

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{per } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & \text{per } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vec{l} \cdot \vec{\sigma} = 2\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (\text{A.11})$$

Sviluppiamo le autofunzioni su una base discreta di oscillatore armonico

$$R_{nlj}(r) = \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{ml}^{HO}(r) \quad (\text{A.12})$$

Le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico:

$$R_{ml}^{HO}(r) = \sqrt{\frac{2(m-1)!}{\Gamma(m+l+\frac{1}{2})b^3}} \left(\frac{r}{b}\right)^l L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2}{b^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (\text{A.13})$$

dove è stato indicato con L il polinomio di Laguerre

$$L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}}(x^2) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+l+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+l+\frac{3}{2})} (-)^{\mu} \frac{1}{\mu!(m-\mu-1)!} x^{2\mu} \quad (\text{A.14})$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m_p \omega}} \quad \hbar \omega = 41.5 \text{ A}^{-1/3} \text{ MeV} = \frac{\hbar c^2}{m_p c^2 b^2} \quad (\text{A.15})$$

$$m_p c^2 = (\text{massa del protone}) = 938.2796 \text{ MeV}$$

Le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico sono soluzioni dell'equazione:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_p} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + \frac{1}{2} m_p \omega^2 r^2 \right\} R_{ml}^{HO} = E_{ml}^{HO} R_{ml}^{HO} \quad (\text{A.16})$$

$$m = 1, 2, 3, 4, \dots \quad E_{ml}^{HO} = (2m + l - \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (\text{A.17})$$

Riscriviamo la equazione (A.10) usando la (A.12)

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_p} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V_{cent.}(r) + V_{s.o.}(r) + V_c(r) \right\} \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{ml}^{HO}(r) = \\ & = E_{nlj} \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{ml}^{HO}(r) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Dalla (A.16) si ottiene: