

Collegamento con la risolvibile dell'eq. di Schrödinger

Consideriamo il caso $t > t'$. La definizione di funzione di Green non perturbata è:

$$\begin{aligned} G^0(x, x') &= -i \vartheta(t-t') \langle \bar{\Phi}_0 | \psi_{\mathbf{I}}(x) \psi_{\mathbf{I}}^{\dagger}(x') | \bar{\Phi}_0 \rangle \\ &= -i \vartheta(t-t') \langle \bar{\Phi}_0 | \sum_{\mathbf{k}} \phi(\vec{x}) a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \sum_{\mathbf{k}'} \phi^*(\vec{x}') a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t'} | \bar{\Phi}_0 \rangle \\ &= -i \vartheta(t-t') \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \phi(\vec{x}) \phi^*(\vec{x}') e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t'} \langle \bar{\Phi}_0 | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} | \bar{\Phi}_0 \rangle \\ &= -i \vartheta(t-t') \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{k}'} \phi(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}', t') \end{aligned}$$

per la completezza del set di autofunzioni. $\lim_{t \rightarrow t'} G^0 = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$

[Nota: abbiamo ipotizzato che $|\bar{\Phi}_0\rangle$ sia il vero vuoto $|0\rangle$.

Se $|\bar{\Phi}_0\rangle$ fosse lo stato di campo medio, la somma non sarebbe stata completa perché mancherebbero tutti gli stati buca.]

Sostituiamo l'espressione di G^0 nell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo.

$$\begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(x) \right] G^0(x, x') &= \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(x) \right] \left[-i \vartheta(t-t') \sum_{\mathbf{k}} \phi(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}', t') \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \vartheta(t-t') \right] \sum_{\mathbf{k}} \phi(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}', t') + \sum_{\mathbf{k}} \phi^*(\vec{x}', t') \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(x) \right] \phi(\vec{x}, t) \left[-i \vartheta(t-t') \right] \end{aligned}$$

Dato che $\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(x) \right] \phi(x) = 0$ e che $\frac{\partial}{\partial c} \vartheta(c) = \delta(c)$

si ha che:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(x) \right] G^0(x, x') = \delta(t-t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$