

Numero di particelle

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}} \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \left[(u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}) (u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) \right. \\
 &\quad \left. + (u_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}) (u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) \right]
 \end{aligned}$$

Valore medio

$$\langle \text{BCS} | N | \text{BCS} \rangle = \sum_{\mathbf{k} > 0} \langle \text{BCS} | \left(\begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \right) | \text{BCS} \rangle$$

I termini $a_{\mathbf{k}} | \text{BCS} \rangle = 0$ così come $\langle \text{BCS} | a_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0$
rimangono quindi:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{BCS} | N | \text{BCS} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \text{BCS} | v_{\mathbf{k}}^2 a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^2 a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} | \text{BCS} \rangle \\
 &= 2 \sum_{\mathbf{k} > 0} v_{\mathbf{k}}^2 \quad \quad \quad \text{g)}
 \end{aligned}$$

Questo è un valore medio perchè BCS non ha un numero fisso di particelle.

Consideriamo la definizione 7).

$$\begin{aligned}
 | \text{BCS} \rangle &= (u_1 + v_1 a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}_1}^{\dagger}) (u_2 + v_2 a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}_2}^{\dagger}) (u_3 + v_3 a_{\mathbf{k}_3}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}_3}^{\dagger}) \dots | - \rangle \\
 &= A \left\{ | - \rangle + \dots \sum_{\mathbf{k} > 0} \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + \dots \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' > 0} \frac{v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}}{u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}'}^{\dagger} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Dove $A = \prod_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}$. Il primo termine non ha particelle il secondo ne ha 2, il terzo 4 ecc. Nel BCS sono presenti coppie di particelle legate da $\mathbf{k}$ e $-\mathbf{k}$.