

ϵ_m può essere espresso in coordinate cartesiane come:

$$\epsilon_0 = \hat{z} \quad \epsilon_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \epsilon_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad 45$$

Consideriamo il teorema del gradiente:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) \underset{2}{\underset{\mu}{\nearrow}} = \left(\frac{l}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f\right) \underset{2}{\underset{l-1}{\nearrow}}^{\mu} - \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f\right) \underset{2}{\underset{l+1}{\nearrow}}^{\mu} \quad 46$$

e le regole di differenziazione delle funzioni di Bessel:

$$\frac{d}{dr} j_l(kr) = k j_{l-1}(kr) - \frac{l+1}{r} j_l(kr) \quad 47$$

$$\frac{d}{dr} j_l(kr) = -k j_{l+1}(kr) + \frac{l}{r} j_l(kr) \quad 47$$

• Consideriamo l'ampiezza:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LM}(\vec{r}, l) &= \frac{1}{k} \vec{\nabla} j_l(kr) \underset{LM}{\nearrow}(\vec{r}) \\ &= \left(\frac{l}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{l-1}(kr) \underset{l, l-1}{\nearrow}^{\mu}(\vec{r}) + \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_l(kr) \underset{l, l+1}{\nearrow}^{\mu}(\vec{r}) \end{aligned} \quad 48$$

• Esercizio: dimostrare la 48)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \vec{\nabla} j_l(kr) \underset{LM}{\nearrow}(\vec{r}) &= \frac{1}{k} \left(\frac{l}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dr} j_l + \frac{l+1}{r} j_l\right) \underset{l, l-1}{\nearrow}^{\mu} \\ &\quad - \frac{1}{k} \left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dr} j_l - \frac{l}{r} j_l\right) \underset{l, l+1}{\nearrow}^{\mu} = \text{per le 47} \end{aligned}$$

si ottiene la 48).

L'ampiezza 48) soddisfa l'eq. di Helmholtz ma non la gauge di Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{LM}(\vec{r}, l) = \frac{1}{k} \nabla^2 j_l(kr) \underset{LM}{\nearrow}(\vec{r}) = -\frac{k^2}{k} j_l(kr) \underset{LM}{\nearrow}(\vec{r}) \neq 0$$

per questo motivo è longitudinale.