

Possiamo applicare le eq. del moto agli operatori H e $Q_b^\dagger$ ma e' meglio uguagliare numeri che operatori, quindi cercheremo di calcolare i valori di aspettazione.

$$\begin{aligned} [H, Q_b^\dagger] |0\rangle &= (H Q_b^\dagger - Q_b^\dagger H) |0\rangle = H |v\rangle - Q_b^\dagger E_0 |0\rangle \\ &= E_v |v\rangle - Q_b^\dagger E_0 |0\rangle = (E_v - E_0) Q_b^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad 13$$

$$[H, Q_b] |0\rangle = (H Q_b - Q_b H) |0\rangle = H Q_b |0\rangle - E_0 Q_b |0\rangle = 0 \quad 14$$

Moltiplico l'eq. 13 per δQ_b e per $\langle 0|$ poi sottraggo il complesso coniugato (vedi nota)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta Q_b [H, Q_b^\dagger] |0\rangle - \langle 0 | [H, Q_b^\dagger] \delta Q_b |0\rangle &= \langle 0 | [\delta Q_b, [H, Q_b^\dagger]] |0\rangle \\ &= \langle 0 | (\delta Q_b [H, Q_b^\dagger] - [H, Q_b^\dagger] \delta Q_b) |0\rangle = \text{per la 13} \\ &= \langle 0 | \delta Q_b Q_b^\dagger |0\rangle (E_v - E_0) - \langle 0 | H Q_b^\dagger \delta Q_b |0\rangle + \langle 0 | Q_b^\dagger H \delta Q_b |0\rangle \\ &= (E_v - E_0) \langle 0 | \delta Q_b Q_b^\dagger |0\rangle - E_0 \langle 0 | Q_b^\dagger \delta Q_b |0\rangle + \langle 0 | Q_b^\dagger H \delta Q_b |0\rangle \end{aligned} \quad 15$$

Dato che $\langle 0 | Q_b^\dagger = 0$ l'eq. 15) si può scrivere come

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\delta Q_b, [H, Q_b^\dagger]] |0\rangle &= (E_v - E_0) \langle 0 | \delta Q_b Q_b^\dagger |0\rangle \\ &= (E_v - E_0) \langle 0 | [\delta Q_b, Q_b^\dagger] |0\rangle \end{aligned} \quad 16$$

$|0\rangle$ può essere uno stato fondamentale qualsiasi

e $Q_b^\dagger$ può essere un operatore qualsiasi:

$$Q_b^\dagger = \sum_{pq} C_{pq}^\dagger a^\dagger a + \sum_{pqrs} C_{pqrs}^\dagger a^\dagger a^\dagger a a + \dots$$

Bibliografia

Ring & Schude cap. 8 § 8.4 - Rowe cap. 13. - Messiah cap. XII