

Dividendo per $e^{i(\bar{E}_n - \bar{E}_0)t}$ si ha:

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} | \psi_0 \rangle &= -\frac{i}{\hbar} (\bar{E}_n - \bar{E}_0) \langle \psi_n | \mathcal{G} | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_n | -\frac{i}{\hbar} [H, \mathcal{G}] | \psi_0 \rangle\end{aligned}$$

da cui si può ottenere l'equaglianza operatoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \mathcal{G}]$$

- Calcoliamo il valore di aspettazione per la corrente a un corpo $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_c + \vec{\sigma}_m$

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_c + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_m | \psi_0 \rangle &= \\ &= \langle \psi_n | \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_c | \psi_0 \rangle + c \langle \psi_n | \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_n | \vec{\nabla} \cdot \left\{ -\frac{ie\hbar}{2mc} \sum_{j=1}^A (\vec{\nabla}_j - \vec{\nabla}_j^*) \delta(\vec{r}_j - \vec{r}) \frac{1}{2} (1 + \tau_j^3) \right\} | \psi_0 \rangle \\ &= -\frac{ie\hbar}{2m} \sum_j \frac{1}{2} (1 + \tau_j^3) \int d^3r \left[\psi_n^*(\vec{r}) \nabla^2 \psi_0(\vec{r}) - \psi_0(\vec{r}) \nabla^2 \psi_n^*(\vec{r}) \right] \delta(\vec{r}_j - \vec{r})\end{aligned}$$

- Calcoliamo il commutatore per la sola parte di energia cinetica

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | -\frac{i}{\hbar} [T, \mathcal{G}] | \psi_0 \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_n | T \mathcal{G} | \psi_0 \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \psi_n | \mathcal{G} T | \psi_0 \rangle \\ &= -\frac{ie}{\hbar} \sum_j \frac{1}{2} (1 + \tau_j^3) \int d^3r \psi_0(\vec{r}) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi_n^*(\vec{r}) \delta(\vec{r}_j - \vec{r}) \\ &\quad - \frac{ie}{\hbar} \sum_j \frac{1}{2} (1 + \tau_j^3) \int d^3r \psi_n^*(\vec{r}) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi_0(\vec{r}) \delta(\vec{r}_j - \vec{r})\end{aligned}$$