

• Il transition rate è:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H_{int} | i \rangle \right|^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\hbar c} d\Omega_k = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2} \frac{k^2}{c} \left| \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \right|^2 c^2 \frac{2\pi\hbar}{\omega} d\Omega_k \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar c} \frac{k^2}{\hbar} \frac{1}{c^2} \frac{2\pi\hbar c}{k} \left| \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \right|^2 d\Omega_k \\
 &= \frac{k}{2\pi\hbar c^2} \left| \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \right|^2 d\Omega_k
 \end{aligned}$$

Consideriamo lo sviluppo in multipoli con $k/2$ quindi si lavora in coordinate sferiche e posso usare l'eq. 53 nella 68)

$$W = \frac{k}{2\pi\hbar c^2} \left| \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \sqrt{2\pi} \sum_{\vec{\sigma}} (r)^{\vec{\sigma}} [\vec{\sigma}] \left[i \vec{A}_{\vec{\sigma}\mu}(\vec{r}, e) + \mu \vec{A}_{\vec{\sigma}\mu}(\vec{r}, m) \right] \right|^2 d\Omega_k$$

Consideriamo il caso di transizioni elettriche.

$$\vec{A}_{\vec{\sigma}\mu}(\vec{r}, e) = \left(\frac{\vec{\sigma}+1}{2\vec{\sigma}+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\vec{\sigma}}}{\sqrt{\vec{\sigma}+1}} \vec{Y}_{\vec{\sigma}, \vec{\sigma}+1}^{\mu}(\vec{r}) - \left(\frac{\vec{\sigma}}{2\vec{\sigma}+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(kr)^{\vec{\sigma}}}{\sqrt{\vec{\sigma}+1}} \vec{Y}_{\vec{\sigma}, \vec{\sigma}+1}^{\mu}(\vec{r})$$

Il limite di grande lunghezza d'onda è $kr \ll 1$.

Questo è il limite per fotoni di alcuni MeV di energia, il nucleo risulta essere molto piccolo: $k = \frac{E}{\hbar c} \simeq \frac{1}{200} \text{ fm}^{-1}$

In questo limite si ha:

$$j_{\vec{\sigma}}(kr) \rightarrow \frac{(kr)^{\vec{\sigma}}}{(2\vec{\sigma}+1)!!} \quad (2\vec{\sigma}+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$