{-k}^\dagger] \\ &= u_k u_{k'} \{a_k, a_{k'}^\dagger\} - u_k v_{k'} \{a_k, a_{-k'}\} - v_k u_{k'} \{a_{-k}^\dagger, a_{k'}^\dagger\} + v_k v_{k'} \{a_{-k}^\dagger, a_{-k'}\} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \delta_{k,k'} \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \delta_{k,k'} \\ &= (u_k^2 + v_k^2) \delta_{k,k'} = \text{per la 4) } = 1 \end{aligned}$$

5a)