

Si può dimostrare che le equazioni RPA ammettono, per ogni autovalore ω_n un autovalore negativo $-\omega_n$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^* \\ X_n^* \end{pmatrix} = -\omega_n \begin{pmatrix} Y_n^* \\ -X_n^* \end{pmatrix} \quad 14$$

L'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ è completo e ortonormale.

$$(X_n^*, -Y_n^*) \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \delta_{mn} \quad \sum_n \begin{pmatrix} X_n \\ -Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, Y_n^*) = \mathbb{I} \quad 15$$

Utilizzando la 15) possiamo scrivere la 12) come

$$\begin{pmatrix} A-E\mathbb{I} & B \\ B^* & A+E\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \begin{pmatrix} X_n \\ +Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n^* & Y_n^* \\ -X_n^* & -Y_n^* \end{pmatrix} \\ = \sum_n \begin{pmatrix} X_n \\ +Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, -Y_n^*) - \sum_n \begin{pmatrix} X_n \\ +Y_n \end{pmatrix} (Y_n^*, X_n^*)$$

Soluzione di questa equazione

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = \sum_n \frac{1}{\omega_n - E} \begin{pmatrix} X_n \\ +Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, -Y_n^*) - \sum_n \frac{1}{\omega_n + E} \begin{pmatrix} X_n \\ +Y_n \end{pmatrix} (Y_n^*, X_n^*)$$

Prova

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \right] \left[\sum_n \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, Y_n^*) - \sum_n \begin{pmatrix} Y_n \\ X_n \end{pmatrix} (Y_n^*, X_n^*) \right]$$

$$= \sum_n \left[\omega_n \begin{pmatrix} X_n \\ -Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, Y_n^*) - E \begin{pmatrix} X_n \\ -Y_n \end{pmatrix} (X_n^*, Y_n^*) - \left[-\omega_n \begin{pmatrix} Y_n \\ +X_n \end{pmatrix} (Y_n^*, X_n^*) - E \begin{pmatrix} Y_n \\ +X_n \end{pmatrix} (Y_n^*, X_n^*) \right] \right]$$

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n \left(\frac{X_n X_n^*}{\omega_n - E} + \frac{Y_n Y_n^*}{\omega_n + E} \right) & \sum_n \left(\frac{X_n Y_n^*}{\omega_n - E} + \frac{X_n Y_n^*}{\omega_n + E} \right) \\ \sum_n \left(\frac{Y_n X_n^*}{\omega_n - E} + \frac{X_n^* Y_n}{\omega_n + E} \right) & \sum_n \left(\frac{Y_n Y_n^*}{\omega_n - E} + \frac{X_n^* X_n}{\omega_n + E} \right) \end{pmatrix} \quad 17$$