

• Per un sistema di oggetti con spin si ha che:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_n N_n \langle \vec{m}_n \rangle \quad (8)$$

dove $\langle \vec{m}_n \rangle$ è il valore medio dello spin della particella di tipo n nel volume attorno a $\vec{r}$, e N_n è la densità di queste particelle.

La variazione di $\vec{A}$ dal punto $\vec{r}$ a $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$ è data da

$$\Delta \vec{A} = \frac{\vec{\sigma}(\vec{r}')}{c |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r + \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r \quad (9)$$

quindi lasciando diventare la variazione infinitesimale ed integrando si ha:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \left[\int \frac{\vec{\sigma}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{c \vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] d^3r \quad (10)$$

Il secondo termine è:

$$\begin{aligned} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r &= \int \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \\ &= - \int \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}') d^3r' \quad \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{a} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{a} \\ &= - \int \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' + \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') d^3r' \quad (11) \end{aligned}$$

inverte e ho $\int_0^{\infty} \left[\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] d^3r' \rightarrow 0$

quindi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{\sigma}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d^3r' \quad (12)$$