

Per risolvere questi integrali ci ricorriamo al solito trucco di aggiungere $i\eta$ con $\eta \rightarrow 0$. Ricordando che per $\epsilon < 0$ $R(\epsilon) = 0$

$$R(E) = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_0 | B \int_0^\infty e^{\frac{i}{\hbar} (H - E_0 + E + i\eta) z} dz | \psi_0 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi_0 | D \int_0^\infty e^{\frac{i}{\hbar} (H - E_0 - E - i\eta) z} dz | \psi_0 \rangle =$$

$$= - \langle \psi_0 | B (H - E_0 + E + i\eta)^{-1} | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | D (H - E_0 - E - i\eta)^{-1} | \psi_0 \rangle$$

Inserisco la completezza,

$$H | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle \quad \sum_{n=0}^{\infty} | \psi_n \rangle \langle \psi_n | = \mathbb{I}$$

$$R(E) = - \langle \psi_0 | B \sum_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n | (H - E_0 + E + i\eta)^{-1} | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | D \sum_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n | (H - E_0 - E - i\eta)^{-1} | \psi_0 \rangle$$

$$= \sum_n \left[- \frac{\langle \psi_0 | B | \psi_n \rangle \langle \psi_n | D | \psi_0 \rangle}{(E_n - E_0) + E + i\eta} - \frac{\langle \psi_0 | D | \psi_n \rangle \langle \psi_n | B | \psi_0 \rangle}{(E_n - E_0) - E - i\eta} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\langle \psi_0 | D | \psi_n \rangle \langle \psi_n | B | \psi_0 \rangle}{E - (E_n - E_0) + i\eta} - \frac{\langle \psi_0 | B | \psi_n \rangle \langle \psi_n | D | \psi_0 \rangle}{E + (E_n - E_0) + i\eta} \right]$$

Questa è la rappresentazione di Lehmann (spettrale).

Nota che per $n=0$ $R(E) = 0$.

Normalmente l'operatore $D = B$ quindi

$$R(E) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \psi_0 | B | \psi_n \rangle|^2 \left\{ \frac{1}{E - (E_n - E_0) + i\eta} - \frac{1}{E + (E_n - E_0) + i\eta} \right\}$$