L'operatore ψ toglie una particella; $\psi^\dagger$ ne aggiunge una.

Esplicitiamo in 11) $\quad e^{\frac{iHt}{\hbar}} O_S \, e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = O_H$

$$i G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = \sum_n \Big[\vartheta(t-t') \, e^{-i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \langle \varphi_0 | \psi(\vec{x}) | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi^\dagger(\vec{x}') | \varphi_0 \rangle$$
$$- \vartheta(t'-t) \, e^{i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \langle \varphi_0 | \psi^\dagger(\vec{x}') | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi(\vec{x}) | \varphi_0 \rangle \Big] \qquad 13)$$

Sostituendo $\psi(\vec{x}) = \sum_k \phi_k(\vec{x}) a_k$ e $\psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_k \phi_k^*(\vec{x}) a_k^\dagger$

$$i G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = \sum_n \Big[\vartheta(t-t') \, e^{-i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \sum_{kk'} \phi_k^*(\vec{x}) \phi_{k'}(\vec{x}') \langle \varphi_0 | a_k | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a_{k'}^\dagger | \varphi_0 \rangle$$
$$- \vartheta(t'-t) \, e^{i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \sum_{kk'} \phi_k^*(\vec{x}) \phi_{k'}(\vec{x}') \langle \varphi_0 | a_k^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a_{k'} | \varphi_0 \rangle \Big] \qquad 14$$

Se il sistema ha invarianza traslazionale

$$\phi_k(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \frac{1}{V}\sum_k \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

$$\langle \varphi_n | a_{k'}^\dagger | \varphi_0 \rangle = \langle n\vec{k}' | a_{k'}^\dagger | \varphi_0 \rangle$$
$$\langle \varphi_0 | a_k | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_0 | a_k | n\vec{k} \rangle$$

altrimenti sono nulli, ma $|n\vec{k}\rangle = |n\vec{k}'\rangle$ per definizione
costruzione
quindi $\vec{k} = \vec{k}'$

La 14 diventa:

$$i G(\vec{x}t, \vec{x}'t') = \sum_n \Big[\vartheta(t-t') \, e^{-i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \langle \varphi_0 | a_k | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a_k^\dagger | \varphi_0 \rangle$$
$$- \vartheta(t'-t) \, e^{i\frac{(E_n-E_0)}{\hbar}(t-t')} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \langle \varphi_0 | a_k^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a_k | \varphi_0 \rangle \Big]$$