

$$|\tilde{\Phi}\rangle = \det(S) |\Phi\rangle$$

Questo perché ogni $|k\rangle$ è il prodotto di S_{kj} e $|j\rangle$, quindi in S_{kj} si può fattorizzare. Ma dato che S è unitaria, si ha che $|\det(S)| = 1$.

Questo significa che il funzionale $E(\tilde{\Phi})$ è invariante per una trasformazione di base e quindi anche la sua variazione lo è.

Nella nuova base si ha: $|k\rangle$ corrisponde a $|k'\rangle$

$$\langle k | T | k \rangle + \sum_j [\langle k | V | j \rangle \langle j | k \rangle - \langle j | V | k \rangle \langle j | k \rangle] = \epsilon_k \langle k | k \rangle = \langle k | h | k \rangle \quad 36$$

$$h | k \rangle = T | k \rangle + \sum_j [\langle j | V | j \rangle | k \rangle - \langle j | V | k \rangle | j \rangle] = \epsilon_k | k \rangle \quad 37$$

Definiamo

$$u(\vec{r}) = \sum_j \langle j | V | j \rangle = \sum_j \int d^3r' \phi_j^*(\vec{r}) V(\vec{r}, \vec{r}') \phi_j(\vec{r}')$$

$$W(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_j \phi_j^*(\vec{r}) V(\vec{r}, \vec{r}') \phi_j(\vec{r}')$$

L'eq. 37) si scrive

$$h \phi_k(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_k(\vec{r}) + u(\vec{r}) \phi_k(\vec{r})}_{\text{Hartree}} - \underbrace{\int W(\vec{r}, \vec{r}') \phi_k(\vec{r}') d^3r'}_{\text{Fock-Dirac}} = \epsilon_k \phi_k(\vec{r}) \quad 4$$

Nota che le somme in 38) e 39) vanno su tutti gli stati con $E < E_F$ quindi si tratta del moto di una particella $|k\rangle$ che interagisce con tutte e altre. La somma su 37 non è ristretta, quindi ci sarebbe il problema di un'autointerazione. In realtà per $k=j$ i termini di Hartree e di Fock-Dirac sono uguali e si cancellano.