

## Sviluppo in multipoli

Le equazioni da risolvere sono del tipo

$$\square u(\vec{r}, t) \equiv \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = 0 \quad 40$$

supponendo che la dipendenza temporale sia:

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad 41$$

$$\text{si ha: } \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u(\vec{r}) = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad 42$$

equazione di Helmholtz.

L'eq. 42) è tipo eq. di Schrödinger di particella libera. Si può fare lo sviluppo in multipoli riscrivendo queste equazioni in coordinate polari sferiche.

La soluzione è del tipo:

$$u(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{lm}(r, \theta, \phi) = N \sum_{l,m} j_l(kr) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^l} \quad 43$$

dove  $N$  è una costante di normalizzazione

$j_l$  sono le funzioni di Bessel sferiche

$Y_{lm}$  sono le armoniche sferiche.

- Abbiamo visto che la soluzione delle eq. di Maxwell per il potenziale vettore  $\vec{A}$  richiede la presenza di un vettore  $\vec{E}$  con tre componenti e di norma unitaria.

Nello sviluppo in multipoli diventa conveniente definire le armoniche sferiche vettoriali (già fatto col deutone)

$$\vec{Y}_{LM}^N(\hat{r}) = \sum_{N\eta} \langle LM | \eta | N \rangle \frac{Y_{LM}(\hat{r})}{r^L} \quad \eta = -3, 0, 1 \quad 44$$