

$$\begin{aligned} \sum_i G(\vec{x}_i, \vec{x}_i') &= -\frac{i}{\hbar} \left[\delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i') \int d^3x_2 V(\vec{x}_i - \vec{x}_2) : \sum_k \phi_k(\vec{x}_2) \phi_k^*(\vec{x}_2) \vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k) \right. \\ &\quad \left. - : V(\vec{x}_i - \vec{x}_i') \sum_k \phi_k(\vec{x}_i) \phi_k^*(\vec{x}_i) \vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k) \right] \\ &= \frac{1}{\hbar} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i') \left[\int d^3x_2 V(\vec{x}_i - \vec{x}_2) g(\vec{x}_2) - V(\vec{x}_i - \vec{x}_i') \sum_k \phi_k(\vec{x}_i) \phi_k^*(\vec{x}_i) \vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k) \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\epsilon_F} \phi_k(\vec{x}) \phi_k^*(\vec{x})$

Definiamo un operatore $L_1 = \hbar\omega - H_0 = \hbar\omega + \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} - U(\vec{x}_i)$

$$\begin{aligned} L_1 G^0(\vec{x}_i, \vec{x}_i', \omega) &= \sum_k (\hbar\omega - \epsilon_k^0) \phi_k^0(\vec{x}_i) \phi_k^{0*}(\vec{x}_i') \left[\frac{\vartheta(\epsilon_k^0 - \epsilon_F^0)}{\omega - \omega_k + i\eta} + \frac{\vartheta(\epsilon_F^0 - \epsilon_k^0)}{\omega - \omega_k - i\eta} \right] \\ &= \hbar \sum_k \phi_k^0(\vec{x}_i) \phi_k^{0*}(\vec{x}_i') \left[\vartheta(\epsilon_k^0 - \epsilon_F) + \vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k^0) \right] \\ &= \hbar \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i') \end{aligned}$$

per la completezza dell'insieme $\{\phi_k^0\}$. Eq. 15) significa che $\frac{1}{\hbar} L_1$ è l'operatore $(G^0)^{-1}$. Applichiamolo all'equazione di

Dyson 6)

$$\begin{aligned} L_1 G(\vec{x}_i, \vec{x}_i', \omega) &= L_1 G^0(\vec{x}_i, \vec{x}_i', \omega) + \int d^3x_2 d^3x_2' L_1 G^0(\vec{x}_i, \vec{x}_2, \omega) \Sigma(\vec{x}_2, \vec{x}_2') G(\vec{x}_2', \vec{x}_i', \omega) \\ &= \hbar \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i') + \int d^3x_2' \hbar \Sigma(\vec{x}_i, \vec{x}_2') G(\vec{x}_2', \vec{x}_i', \omega) \end{aligned}$$

Inserendo l'espressione 13) di G e 14) di Σ abbiamo:

$$\begin{aligned} &\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} - U(\vec{x}_i) \right] \sum_k \phi_k(\vec{x}_i) \phi_k^*(\vec{x}_i') \left[\frac{\vartheta(\epsilon_k - \epsilon_F)}{\omega - \omega_k + i\eta} + \frac{\vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k)}{\omega - \omega_k - i\eta} \right] \\ &= \hbar \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i') + \int d^3x_2 \hbar \Sigma(\vec{x}_i, \vec{x}_2) \sum_k \phi_k(\vec{x}_2) \phi_k^*(\vec{x}_i') \left[\frac{\vartheta(\epsilon_k - \epsilon_F)}{\omega - \omega_k + i\eta} + \frac{\vartheta(\epsilon_F - \epsilon_k)}{\omega - \omega_k - i\eta} \right] \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\phi_j(\vec{x}_i')$ e integrando su $\vec{x}_i'$ per l'ortonormalizzazione delle ϕ_k le somme spariscono.

$$\begin{aligned} &\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} - U(\vec{x}_i) \right] \phi_j(\vec{x}_i) \left[\frac{\vartheta(\epsilon_j - \epsilon_F)}{\omega - \omega_j + i\eta} + \frac{\vartheta(\epsilon_F - \epsilon_j)}{\omega - \omega_j - i\eta} \right] \\ &= \hbar \phi_j(\vec{x}_i) + \int d^3x_2 \hbar \Sigma(\vec{x}_i, \vec{x}_2) \phi_j(\vec{x}_2) \left[\frac{\vartheta(\epsilon_j - \epsilon_F)}{\omega - \omega_j + i\eta} + \frac{\vartheta(\epsilon_F - \epsilon_j)}{\omega - \omega_j - i\eta} \right] \end{aligned}$$