

- In generale ogni vettore del tipo

$$\vec{B}_{L,M}(\vec{r}) = j_L(kr) \vec{Y}_{L,M}(\hat{r})$$

49)

è soluzione dell'equazione di Helmholtz.

Dato che bisogna conservare la parità, ci saranno due tipi di soluzione

$$\vec{A}_{L,M}(\vec{r}, m) = j_L(kr) \vec{Y}_{L,M}(\hat{r})$$

50)

$$\vec{A}_{L,M}(\vec{r}, e) = C_{L-1} j_{L-1}(kr) \vec{Y}_{L-1,M}(\hat{r}) + C_{L+1} j_{L+1}(kr) \vec{Y}_{L+1,M}(\hat{r})$$

50)

- La Coulomb gauge impone che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{L,M}(\vec{r}, m) = 0$$

51a)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{L,M}(\vec{r}, e) = 0$$

51b)

dove la 51a) è dimostrabile e la 51b) invece è soddisfatta per

$$C_{L-1} = \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} \quad C_{L+1} = -\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2}$$

Esercizio

Dimostrare la 51a) e la 51b)

$$\vec{\nabla} \cdot \left(j_L(kr) \vec{Y}_{L,M}(\hat{r}) \right) = \sum_{\eta} \langle \lambda N-\eta | \eta | L N \rangle \vec{e}_{\eta} \cdot \vec{\nabla} \left(j_L(kr) \vec{Y}_{L,M}(\hat{r}) \right)$$

$$= k \sum_{\eta} \langle \lambda N-\eta | \eta | L N \rangle \vec{e}_{\eta} \cdot \left[\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{1/2} j_{\lambda-1}(kr) \vec{Y}_{\lambda-1,M}(\hat{r}) + \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}\right)^{1/2} j_{\lambda+1}(kr) \vec{Y}_{\lambda+1,M}(\hat{r}) \right]$$

$$= k \left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{1/2} j_{\lambda-1}(kr) \sum_{\eta} \langle \lambda N-\eta | \eta | L N \rangle \sum_{\eta'} \langle \lambda-1 N-\eta' | \eta' | \lambda N-\eta \rangle \vec{Y}_{\lambda-1,M}(\hat{r}) \vec{e}_{\eta} \cdot \vec{e}_{\eta'} + k \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}\right)^{1/2} j_{\lambda+1}(kr) \sum_{\eta} \langle \lambda N-\eta | \eta | L N \rangle \sum_{\eta'} \langle \lambda+1 N-\eta' | \eta' | \lambda N-\eta \rangle \vec{Y}_{\lambda+1,M}(\hat{r}) \vec{e}_{\eta} \cdot \vec{e}_{\eta'}$$

$$\vec{e}_{\eta} \cdot \vec{e}_{\eta'} = \vec{e}_{\eta} \cdot \vec{e}_{\eta'} (-)^{\eta} (-)^{\eta'} = (-)^{\eta} \vec{e}_{\eta} \cdot \vec{e}_{\eta'}^* = (-)^{\eta} \delta_{\eta\eta'}$$