

• le ampiezze $\vec{a}$ sono normalizzate come:

$$\int \vec{A}_{LM}^*(\vec{r}, \vec{a}) \vec{A}_{L'M'}(\vec{r}, \vec{a}) d^3r = \frac{1}{k^2} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{LL'} \delta_{MM'} \delta_{\vec{a}\vec{a}'} \quad (52)$$

• Esercizio •

Dimostrare la 52)

$$\int \vec{A}_{LM}^*(\vec{r}, m) \vec{A}_{L'M'}(\vec{r}, m) d^3r = \int \int_{\Omega} \int_0^\infty (kr)^{\frac{L}{2}} \frac{\vec{Y}_{LM}^*(\hat{r})}{r^{L+1}} (kr)^{\frac{L'}{2}} \frac{\vec{Y}_{L'M'}(\hat{r})}{r^{L'+1}} r^2 dr d\hat{r}$$

$$= \int \int_{\Omega} (kr)^{\frac{L}{2}} (kr)^{\frac{L'}{2}} r^2 dr = \frac{1}{k^2} \delta(k - k') \delta_{LL'} \delta_{MM'}$$

$$\int \vec{A}_{LM}^*(\vec{r}, e) \vec{A}_{L'M'}(\vec{r}, e) d^3r$$

$$= \int d^3r \left[\left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\frac{L}{2}} \vec{Y}_{L-1,1}^*(\hat{r})}{r^{L+1}} - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\frac{L}{2}} \vec{Y}_{L+1,1}^*(\hat{r})}{r^{L+1}} \right] \left[\left(\frac{L'+1}{2L'+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\frac{L'}{2}} \vec{Y}_{L'-1,1}(\hat{r})}{r^{L'+1}} - \left(\frac{L'}{2L'+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\frac{L'}{2}} \vec{Y}_{L'+1,1}(\hat{r})}{r^{L'+1}} \right]$$

$$= \left[\frac{L+1}{2L+1} \int dr r^2 \int_{\Omega} \frac{(k'r)^{\frac{L}{2}}}{r^{L+1}} \frac{(kr)^{\frac{L}{2}}}{r^{L+1}} + \frac{L}{2L+1} \int dr r^2 \int_{\Omega} \frac{(k'r)^{\frac{L}{2}}}{r^{L+1}} \frac{(kr)^{\frac{L}{2}}}{r^{L+1}} \right] \delta_{LL'} \delta_{MM'}$$

$$= \left[\frac{L+1+L}{2L+1} \right] \delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{1}{k^2} \delta(k - k') = \frac{1}{k^2} \delta(k - k') \delta_{LL'} \delta_{MM'}$$

Ovviamente m ed e sono ortogonali perché hanno parità opposte.